内容提要

本书是教育部"高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划"的研究成果，是面向21世纪课程教材。本书以复旦大学数学系近20年中陆续多次出版的《数学分析》为基础，为适应数学教学面向21世纪进行改革的需要面编写的。结合了多年来教学实践的经验体会，从体系、内容、观点、方法和处理上，对教材作了有益的改革。

全书分上、下两册出版。

上册内容包括：集合与映射、数列极限、函数极限与连续函数、微分、微分中值定理及其应用、不定积分、定积分、反常积分等八章。

下册内容包括：数项级数、函数项级数、Euclid空间上的拓扑、多元函数的微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、含参变量积分、Fourier级数等八章。

本书可以作为高等院校数学专业数学分析课程的教科书，也可供其他有关专业选用。

序

摆在我们面前的这本书，是复旦大学数学系的几位教师根据面向21世纪教学内容和课程体系改革的要求，结合自身的教学实践，在近年内编写出来的数学分析教材。

说数学分析(或微积分)是数学系最重要的一门基础课程，恐怕并非过誉。因为它不仅是大学数学系学生进校后首先面临的一门重要课程，而且大学本科乃至研究生阶段的很多后继课程在本质上都可以看作是它的延伸、深化或应用，至于它的基本概念、思想和方法，更可以说是无处不在。正因为如此，大家把关注的目光投射到这门课程及其教材的改革上，并从不同的角度付诸实践，实在是很自然的。然而，自牛顿、莱布尼茨建立微积分，并经柯西、魏尔斯特拉斯等人为之奠定了相当严格的基础以来，二三百年中经过众多科学家的努力，微积分的基本理论框架及表达方式已历经了一个千锤百炼的过程。大厦早已建成，格局已经布就，改革谈何容易。尽管国内外已经出版的微积分教材为数颇多，但严格说来，真正能体现特色、符合改革精神的却太少。这门课程的改革既举足轻重，又颇具难度，是一个攻坚战。对这门课程的改革设想和实践，就像"每个读者心中都有自己的林妹妹"那样，也往往见仁见智，看来在相当长的一段时间内难以(也没必要)完全取得共识。

那么，不管特点如何各异，比较理想的微积分教材是否应该具有某些共性呢？我想利用这个机会，谈一些粗浅的认识，作为一家之言，就正于方家与读者。

首先，任何一门学问，就其本质来说，关键的内容、核心的概念，往往就不过那么几条；而发挥开来，就成了洋洋大观的巨著。理解了这些核心和关键，并通过严格的训练将其真正学到手，就掌握了这门课程的精髓，就能得心应手地加以应用和发挥，也就达到了学习这门课程的目的，并为培养创新人才打下了良好的基础。微积分也不例外。要让学生把主要的精力集中到那些最基本、最主要的内容上，真正学深学进，一生受用不尽。将简单的东西故弄玄虚，讲得复杂、烦琐，使学生莫测高深的，决不是一个水平高的好教师；相反，将复杂的内容，抓住实质讲得明白易懂，使学生觉得自然亲切、趣味盎然的，才是一个高水平的良师。不仅对那些无关大局、学了将来永远用不上、而且很快就会忘个精光的东西要尽量精简，而且对那些掌握了基本内容与方法之后、将来要用的时候很容易学会、甚至可以自己创造出来的东西，也要尽量精简。不突出

重点，事无巨细，面面俱到，搞烦琐哲学，看似认真负责，其实不仅加重了学生的负担，影响了学生的深入理解，而且束缚了学生的思路，这似乎是现有不少教材的一个通病。“少而精”的原则讲了好多年，看来要真正贯彻，还得花大力气。返朴归真，是一种很高的境界，也是编写教材的一个重要的原则。微积分作为最重要的一门基础课程，更应该在这方面树立一个榜样。

其次，任何一门学科的产生与发展，都离不开外部世界的推动，数学也是如此。牛顿、莱布尼茨当年发明微积分，就是和解决力学与几何学中的问题紧密联系着的。直到今天，微积分这个威力无比的武器仍在各方面不断发挥着重要的作用。这不仅为微积分增添了光采，而且实际上也为编写微积分教材提供了丰富的原材料。可惜的是，以往的很多微积分教材往往过分地追求“数学上的完美”，板着面孔讲理论，割裂了微积分与外部世界的生动活泼的联系，也显示不出微积分的巨大生命力和应用价值。学生学了一大堆定义、定理和公式，可能还是没搞清楚为什么要学习微积分，不知道学了微积分究竟有什么用。现在大家强调要加强对学生数学建模的训练，不少学校开设了种种有关数学模型的课程，固然是一件很好的举措，但如果能在基础课的教学中充分体现数学建模的思想，在讲述有关内容时与相应的数学模型有机结合，在看来枯燥的数学内容与丰富多彩的外部世界之间架设起桥梁，而不是额外添加课程，岂不是可以收到事半功倍的效果?！作为一门基础课，微积分是最有条件也最应该体现这一原则的。这样做，不应该视为对其他课程的支持和援助，而是微积分课程自身合理建设的需要。否则，不关注模型，不重视应用，割断了来龙去脉，抽去了数学思想发展的线索，微积分就成了无源之水，无本之木，也就失去了生命力。重视并兼顾模型和应用，应是微积分这门课程的应有之义，也是体现返朴归真原则的一个重要的内涵。

第三，任何一门课程的内容，都不应该固步自封，一成不变，而应该顺应时代的发展和科技的进步，及时地弃旧图新，在概念及方法的引进上，在教材内容的取舍上，体现现代化的精神。从这个意义上说，在微积分课程中汲取一些现代数学思想和概念，对内容进行增删和调整，都是完全可能且必要的，并要下大力气去做。但是，每门课程都应有自己明确的内涵和范围，决不能“抢跑道”，通过把后继课程内容下放的办法来提高本门课程的档次和水平，从而打乱整个课程有机体系的阵脚。微积分这门大学低年级的基础课程，讲的是具有良好性质的函数(“好”的函数)的微积分。这是朴素的微积分，是学习中的的一个阶段性标志。将研究相应于“坏”的函数的微积分的一些后继课程的内容提前到微积分中来讲授，看来是不相宜的。应该提倡教一样，像一样；学一样，精一样，一步一个脚印地打好必要的基础。至于计算机的出现和飞速发展，不仅使数学的应用在广度和深度两方面都达到前所未有的程度，而且深刻

地影响了数学的发展进程和思维模式。微积分的课程内容应该反映这一重要的趋势。如果画地为牢，囿于微积分的传统框架不敢越雷池一步，在实际计算或应用时就会感到力不从心，甚至束手无策；而借助于数值计算及相应的软件，却往往可以使问题迎刃而解。此外，微积分本身又正是有关计算方法的理论基础，在微积分课程中介绍有关数值计算的基本思想和方法，是顺理成章的。这一有机的结合，可以使学人如虎添翼，也将会对数学课程体系的改革提供有益的启示。

第四，学习的目的在于应用。如前所述，微积分的基本原理和公式并不多，但如能得心应手地加以运用，却可以发挥出神奇的威力。要做到这一点，关键在于要使学生接受严格而充分的训练，单靠课堂上的讲授是绝对不够的。现在往往老师讲得多，同学练得少。其实，熟能生巧，多讲不如多练。只有通过严格而充分地训练，才能使学生达到学好数学的两个基本要求——理解与熟练。苏步青老师说他自己曾做过一万道微积分题，他在数学上的深厚功底和卓越成就，由此也可见端倪。事实上，做一千道题有一千道题的体会，做一万道题有一万道题的体会。如果每种题型只蜻蜓点水地做上那么一二道题，加起来总共不过二三百道题，又怎么谈得上牢固掌握、并在需要时能做到“运用之妙，存乎一心”呢?! 只有在编写教材时在量和质两方面认真兼顾到习题(包括借助于计算机求解的习题)的配置，使课堂教学与课后训练有机配合、相得益彰，提高微积分课程的教学质量才会有一个可靠的保障。

我高兴地看到，正是在以上四个方面，这本教材作了有益的尝试及认真的实践。其中，有将微分与不定积分视为一对矛盾来展开后继内容的精采段落，有将微积分与数值数学综合处理、有别于传统教材的章节，有从模型出发引入概念、深化主题和体现应用的众多实例，同时，也可看到对传统教材内容删繁就简、精雕细凿的种种努力。尽管有些地方还略嫌粗糙，一些内容还有加工和改进的余地，但总的来说，这是一本颇具特色的教材。它的出版，实在是一件令人高兴的事，特为之序。

李大潜

1999年6月27日

于上海

前　　言

数学分析是数学系最重要的一门基础课，是几乎所有后继课程的基础，在培养具有良好素养的数学及其应用人才方面起着特别重要的作用。因此，数学分析教材改革成为理科大学数学系教改的一个重要环节，受到数学界的普遍关注。但究竟如何具体着手，则见仁见智，众说纷纭，目前尚难有比较一致的意见。

从60年代初开始，我校数学类系科一直沿用由陈传璋教授等编著的《数学分析》及以此为基础的几种修订版本。这套书曾获得"国家教委优秀教材一等奖"，并在兄弟院校中有较广的使用面。近年来，随着改革的深入，人们对教育不断提出新的要求，教材也应当推陈出新，跟上时代发展的步伐。1997年，复旦大学将数学分析课程立为"面向21世纪教学内容与课程体系改革"项目，并要求重新编写适应新世纪的教材。在老一代数学家和数学系领导的关心和支持下，我们依靠数学系的整体力量，集思广益，进行了总体构思，并逐渐形成以下的编写指导思想：

1. 对"数学分析"基本理论体系与阐述方式进行再思考，改革旧的体系，吸收先进的处理方法，反映当代数学的发展趋势。

诚然，从近代微积分思想的产生、发展到形成比较系统、成熟的"数学分析"课程用了大约300年，经过几代杰出数学家持续不懈的努力，精雕细凿，千锤百炼，已为其建立了严格的理论基础和逻辑体系。但是，当代科学技术(包括数学本身)发展也不断为数学的基础部分注入新的活力。所以数学分析的讲授方式也应推陈出新，同时，要注意采用现代数学的思想观点与方法，反映数学的发展趋势。

例如，在传统数学分析课程中，以导数作为"微分学"主线的做法不利于学生今后理解微分在数学分析乃至整个数学学科中的重要作用。我们重点突出了微分的地位，在导数和微分两者关系上，采取了先定义微分再引出导数的顺序。这不仅符合数学的发展历史(从而符合人类的认识规律)，也使学生先入为主，对微分的重要性有较深的印象。而在导出计算法则时，则求微分和求导数并重。以微分为工具的推导过程可使得有些概念(如高阶无穷小量、中间变量的高阶微分形式等)更易于理解和应用。

特别是在微分与积分之间关系的阐述中，我们定义求不定积分是求微分

(而不是求导数!)的逆运算,即: $F(x)(+C)\underset{\int}{\overset{\mathrm{d}}{\rightleftarrows}}F'(x)\mathrm{d}x$。这个观念上的改变为后续内容的展开带来了极大的方便。过去将求不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 定义为求导数的逆运算,其中的 $\mathrm{d}x$ 就很难解释得贴切;而将其视为求微分的逆运算,许多麻烦就会迎刃而解。这时,$\mathrm{d}x$ 是自变量的微分,因此,关于微分的所有计算法则都可以畅通无阻,从而使不定积分和定积分(包括重积分、曲线曲面积分等)中的许多概念、公式的导出和理解变得简便而自然。此外,它还使得引入微分形式的外积和外微分运算,进而导出 Green 公式、Gauss 公式和 Stokes 公式的统一形式成为一件顺理成章的事,为学生日后学习流形上的微积分打下基础。

由于当代数学科学(实际上整个科学技术领域)相互交叉融合的大趋势,从其它课程选取合适材料来充实和加强本课程,对于培养新型的通用数学人才是绝对必要的,但引入新思想和新观点并不意味着在理论上故意拔高。我们严格掌握了以下原则:*所选视角必须有助于理解数学分析本身的理论和应用问题;有利于展开数学分析本身的内容;仅限于用数学分析的基本方法和技巧来处理。*

2. 在回溯数学发展历史、强调数学与相邻学科联系的同时,加强建立数学模型的思想和训练,增加实际应用的内容,提高学生的数学素养和创新能力,使学生适应新世纪对数学人才的要求。

微积分的形成和发展直接得益于物理学、天文学、几何学等研究领域的进展和突破。在数学分析教学中,应适度回溯数学与其它学科相辅相成的发展历史和数学史上一些关键人物作出重大发现的思维轨迹,提高学生学习数学的兴趣,引导学生逐步理解数学的本质及数学研究的一般途径和规律。教材中适量介绍了微积分发展历史中与其它相关学科之间联系的一些重要背景材料,如从 Kepler 的行星运动三文定律到 Newton 的万有引力、从 Kepler 发现行星运动中切向加速度为零的现象到 Fermat 对极值的研究再到微分中值定理的形成、宇宙速度和火箭运动方程的微分导出等等。

同时,微积分是一门极具应用活力的科学。为了造就大批具有良好基础、能用数学思想、方法和工具解决各个领域中实际问题的数学工作者和其他专门人才,数学分析教学应在传授基础理论和基本技能的同时,加强学生在分析实际问题、归结实际问题为数学问题、用微积分这一有力工具去解决实际问题等方面的能力。

我们在教材中努力加强了从微积分途径建立数学模型的思想,除了单列一节"微积分实际应用举例"外,建立和求解数学模型的例子散见于全书。通

过对物理学、生物学、社会学、经济学与自然现象中许多数量变化关系的分析，建立简单的行星运动模型、引力场模型、人口模型、公共资源模型、经济问题模型等等，再配以较多的习题，力图使学生拓宽知识面，初步具有数学来自实践、用于实践的认识和实际运作的本领。

3. 数学分析教学与高速发展的计算机技术相结合。

近一二十年来，计算机的软硬件技术突飞猛进，极大地改变了人们的生活方式、思维方式和科学研究的方式。数学分析教学应当顺应潮流，反映这一发展趋势。在教材的编写中，我们对一些随着计算机和软件技术的进步而失去了往日重要性的内容（如函数作图、某些复杂的积分技巧等）作了适度删削；而对日趋重要的内容则加以强化（如近似求根、数值积分等）或增加（如插值公式、外推方法、快速 Fourier 变换等）。同时，为了真正提高学生用数学和计算机解决实际问题的综合能力，我们在与数值计算有关的章节后面设计了“计算实习题”，题目的难度适中，但不用计算机却难以解答，要求学生在教师指导下独立完成。这对提高学生的数学素养、应变能力和社会竞争力（从而提高数学本身在社会上的地位）应当大有益处。

我们还在尝试利用电子计算机和较成熟的数学软件，对数学分析的某些内容采用多媒体技术辅助教学。

4. 使内容安排趋于更合理，更简洁，更适合学生的认识规律，在保证基本教学要求的前提下，尽可能减轻学生的负担。

改革的结果应使得课程和教材更加紧凑、更加简洁而不是相反。我们对原教材中保留的内容进行了认真细致的再处理，所有的陈述和证明都力求改写得更加简洁和完美，有些证明是我们自己给出的。对于原处理方法已显陈旧与落后的部分则推倒重写，新的处理方法必须观点新、立足点高，能承上启下，有助于学生的深入理解。

为符合人的认识规律和教材编写的特殊需要，我们对某些重要或涉及范围较广的内容，采用了在后续部分（包括一些结论的证明、例题）有意识地多次重复和应用，逐步深入的处理方法，以期收到较好的教学效果。如用微分导出不同人口模型的思想和方法前后出现于三处；用途极广的 Legendre 多项式也先后出现了三次，等等。

又如，我们对 Cauchy 中值定理给出了不同于 Lagrange 中值定理证明思路的新证明，通过这一证明让学生将有关反函数的结论（反函数的定义及存在定理、连续定理、求导定理）系统地复习了一遍。

富于启迪而精到的例题与习题是一本好教材不可缺少的有机部分。我们精选了全部例题，力求使例题不仅配合所讲授的理论，更使学生从中学到分析和解决问题的方法。教材中更新了大量习题，特别是增加了许多与应用有关

的习题，力求让学生获得足够的训练。

本书的总体框架与编写大纲由编者反复讨论后确定。第 1、2、3、9、10 章由陈纪修执笔，第 4、5、6、7、8、16 章由於崇华执笔，第 11、12、13、14、15 章由金路执笔。初稿完成后，本书以讲义形式在复旦大学数学系本科生和理科基地班试用了两轮，同时在较大范围内听取了意见，再经集体多次推敲修改最后定稿。付梓前，由於崇华对教材的整体格式和行文作了统一处理，并对全书的文字进行了润色。

本教材可供全日制高等院校数学分析课程三学期使用。为了适应不同需要，我们将一些难度较大的或非基本的内容用小字排印，供教师选用。

中国科学院院士李大潜教授、复旦大学数学系学术委员会主任李训经教授自始至终关心和鼓励本书的编写工作并给予了指导性的意见；复旦大学数学系主任童裕孙教授多次参与了编者从构筑总体框架直到修改定稿过程中的讨论，提出不少建设性的意见和建议，并从行政方面为编写工作提供了切实的保障；姚允龙教授在复旦大学理科基地班试用了本教材，并提出大量有价值的意见；曹家鼎教授提供了 Korovkin 关于连续函数的多项式逼近的 Weierstrass 定理的漂亮证明；苏仰锋副教授与王彦博老师演算了本书中大部分的习题。此外，在本书的形成、定稿和出版过程中，复旦大学教务处孙莱祥研究员和方家驹研究员一直给我们以热情鼓励和帮助；复旦大学与兄弟院校的许多教师曾以各种形式向我们提出过许多颇有见地的修改意见；高等教育出版社也一如既往地支持我们的教材改革计划的最终落实。编者借本书出版之机，在此一并向他们表示衷心的谢意。

囿于学识，本书虽经实际授课试用和多次修改，错误和缺陷仍在所难免，恳请广大读者提出宝贵的批评和建议，以便今后再版时改进。

编 者

1999 年 5 月于复旦园

责任编辑　郭思旭
封面设计　张　楠
责任绘图　陈淑芳
版式设计　於崇华
责任校对　高尚华
责任印制　陈伟光

目　录

第一章 集合与映射

数学是一门研究数量关系和空间形式的科学,是一个范围广阔、分支众多、应用广泛的科学体系,是其它各门科学(包括自然科学、社会科学、管理科学与技术科学等)的基础和工具,在整个人类知识体系中占有特殊的地位.

数学起源于计数、测量和贸易等活动.17世纪以来,随着物理学、力学等学科的发展和工业技术的崛起,尤其是Newton和Leibniz发明微积分这划时代的贡献,数学迅速发展起来,到19世纪已成为天体力学、弹性力学、流体力学、热学、电磁学和统计物理中不可缺少的重要工具.20世纪以来(特别是在第二次世界大战期间),数学与自然科学和生产技术的联系达到了新的高度.

进入70年代后,随着电子计算机的迅猛发展和普及,数学理论、方法和工具更是以前所未有的广度、深度和速度进入了几乎所有的其它学科.马克思一百多年前的"一切科学,只有在成功地运用数学时,才算达到了真正完善的地步"的著名论断正在逐步成为现实.可以预见,进入21世纪以后,随着高新技术的加速发展,数学将在人类知识各个领域中愈加大显身手,在科学舞台上扮演更为令人瞩目的角色.

当今,随着学科内部高度发展交融以及与其它领域(尤其是计算机技术)间空前广泛的渗透,数学已成为一座巍峨的科学大厦.但是,万丈高楼平地起,就研究数量关系和空间形式而言,必须从变量间最本质的联系,即函数开始起步.数学分析正是讲述函数理论的最基本的课程,是几乎所有后继数学课程的奠基石,因此,它理所当然地被列为数学科学最重要的基础课之一,在培养具有良好的数学素养的人才方面,它所起的作用是任何别的课程无法相比的.

历史上,微积分的形成和发展直接得益于物理学、天文学、几何学等领域的研究,极具应用活力.因此,学习数学分析不仅要循序渐进地深刻领会已抽象出来的普遍结论,更要切实掌握用数学工具分析问题、转化问题、解决问题的思想和方法——这是开设本课的宗旨.

§1 集合

集合

面对浩瀚的大千世界,人们总要先把林林总总的客观事物按其某一方面的特性进行适当划分,再分门别类地加以研究.所谓的"物以类聚"在某种程度上反映出了人类普遍的思维模式,在各个领域中被广泛使用的**集合**的概念正是这一原则最基本的体现.

集合在数学领域更是具有无可比拟的特殊重要性.集合论的基础是由德

国数学家 Cantor 在 19 世纪 70 年代奠定的，经过一大批卓越的数学家半个世纪的努力，到本世纪 20 年代已确立了其在现代数学理论体系中的基础地位，可以说，当今数学各个分支的几乎所有结果都构筑在严格的集合理论上. 所以，学习现代数学，应该由集合入手. 但集合论是一门深奥的理论，需要有专门的课程来讲述，我们下面谈的只是数学分析课程要涉及的有关集合的一些基本概念和问题.

集合又称集，是指具有某种特定性质的具体的或抽象的对象汇集成的总体，这些对象称为该集合的**元素**. 我们通常用大写字母如 $A,B,S,T,\cdots$ 表示集合，而用小写字母如 $a,b,x,y,\cdots$ 表示集合的元素.

若 x 是集合 S 的元素，则称 x 属于 S，记为 $x\in S$. 若 y 不是集合 S 的元素，则称 y 不属于 S，记为 $y\overline{\in}S$.

全体正整数的集合，全体整数的集合，全体有理数的集合，全体实数的集合是我们常用的集合，习惯上分别用字母 $\mathbf{N}^+$，$\mathbf{Z}$，$\mathbf{Q}$ 和 $\mathbf{R}$ 来表示.[①]

表示集合的方式通常有两种. 一种是**枚举法**，就是将集合的元素逐一列举出来的方式. 例如，光学中的三基色可以用集合

$$\{红,绿,蓝\}$$

表示，由 a,b,c,d 四个字母组成的集合 A 可用

$$A=\{a,b,c,d\}$$

表示，如此等等.

枚举法还包括尽管集合的元素无法一一列举，但可以将它们的变化规律表示出来的情况. 如正整数集 $\mathbf{N}^+$ 和整数集 $\mathbf{Z}$ 可以分别表示为

$$\mathbf{N}^+=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$$

和

$$\mathbf{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots,\pm n,\cdots\}.$$

另一种表示集合的方式是**描述法**. 设集合 S 是由具有某种性质 P 的元素全体所构成的，则可以采用描述集合中元素公共属性

$$S=\{x\mid x\ 具有性质\ P\}$$

的方法来表示集合. 例如，由 2 的平方根组成的集合 B 可表示为

$$B=\{x\mid x^2=2\},$$

而有理数集 $\mathbf{Q}$ 和正实数集 $\mathbf{R}^+$ 则可以分别表示为

$$\mathbf{Q}=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{q}{p},\text{其中 } p\in\mathbf{N}^+ \text{ 并且 } q\in\boldsymbol{Z}\right\}$$

和

---

① 在国家标准中规定，自然数的集合 $\{0,1,2,\cdots\}$ 用 $\mathbf{N}$ 表示，这里 $\mathbf{N}^+$ 表示正整数的集合.

$$\mathbf{R}^+ = \{x \mid x \in \mathbf{R} \quad 并且\ x > 0\}.$$

要注意的是,集合中的元素之间并没有次序关系,也就是说,在集合的表示中,同一元素的重复出现不具有任何特殊意义.例如,$\{a,b\}$、$\{b,a\}$和$\{a,b,a\}$表示的是同一个集合.

有一类特殊的集合,它不包含任何元素,如$\{x \mid x\in\mathbf{R}$ 并且 $x^2+1=0\}$,我们称之为**空集**,记为$\varnothing$.要注意,空集并不由于其内部空空如也而失去存在价值,如在集合{红,绿,蓝}中选取某些基色进行配色,三种基色都不选显然也同样是一种重要的配色方案,所以,空集具有很实际的意义.

设 S,T 是两个集合,如果 S 的所有元集都属于T,即

$$x \in S \Rightarrow x \in T,$$

(其中符号"$\Rightarrow$"称为"蕴含",即表示由左边的命题可以推出右边的命题),则称 S 是 T 的**子集**,记为 $S\subset T$(或 $T\supset S$).例如,对于正整数集 $\mathbf{N}^+$,整数集 $\mathbf{Z}$,有理数集 $\mathbf{Q}$ 与实数集 $\mathbf{R}$,成立

$$\mathbf{N}^+\subset \mathbf{Z}\subset \mathbf{Q}\subset \mathbf{R}.$$

显然,对任何集合 S,都有 $S\subset S$ 与$\varnothing\subset S$.

如果 S 中至少存在一个元素x 不属于T,即 $x\in S$ 但$x\overline{\in} T$,那么 S 不是 T 的子集,记为 $S\not\subset T$.如

$$\{x \mid x^2-1=0\}\not\subset \mathbf{N}^+.$$

例 1.1.1 设 $T=\{a,b,c\}$,则 T 有如下 2^3 个子集:

$\varnothing$;

$\{a\},\{b\},\{c\}$;

$\{a,b\},\{b,c\},\{c,a\}$;

$\{a,b,c\}$.

容易证明,由 n 个元素组成的集合 $T=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$共有 2^n 个子集.

如果 S 是 T 的一个子集,即 $S\subset T$,但在 T 中存在一个元素 x 不属于S,即 $T\not\subset S$,则称 S 是T 的一个**真子集**.在上面所举的集合 $T=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 的 2^n 个子集中,有 2^n-1 个是真子集.

如果两个集合 S 与 T 的元素完全相同,则称 S 与 T 两集合相等,记为 $S=T$.显然我们有

$$S = T \Leftrightarrow S\subset T\ 并且\ T\subset S,$$

其中符号"$\Leftrightarrow$"称为"当且仅当",表示左边的命题与右边的命题相互"蕴含",即两个命题"等价".

在数学分析课程中,最常遇到的实数集的子集是区间:

设 $a,b(a<b)$是两个实数,则满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数x 的集合称为以a,b 为端点的**开区间**,记为

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b\};$$

满足不等式 $a \leqslant x \leqslant b$ 的所有实数 x 的集合称为以 a,b 为端点的**闭区间**,记为

$$[a,b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\};$$

满足不等式 $a<x \leqslant b$ 或 $a \leqslant x<b$ 的所有实数 x 的集合称为以 a,b 为端点的**半开半闭区间**,记为

$$(a,b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}$$

或

$$[a,b)=\{x \mid a \leqslant x<b\}.$$

上述几类区间的长度是有限的,称为**有限区间**。除此以外,还有下述几类**无限区间**:

$$(a,+\infty)=\{x \mid x>a\},$$

$$[a,+\infty)=\{x \mid x \geqslant a\},$$

$$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\},$$

$$(-\infty,b]=\{x \mid x \leqslant b\}$$

和

$$(-\infty,+\infty)=\{x \mid x \text{ 为任意实数}\}(\text{即实数集 } \mathbf{R}).$$

集合运算

集合的基本运算有并、交、差、补四种(图 1.1.1).

两个集合 S 和 T 的**并**是由 S 和 T 的元素汇集成的集合,记为 $S \cup T$,即:

$$S \cup T=\{x \mid x \in S \text{ 或者 } x \in T\}.$$

两个集合 S 和 T 的**交**是由 S 和 T 的公共元素组成的集合,记为 $S \cap T$,即:

$$S \cap T=\{x \mid x \in S \text{ 并且 } x \in T\}.$$

例如,设 $S=\{a,b,c\}$,$T=\{b,c,d,e\}$,则

$$S \cup T=\{a,b,c,d,e\},$$

$$S \cap T=\{b,c\}.$$

集合的并与交运算具有下列一些性质:

1.交换律 $A\cup B=B\cup A$,

$A\cap B=B\cap A$.

2.结合律 $A\cup(B\cup D)=(A\cup B)\cup D$,

$A\cap(B\cap D)=(A\cap B)\cap D$.

3.分配律 $A\cap(B\cup D)=(A\cap B)\cup(A\cap D)$,

$A\cup(B\cap D)=(A\cup B)\cap(A\cup D)$,

作为一个例子,我们证明

$$A\cup(B\cap D)=(A\cup B)\cap(A\cup D).$$

第一步,证明 $A\cup(B\cap D)\subset(A\cup B)\cap(A\cup D)$.

设 $x\in A\cup(B\cap D)$,按照并的定义,或者 $x\in A$,或者 $x\in B\cap D$;再按照交的定义即为:或者 $x\in A$,或者 $x\in B$ 并且 $x\in D$.所以,不管怎么样,总有 $x\in A\cup B$ 并且 $x\in A\cup D$,即 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup D)$.于是

$$x\in A\cup(B\cap D)\Rightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup D).$$

第二步,证明 $(A\cup B)\cap(A\cup D)\subset A\cup(B\cap D)$.

设 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup D)$,按照交的定义,$x\in A\cup B$ 并且 $x\in A\cup D$;再按照并的定义,或者 $x\in A$,或者 $x\in B$ 并且 $x\in D$,即 $x\in A\cup(B\cap D)$.于是

$$x\in(A\cup B)\cap(A\cup D)\Rightarrow x\in A\cup(B\cap D).$$

将上述两步结合起来,就得到结论

$$A\cup(B\cap D)=(A\cup B)\cap(A\cup D).$$

两个集合 S 和 T 的差是由属于 S 但不属于 T 的元素组成的集合,记为 $S\setminus T$(注意这里并不要求 $T\subset S$),即

$$S\setminus T=\{x\mid x\in S\text{ 并且 }x\overline{\in}T\}.$$

例如

$$\{a,b,c\}\setminus\{b,c,d,e\}=\{a\},$$

$$\{x\mid x<1\}\setminus\{x\mid x>0\}=\{x\mid x\leqslant 0\}.$$

假设我们在集合 X 中讨论某一问题,S 是 X 的一个子集,则集合 S 关于 X 的补集 S_X^C 定义为

$$S_X^C=X\setminus S$$

例如偶数集 E 关于整数集 $\mathbf{Z}$ 的补集为奇数集 F;有理数集 $\mathbf{Q}$ 关于实数集 $\mathbf{R}$ 的补集为无理数集.

关于补集显然成立

$$S\cup S_X^C=X,\qquad S\cap S_X^C=\varnothing,$$

在不会发生混淆的前提下,通常将 S_X^C 简记为 S^C.

容易知道,集合补与差运算满足关系

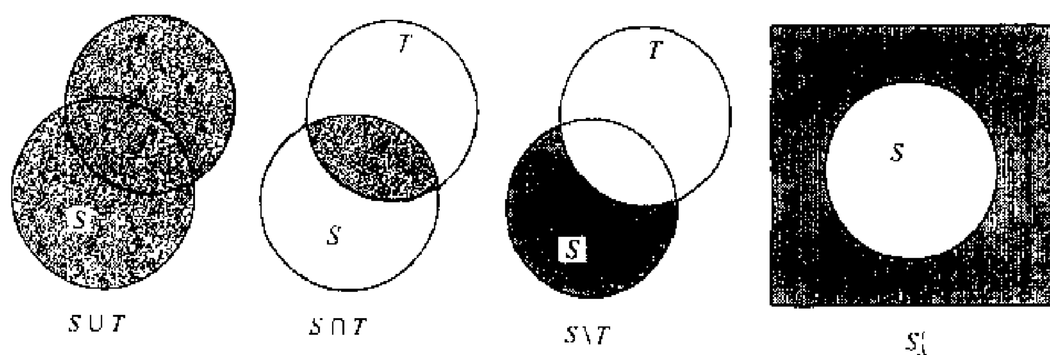


图 1.1.1

$$S \setminus T = S \cap T^C.$$

集合补的运算具有性质

4. 对偶律(**De Morgan 公式**)　　$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$,

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C.$$

我们证明第二个公式.

先设 $x \in (A \cap B)^C$,按照补的定义,有 $x \overline{\in} A \cap B$. 此式等价于或者 $x \overline{\in} A$,或者 $x \overline{\in} B$,于是得到 $x \in A^C \cup B^C$,即

$$x \in (A \cap B)^C \Rightarrow x \in A^C \cup B^C.$$

反过来,设 $x \in A^C \cup B^C$,按照并的定义,或者 $x \in A^C$,或者 $x \in B^C$. 换言之,或者 $x \overline{\in} A$,或者 $x \overline{\in} B$,于是得到 $x \overline{\in} A \cap B$,即

$$x \in A^C \cup B^C \Rightarrow x \in (A \cap B)^C.$$

将上述两方面结合起来,就得到结论

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C.$$

有限集与无限集

若集合 S 由有限个元素组成,则称集合 S 为**有限集**,如{红,绿,蓝}、$\{a, b, c, d\}$ 和 $\{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$ 都是有限集.

不是有限集的集合称为**无限集**,前面说的 **N**,**Z**,**Q**,**R** 都是无限集.

如果一个无限集中的元素可以按某种规律排成一个序列,或者说,这个集合可表示为

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\},$$

则称其为**可列集**. 例如,正整数集 $\mathbf{N}^+$,$\{x \mid \sin x = 0\}$ 都是可列集.

容易证明,每个无限集必包含可列子集. 但是,无限集并非就一定是可列集.(在§2.4,我们将证明实数集 **R** 不是可列集.)

显然,要证明一个无限集是可列集,关键在于设计出一种排列的规则,使集合中所有元素可以按此规则,既无重复也无遗漏地排成一列.

例 1.1.2 整数集 $\mathbf{Z}$ 是可列集.

解 因为整数全体可以按规则

$$0,1,-1,2,-2,\cdots,n,-n,\cdots$$

排成一列,由定义,即知整数集是可列集.

将整数全体排成一列的方法是多种多样的,这只是其中的一种.

设 $A_n(n=1,2,3,\cdots)$是无限可列个集合,其中每个集合 A_n 都是可列集,定义它们的并为

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots = \{x \mid 存在 n \in \mathbf{N}^+, 使 x \in A_n\},$$

那么可以证明,$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 也是可列集.

定理 1.1.1 可列个可列集之并也是可列集.

证 对任意 $n\in\mathbf{N}^+$,设 A_n 可表示为

$$A_n = \{x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \cdots x_{nk}, \cdots\},$$

则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 的元素全体可排成如下的无穷方块阵:

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_{11} & & x_{12} & & x_{13} & & x_{14} & & \cdots \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
x_{21} & & x_{22} & & x_{23} & & x_{24} & & \cdots \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
x_{31} & & x_{32} & & x_{33} & & x_{34} & & \cdots \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
x_{41} & & x_{42} & & x_{43} & & x_{44} & & \cdots \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots
\end{array}$$

把所有这些元素排成一列的规则可以有许多,常用的一种称为**对角线法则**:从最左面开始,顺着逐条"对角线"(图中箭头所示)将元素按从右上至左下的次序排列,也就是把所有的元素排列成

$$x_{11},\quad x_{12},\quad x_{21},\quad x_{13},\quad x_{22},\quad x_{31},\quad x_{14},\quad x_{23},\quad x_{32},\quad x_{41},\quad \cdots,$$

这样的规则保证了不会遗漏一个元素.

由于不同集合 A_i 与 $A_j(i\neq j)$的交可能不是空集,因此有些元素可能会在排列中多次出现,我们对此只保留一个而去掉多余的,这样得到的排列仍然

表示集合$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$,从而定理得到证明.

证毕

定理 1.1.2 有理数集 $\mathbf{Q}$ 是可列集.

证 由于区间$(-\infty,+\infty)$可以表示为可列个区间$(n,n+1]$($n\in\mathbf{Z}$)的并,我们只须证明区间$(0,1]$中的有理数是可列集即可.

由于区间$(0,1]$中的有理数可唯一地表示为既约分数$\frac{q}{p}$,其中 $p\in\mathbf{N}^+$, $q\in\mathbf{N}$, $q\leqslant p$,并且 p,q 互质. 我们按下列方式排列这些有理数:

分母 $p=1$ 的既约分数只有一个: $x_{11}=1$;

分母 $p=2$ 的既约分数也只有一个: $x_{21}=\frac{1}{2}$;

分母 $p=3$ 的既约分数有两个: $x_{31}=\frac{1}{3}$, $x_{32}=\frac{2}{3}$;

分母 $p=4$ 的既约分数也只有两个: $x_{41}=\frac{1}{4}$, $x_{42}=\frac{3}{4}$;

……,

一般地,分母 $p=n$ 的既约分数至多不超过 $n-1$ 个,可将它们记为 $x_{n1}, x_{n2}, \cdots, x_{n\,k(n)}$,其中 $k(n)\leqslant n-1$.

于是区间$(0,1]$中的有理数全体可以排成

$$x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{32}, x_{41}, x_{42}, \cdots, x_{n1}, x_{n2}, \cdots, x_{n\,k(n)}, \cdots.$$

这就证明了有理数集 $\mathbf{Q}$ 是可列集.

证毕

Descartes 乘积集合

设 A 与 B 是两个集合. 在集合 A 中任意取一个元素 x,在集合 B 中任意取一个元素 y,组成一个有序对(x,y). 把这样的有序对作为新的元素,它们全体组成的集合称为集合 A 与集合 B 的 **Descartes 乘积集合**,记为 $A\times B$,即

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A \text{ 并且 } y\in B\}.$$

集合 A 与集合 B 可以相同也可以不相同,甚至其元素可以是完全不同类型的.

比如说,有一家生产窗帘的厂,所用的面料颜色有红、绿、蓝三种,所用的工艺有抽纱、提花、印染、刺绣等四种. 若用

$$A=\{\text{红},\text{绿},\text{蓝}\}$$

表示面料颜色的集合,

$$B=\{\text{抽纱},\text{提花},\text{印染},\text{刺绣}\}$$

表示加工工艺的集合,那么它们的 Descartes 乘积集合

$$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \text{ 并且 } y \in B\}$$

表示的是该厂生产的所有的窗帘品种.集合 $A \times B$ 中共有 12 个元素,如(红,提花)、(蓝,印染)、(绿,抽纱)等,每个元素均表示该厂所生产的窗帘品种之一.

特别地,当 A 与 B 都是实数集 $\mathbf{R}$ 时,$\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 表示的是平面 Descartes 直角坐标系(这也是"Descartes 乘积集合"一词的来历),记作 $\mathbf{R}^2$. 平面上任意一点 p 的坐标可以用有序实数对(x,y)表示,其中 x 和 y 分别为 p 点在横轴和纵轴上的投影坐标.反过来,任意一个实数对(x,y)也都能通过坐标的方式找到平面上唯一的对应点,这正是我们熟知的平面解析几何的理论基础.

读者不难举一反三地推出由更多个集合构成 Descartes 乘积集合的情况.作为一个特例,容易知道 $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 表示的是空间 Descartes 直角坐标系,记作 $\mathbf{R}^3$.

例 1.1.3 设

$$A = \{x \mid x \in \mathbf{R} \text{ 并且 } a \leqslant x \leqslant b\},$$
$$B = \{y \mid y \in \mathbf{R} \text{ 并且 } c \leqslant y \leqslant d\},$$
$$C = \{z \mid z \in \mathbf{R} \text{ 并且 } e \leqslant z \leqslant f\},$$

则 $A \times B$ 就表示 xy - 平面上一个闭矩形,而 $A \times B \times C$ 表示 xyz - 空间中的一个闭长方体(图 1.1.2).

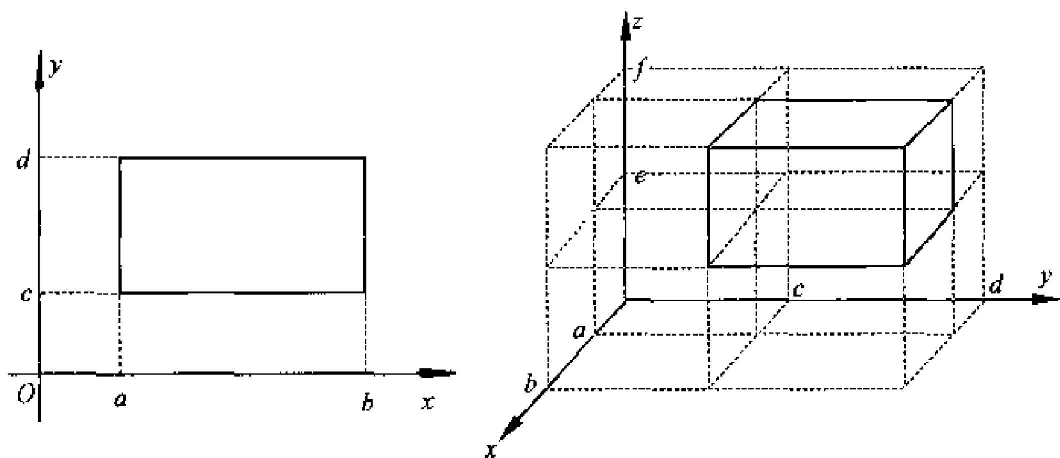


图 1.1.2

习 题

1. 证明:由 n 个元素组成的集合 $T = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 有 2^n 个子集.

2. 证明：

(1)任意无限集必包含一个可列子集；

(2)设 A 与 B 都是可列集，证明 $A\cup B$ 也是可列集.

3. 指出下列表述中的错误：

(1) $\{0\}=\varnothing$；

(2) $a\subset\{a,b,c\}$；

(3) $\{a,b\}\in\{a,b,c\}$；

(4) $\{a,b,\{a,b\}\}=\{a,b\}$.

4. 用集合符号表示下列数集：

(1)满足 $\frac{x-3}{x+2}\leqslant 0$ 的实数全体；

(2)平面上第一象限的点的全体；

(3)大于 0 并且小于 1 的有理数全体；

(4)方程 $\sin x\cot x=0$ 的实数解全体.

5. 证明下列集合等式：

(1) $A\cap(B\cup D)=(A\cap B)\cup(A\cap D)$；

(2) $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$.

6. 举例说明集合运算不满足消去律：

(1) $A\cup B=A\cup C\ \not\Rightarrow\ B=C$；

(2) $A\cap B=A\cap C\ \not\Rightarrow\ B=C$.

其中符号“$\not\Rightarrow$”表示左边的命题不能推出右边的命题.

7. 下述命题是否正确？不正确的话，请改正.

(1) $x\overline{\in}A\cap B\Leftrightarrow x\overline{\in}A$ 并且 $x\overline{\in}B$；

(2) $x\overline{\in}A\cup B\Leftrightarrow x\overline{\in}A$ 或者 $x\overline{\in}B$.

§2 映射与函数

映射

映射是指两个集合之间的一种对应关系.

定义 1.2.1 设 X,Y 是两个给定的集合，若按照某种规则 f，使得对集合 X 中的每一个元素 x，都可以找到集合 Y 中唯一确定的元素 y 与之对应，则称这个对应规则 f 是集合 X 到集合 Y 的一个**映射**，记为

$$f:\quad X\longrightarrow Y$$
$$x\longmapsto y=f(x).$$

其中 y 称为在映射 f 之下 x 的**象**，x 称为在映射 f 之下 y 的一个**逆象**(也称为**原象**). 集合 X 称为映射 f 的**定义域**，记为 $D_f=X$. 而在映射 f 之下，X 中元

素 x 的象 y 的全体称为映射 f 的**值域**，记为 R_f：

$$R_f = \{y \mid y \in Y \text{ 并且 } y = f(x), x \in X\}.$$

例 1.2.1 设 X 是平面上所有三角形的全体，Y 是平面上所有圆的全体.因每个三角形都有唯一确定的外接圆，若定义对应规则

$$f: \quad X \longrightarrow Y$$
$$x \longmapsto y(y \text{ 是三角形 } x \text{ 的外接圆}),$$

则 f 显然是一个映射，其定义域与值域分别为 $D_f = X$ 和 $R_f = Y$.

例 1.2.2 记 $X = \{\alpha, \beta, \gamma\}$，$Y = \{a, b, c, d\}$，下面所规定的对应关系 f 显然也是一个映射：

$$f(\alpha) = a, \quad f(\beta) = d, \quad f(\gamma) = b.$$

f 的定义域与值域分别为

$$D_f = X = \{\alpha, \beta, \gamma\}, \quad R_f = \{a, b, d\} \subset Y.$$

在这个例子中，R_f 是 Y 的真子集.

概括起来，构成一个映射必须具备下列三个基本要素：

(1)集合 X，即定义域 $D_f = X$；

(2)集合 Y，即限制值域的范围：$R_f \subset Y$；

(3)对应规则 f，使每一个 $x \in X$，有唯一确定的 $y = f(x)$ 与之对应.

需要指出两点：

1.映射要求元素的象必须是唯一的.

例如，设 $X = \mathbf{R}^+$，$Y = \mathbf{R}$，而对应规则要求对每一个 $x \in \mathbf{R}^+$，它的象 $y \in \mathbf{R}$ 且满足关系 $y^2 = x$，这样的 f 是不是映射呢？回答是否定的.因为对每个 $x \neq 0$，都可以有两个实数 $y_1 = \sqrt{x}$ 与 $y_2 = -\sqrt{x}$ 与之对应，即 f 不满足象的唯一性要求.

对于不满足象的唯一性要求的对应规则，一般只要对值域范围稍加限制，就能使它成为映射.

例 1.2.3 设 $X = \mathbf{R}^+$，$Y = \mathbf{R}^- = \{x \mid -x \in \mathbf{R}^+\}$，则对应关系

$$f: \quad X \longrightarrow Y$$
$$x \longmapsto y \ (y^2 = x)$$

是一个映射.

2.映射并不要求逆象也具有唯一性.

例 1.2.4 设 $X = Y = \mathbf{R}$

$$f: \quad X \longrightarrow Y$$
$$x \longmapsto y = x^2.$$

虽然 Y 中与 $x=2$ 和 $x=-2$ 对应的元素都是 $y=4$，但这并不影响 f 成为一个映射.

定义 1.2.2　设 f 是集合 X 到集合 Y 的一个映射，若 f 的逆象也具有唯一性，即对 X 中的任意两个不同元素 $x_1\neq x_1$，它们的象 y_1 与 y_2 也满足 $y_1\neq y_2$，则称 f 为**单射**；如果映射 f 满足 $R_f=Y$，则称 f 为**满射**；如果映射 f 既是单射，又是满射，则称 f 为**双射**(又称**一一对应**).

上面例 1.2.2 与例 1.2.3 中的映射是单射，例 1.2.1 与例 1.2.3 中的映射是满射，因而例 1.2.3 中的映射是双射.

设 $f:X\longrightarrow Y$ 是单射，则由定义 1.2.2，对任一 $y\in R_f\subset Y$，它的逆象 $x\in X$(即满足方程 $f(x)=y$ 的 x)是唯一确定的. 由定义 1.2.1，对应关系

$$\begin{aligned} g:\quad & R_f\longrightarrow X \\ & y\longmapsto x(f(x)=y) \end{aligned}$$

构成了 R_f 到 X 上的一个映射，我们把它称为 f 的**逆映射**，记为 f^{-1}，其定义域为 $D_{f^{-1}}=R_f$，值域为 $R_{f^{-1}}=X$.

显然，只要逆映射 f^{-1} 存在，它就一定是 R_f 到 X 上的双射.

现设有如下两个映射

$$\begin{aligned} g:\quad & X\longrightarrow U_1 \\ & x\longmapsto u=g(x) \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} f:\quad & U_2\longrightarrow Y \\ & u\longmapsto y=f(u), \end{aligned}$$

如果 $R_g\subset U_2=D_f$，那就可以构造出一个新的对应关系

$$\begin{aligned} f\circ g:\quad & X\longrightarrow Y \\ & x\longmapsto y=f(g(x)), \end{aligned}$$

由定义 1.2.1，这还是一个映射，我们将之称为 f 和 g 的**复合映射**.

可以看出，复合映射 $f\circ g$ 的构成，实质上是引入了中间变量 u，因此关键在于 $R_g\subset D_f$ 是否成立. 如果这一条件得不到满足，就不能构成复合映射.

例 1.2.5　设 $X=Y=U_1=U_2=\mathbf{R}$，映射 g 与 f 为：

$$\begin{aligned} g:\quad & X\longrightarrow U_1 \\ & x\longmapsto u=\sin x \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} f:\quad & U_2\longrightarrow Y \\ & u\longmapsto y=\frac{u}{1+u^2}. \end{aligned}$$

显然 $R_g=[-1,1]\subset D_f$,因此可以构成复合映射

$$f\circ g:\quad X\longrightarrow Y$$
$$x\longmapsto y=f(g(x))=\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}.$$

例 1.2.6 设映射 g 与 f 为

$$g:\quad \mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$$
$$x\longmapsto u=1-x^2$$

和

$$f:\quad \mathbf{R}^+\longrightarrow\mathbf{R}$$
$$u\longmapsto y=\ln u.$$

则 $R_g=(-\infty,1]\not\subset D_f$,因此不能构成复合映射 $f\circ g$.

但若将映射 g 的定义域缩小,就有可能构成复合映射。比如令

$$g^*:X=(-1,1)\longrightarrow\mathbf{R}$$
$$x\longmapsto u=1-x^2$$

和

$$f:\quad \mathbf{R}^+\longrightarrow\mathbf{R}$$
$$u\longmapsto y=\ln u.$$

则 $R_{g^*}=(0,1]\subset D_f$,于是可以构成复合映射

$$f\circ g^*:\quad X=(-1,1)\longrightarrow\mathbf{R}$$
$$x\longmapsto y=\ln(1-x^2).$$

要注意,映射 f 和 g 的复合是有顺序的.这就是说,$f\circ g$ 有意义并不意味 $g\circ f$ 也一定有意义,即使都有意义,即 $R_g\subset D_f$ 与 $R_f\subset D_g$ 都满足,复合映射 $f\circ g$ 与 $g\circ f$ 一般来讲也是不同的.

特别地,若将映射 f 与它的逆映射 f^{-1} 进行复合,则得到下述两恒等式:

$$f\circ f^{-1}(y)=y,\quad y\in R_f;$$
$$f^{-1}\circ f(x)=x,\quad x\in X.$$

例 1.2.7 $y=\sin x:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$ 是双射,它的逆映射是

$$x=\arcsin y:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

通过复合运算,可得到恒等式

$$\sin(\arcsin y)=y,\quad y\in[-1,1];$$
$$\arcsin(\sin x)=x,\quad x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

一元实函数

若在定义 1.2.1 中特殊地取集合 $X\subset\mathbf{R}$,集合 $Y=\mathbf{R}$,则映射

$$f:\quad X\longrightarrow Y$$
$$x\longmapsto y=f(x)$$

称为**一元实函数**,简称**函数**.由于函数表示的必是实数集合与实数集合之间的对应关系,所以在其映射表示中,第一行是不需要的,只要写成

$$y=f(x),x\in X(=D_f)$$

就可以了,读作"函数 $y=f(x)$"或"函数 f".这里 f 表示一种对应规则,对于每一个 $x\in D_f$,它确定了唯一的 $y=f(x)\in\mathbf{R}$ 与 x 相对应.

例如,我们将一块边长为 a 的正方形铁皮,在四个角上各剪去一个边长为 x 的小正方形,做成一个无盖的方盒(如图 1.2.1),显然方盒的容积为 $V=x(a-2x)^2$,其中 x 的变化范围是$\left(0,\frac{a}{2}\right)$.

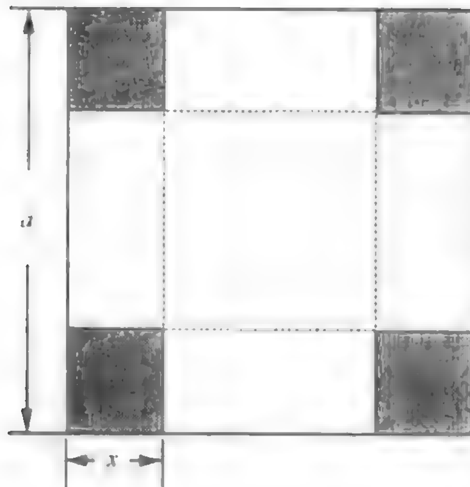


图 1.2.1

分析一下对应关系 $V=x(a-2x)^2$,其中变量 x 是主动变化的,我们称它为**自变量**.随着 x 的变化,容积 V 随之发生变化,我们称它为**因变量**.当自变量在定义域 $D_f=\left(0,\frac{a}{2}\right)$中取任一数值时,因变量相应有唯一确定的数值.因变量对于自变量的这种依赖关系就叫作**函数关系**.

在观察自然现象和分析社会活动时,可以发现存在着许许多多的变量,它们在一定的约束关系制约下千变万化.这里给出的一元实函数是只含有一个自变量与一个因变量的函数关系,以后会进一步讨论多元函数(含有多个自变量的函数关系)与向量值函数(含有多个因变量的函数关系).

初等函数

我们对下面5类函数已经很熟悉了:

幂函数: $y=x^{\alpha}$($\alpha\in\mathbf{R}$,常数函数 $y=C$ 可以看成它的特例),

指数函数: $y=a^{x}$($a>0$ 且 $a\neq1$),

对数函数: $y=\log_a x$($a>0$ 且 $a\neq1$,特别,当 $a=e=2.71828\cdots$时,记为 $y=\ln x$),

三角函数: 如 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x$ 等,

反三角函数: 如 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x$ 等,

这5类函数统称为**基本初等函数**.

由基本初等函数经过有限次四则运算与复合运算所产生的函数称为**初等函数**. 例如 $y=ax^2+bx+c$, $y=\dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x^2+1}}$, $y=\sin\dfrac{1}{x}+\cos^2 x$, $y=e^{-x^2}+\arctan\dfrac{1}{x}$等等都是初等函数.

初等函数的**自然定义域**是指它的自变量的最大取值范围. 例如 x^n(n 是自然数), $\sin x$, $\arctan x$, a^x($a>0, a\neq1$)等函数的自然定义域都是 $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$; $\log_a x$($a>0, a\neq1$)的自然定义域是 $\mathbf{R}^+=(0,+\infty)$; $\arcsin x$ 的自然定义域是$[-1,1]$; x^{α} 的自然定义域则要视 α 而定,例如: $x^{\frac{1}{3}}$的自然定义域是 $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$; $x^{-\frac{1}{3}}$的自然定义域是 $\mathbf{R}\setminus\{0\}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$; $x^{\frac{3}{2}}$的自然定义域是$[0,+\infty)$; $x^{-\frac{1}{4}}$的自然定义域是 $\mathbf{R}^+=(0,+\infty)$等等.

一般说来,给出一个函数 $f(x)$的具体表达式的同时应该指出它的定义域,否则即表示默认该函数的自然定义域为其定义域.

例 1.2.8 求下列初等函数的自然定义域与值域.

(1) $y=x+\dfrac{1}{x}$, (2) $y=\arcsin\dfrac{2x-1}{3}$,

(3) $y=\sqrt{3+2x-x^2}$, (4) $y=\ln\dfrac{x-2}{x^2-3x-4}$.

解 (1) $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, $R=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$.

(2) $D=[-1,2]$, $R=\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

(3) $D=[-1,3]$, $R=[0,2]$.

(4) $D=(-1,2)\cup(4,+\infty)$, $R=(-\infty,+\infty)$.

需要指出,即使两个函数关系看上去完全相同,也不一定能说这两个函数就是等同的,因为它们的定义域可能不相同. 如函数 $f(x)=\sin x$ 与 $g(x)=\dfrac{x\sin x}{x}$,因为 $D_f=(-\infty,+\infty)$而 $D_g=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,所以它们表示

的是不同的函数.

当两个函数不仅函数关系相同,而且定义域也相同时(于是它们的值域必然相同),它们表示的是相同的函数,至于此时自变量与因变量采用什么符号倒是无关紧要的. 例如 $y=\sin x, x\in(-\infty,+\infty)$ 与 $u=\sin v, v\in(-\infty,+\infty)$ 表示的是同一个函数.

函数的分段表示,隐式表示与参数表示

设 A,B 是两个互不相交的实数集合,$\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 是分别定义在集合 A 和集合 B 上的函数,则

$$f(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\in A,\\ \psi(x), & x\in B\end{cases}$$

是定义在集合 $A\cup B$ 上的函数. 这样的表示方法称为**函数的分段表示**. 这里函数 f 是分成两段来表示的,事实上,分段表示可以分成任意有限段,甚至无限多段.

例 1.2.9 设一辆汽车从甲城驶往乙城. 先从出发地驶到高速公路,车速 45km/h,花了 40 分钟. 然后在高速公路上以 100km/h 的速度行驶了 1 小时 45 分钟. 最后从高速公路出口行驶到乙城的目的地,车速 40km/h,花了 30 分钟. 求汽车行驶的路程(单位:km)与行驶时间(单位:h(小时))之间的函数关系.

解

$$s(t)=\begin{cases}45t, & 0\leqslant t<\dfrac{2}{3},\\ 30+100\left(t-\dfrac{2}{3}\right), & \dfrac{2}{3}\leqslant t<2\dfrac{5}{12},\\ 205+40\left(t-2\dfrac{5}{12}\right), & 2\dfrac{5}{12}\leqslant t\leqslant 2\dfrac{11}{12}.\end{cases}$$

下面我们介绍几个常用的分段表示函数.

例 1.2.10 符号函数 $\operatorname{sgn} x$(图 1.2.2):

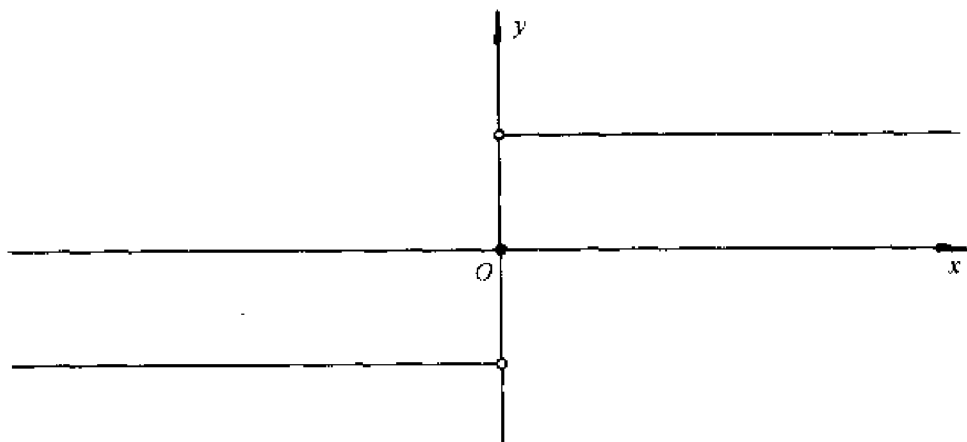


图 1.2.2

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

它的定义域是 $D=(-\infty,+\infty)$，值域是 $R=\{-1,0,1\}$.

例 1.2.11 "整数部分"函数(图 1.2.3)：

$$y=[x]=n,\quad n\leqslant x<n+1, n\in\mathbf{Z}.$$

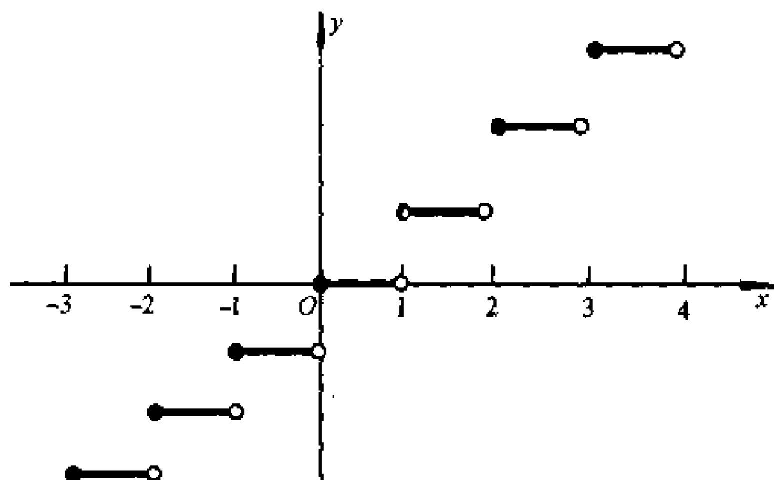


图 1.2.3

它的定义域是 $D=(-\infty,+\infty)$，值域是 $R=\mathbf{Z}$.

例 1.2.12 "非负小数部分"函数(图 1.2.4)：

$$y=(x)=x-[x],\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

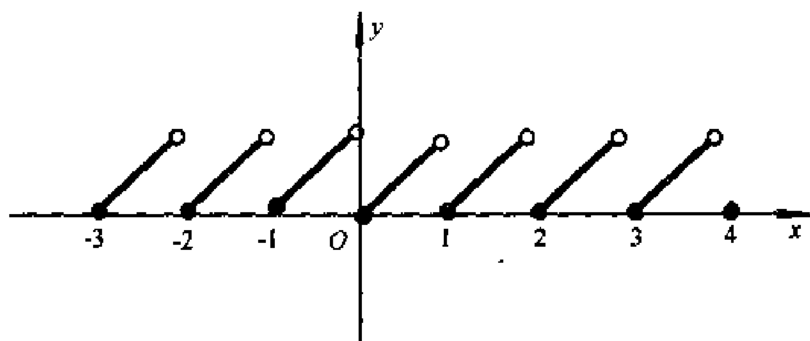


图 1.2.4

它的定义域是 $D=(-\infty,+\infty)$，值域是 $R=[0,1)$.

根据上面的定义，如对 $x=3.4$，有 $[x]=3$，$(x)=0.4$；对 $x=-2.7$，有 $[x]=-3$，$(x)=0.3$ 等等. 显然，对于任意实数 x，成立等式 $[x]+(x)=x$.

前面所举例子的共同特点是函数形式均为 $y=f(x)$，即因变量 y 单独放在等式的一边，而等式的另一边是只含有自变量 x 的表达式，这称为**函数的显式表示**．而所谓函数的**隐式表示**，是指通过方程 $F(x,y)=0$ 来确定变量 y 与 x 之间函数关系的方式，这也是一种重要的函数表示形式．

例 1.2.13 圆的标准方程 $x^2+y^2=R^2$ 反映了变量 x 与 y 之间的特定关系．由于当 $x\in(-R,R)$ 时，对应的 y 不是唯一确定的，所以从整体来讲，变量 y 还不能说是变量 x 的函数．

但在一定的条件下，如要求 $y\geqslant 0$（或 $y\leqslant 0$），即只考虑上半圆周（或下半圆周）时，变量 y 就是变量 x 的函数了，且可显式表示为 $y=\sqrt{R^2-x^2}$，$x\in[-R,R]$（或 $y=-\sqrt{R^2-x^2}$，$x\in[-R,R]$）．此时 $x^2+y^2=R^2$，$y\geqslant 0$（或 $y\leqslant 0$）就是它的隐式表示形式．

例 1.2.14 天体力学中著名的 **Kepler 方程**：

$$y = x+\varepsilon\sin y.$$

其中 $\varepsilon\in(0,1)$ 是一个常数，也反映了变量 x 与 y 之间的特定关系，以后我们会知道，y 确实是 x 的函数，因此 Kepler 方程就是这一函数关系的隐式表示形式．

在表示变量 x 与 y 的函数关系时，我们常常需要引入第三个变量（例如参数 t），通过建立 t 与 x、t 与 y 之间的函数关系，间接地确定 x 与 y 之间的函数关系，即

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t\in[a,b].$$

这种方法称为**函数的参数表示**．

设 $X=\{x\mid x=x(t),\ t\in[a,b]\}$，$Y=\{y\mid y=y(t),\ t\in[a,b]\}$，上述参数表示所确定的函数关系即为

$$\begin{aligned} f:X &\longrightarrow Y \\ x=x(t) &\longmapsto y=y(t). \end{aligned}$$

例如，对于例 1.2.13 中的圆方程 $x^2+y^2=R^2$ 所确定的函数关系，可以引入参数 t 表示 x 轴正向按逆时针方向旋转至射线 $\overline{OP}$ 的角度（以弧度为单位），其中 $P=P(x,y)$ 表示圆上任意一点（图 1.2.5）．则对于上半圆周（或下半圆周），x 与 y 的函数关系可表示成

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases} \quad t\in[0,\pi]（或\ t\in[\pi,2\pi]）.$$

旋轮线又称**摆线**，它表示一只滚动的轮子的边缘上一点的运动轨迹．如果将旋轮线放在平面直角坐标系中，要直接求出旋轮线上一点的横坐标 x 与纵

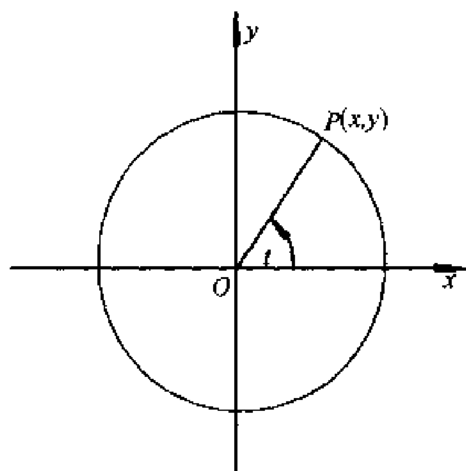


图 1.2.5

坐标 y 之间的函数关系是很困难的. 下面我们通过引入适当的参数, 推导旋轮线所表示的函数关系的参数表示.

例 1.2.15 半径为 1 的轮子置于平地上, 轮子边缘一点 A 与地面相接触. 求当轮子滚动时, A 点运动的函数表示.

解 如图 1.2.6 建立坐标系. 设轮子滚动时 A 点的坐标为 $A(x, y)$. 当轮子滚动到 P 点时, 线段 $\overline{OP}$ 的长度等于圆弧 $\widehat{AP}$ 的长度, 也等于轮子转过的角度(以弧度为单位, 见例 2.4.5 的注).

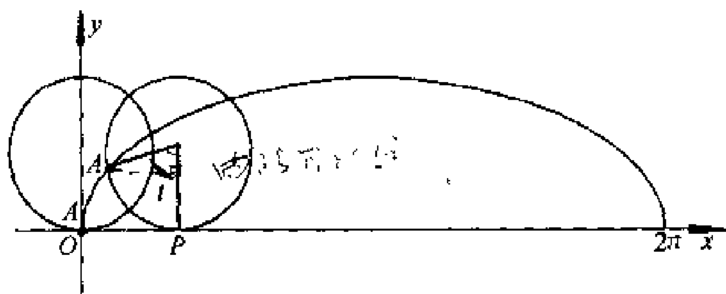


图 1.2.6

令参数 t 表示轮子转过的角度, 于是得到

$$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} \quad t \in [0, +\infty).$$

此即为旋轮线的参数表示.

函数的简单特性

(1) 有界性

定义 1.2.3 若存在两个常数 m 和 M, 使函数 $y = f(x), x \in D$ 满足

$$m \leqslant f(x) \leqslant M, \quad x \in D,$$

则称函数 f 在 $x \in D$ **有界**. 其中 m 是它的**下界**, M 是它的**上界**.

注意当一个函数有界时,它的上界与下界不唯一. 由上面定义可知,任意小于 m 的数也是 f 的下界,任意大于 M 的数也是 f 的上界.

有界函数的另一定义是

"存在常数 $X>0$,使函数 $y=f(x)$ 满足 $|f(x)| \leqslant X, x \in D$".

容易证明这两种定义是等价的.

(2)单调性

定义 1.2.4 对函数 $y=f(x), x \in D$,若对任意 $x_1, x_2 \in D$,当 $x_1<x_2$ 时成立 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$(或 $f(x_1)<f(x_2)$),则称函数 f 在 $x \in D$ **单调增加**(或**严格单调增加**),通常记作 $f \uparrow$(或 f 严格 $\uparrow$);若对任意 $x_1, x_2 \in D$,当 $x_1<x_2$ 时成立 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$),则称函数 f 在 $x \in D$ **单调减少**(或**严格单调减少**),通常记作 $f \downarrow$(或 f 严格 $\downarrow$).

例如, $y=x^3, y=a^x(a>1), y=\log_a x(a>1), y=\arctan x$ 等函数在它们的定义域中都是严格单调增加的;而 $y=a^x(0<a<1), y=\log_a x(0<a<1)$, $y=\operatorname{arccot} x$ 等等函数在它们的定义域中都是严格单调减少的; $y=[x]$ 是单调增加的,但不是严格单调增加的.

也有许多函数在它的自然定义域中并非单调,但在较小的范围内却具有单调性. 例如 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 不具有单调性,但在 $(-\infty, 0]$ 是严格单调减少的,在 $[0,+\infty)$ 是严格单调增加的; $y=\sin x$ 在 $\left[2n\pi-\frac{\pi}{2}, 2n\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ $(n \in \mathbf{Z})$ 是严格单调增加的,在 $\left[(2n+1)\pi-\frac{\pi}{2},(2n\pi+1)+\frac{\pi}{2}\right]$ $(n \in \mathbf{Z})$ 是严格单调减少的.

(3)奇偶性

定义 1.2.5 设函数 f 的定义域 D 关于原点对称,即 $x \in D \Leftrightarrow -x \in D$. 若对一切 $x \in D$,成立 $f(-x)=f(x)$,则称函数 f 是**偶函数**;若对一切 $x \in D$,成立 $f(-x)=-f(x)$,则称函数 f 是**奇函数**.

显然,奇函数的图象关于原点对称,偶函数的图象关于 y 轴对称. 了解了函数的奇偶性,我们只需在 $D \cap[0,+\infty)$ 上讨论函数的性质,再由对称性推出它在 $D \cap(-\infty, 0]$ 上的性质.

例如, $y=x^3, y=\sin x, y=\tan x$ 等函数都是奇函数,而 $y=x^2, y=\cos x, y=|x|$ 等函数都是偶函数.

例 1.2.16 判断函数 $f(x)=\frac{1}{1+a^x}-\frac{1}{2}(a>0, a \neq 1)$ 的奇偶性.

解 因为

$$f(-x)=\frac{1}{1+a^{-x}}-\frac{1}{2}$$
$$=\frac{a^x}{1+a^x}-\frac{1}{2}=\left(\frac{a^x}{1+a^x}-1\right)+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{-1}{1+a^x}+\frac{1}{2}=-f(x),$$

所以 $f(x)=\frac{1}{1+a^x}-\frac{1}{2}$是奇函数.

(4)周期性

定义 1.2.6 若存在常数 $T>0$,使得对一切 $x\in D$,成立 $f(x+T)=f(x)$,则称函数 f 是**周期函数**,T 称为它的**周期**.若存在满足上述条件的最小的 T,则称它为 f 的**最小周期**.

显然,周期函数 f 的定义域 D 必须满足条件:对一切 $x\in D$,有 $x+T\in D$.

例如,$y=\sin x$ 是$(-\infty,+\infty)$上的周期函数,任一个 $2n\pi(n\in\mathbf{N}^+)$都是它的周期,其中,2π 是它的最小周期.$y=\tan x$ 也是周期函数,它的定义域是

$$(-\infty,+\infty)\setminus\left\{n\pi+\frac{\pi}{2},n\in\mathbf{Z}\right\},$$

π 是它的最小周期.但并非每个周期函数都有最小周期.

例 1.2.17 Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 为无理数};\\ 1, & x\text{ 为有理数}.\end{cases}$$

容易判断这是一个周期函数,任何正有理数都是它的周期.因为不存在最小正有理数,所以它不可能有最小周期.

对于周期函数,我们只需要研究它在一个周期上的性质,再根据周期性推出它在其它范围上的性质.

两个常用不等式

下面介绍两个重要的不等式,它们不仅在数学分析的证明中频繁出现,而且在其它数学分支中也都有广泛的用途.

定理 1.2.1(三角不等式) 对于任意实数 a 和 b,都有

$$||a|-|b||\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

证 因为对于任意实数 a 和 b,都有

$$-|a||b|\leqslant ab\leqslant|a||b|,$$

所以

$$|a|^2-2|a||b|+|b|^2\leqslant a^2+2ab+b^2\leqslant|a|^2+2|a||b|+|b|^2,$$

开方后就得到上述不等式.

证毕

以后我们会看到,对于整个数学领域,三角不等式可以说是无处不在.

定义 1.2.7 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个正数,则分别称

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},\quad \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},\quad n\Big/\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$$

是它们的**算术平均值**、**几何平均值**和**调和平均值**.

这三个平均值之间成立如下关系:

定理 1.2.2(平均值不等式) 对任意 n 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,有

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\geqslant n\Big/\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right),$$

等号当且仅当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 全部相等时成立.

这就是说,算术平均值不小于几何平均值,几何平均值不小于调和平均值.

证 先证明左边的不等式

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

当 $n=1,2$ 时,不等式显然成立.

当 $n=2^k(k\in\mathbf{N}^+)$时,不等式是 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ 的直接推论.

当 $n\neq 2^k$ 时,取 $l\in\mathbf{N}^+$,使 $2^{l-1}<n<2^l$. 记

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\bar{a},$$

在 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 后面加上(2^l-n)个 $\bar{a}$,将其扩充成 2^l 个正数. 对这 2^l 个正数应用不等式,得到

$$\frac{1}{2^l}[a_1+a_2+\cdots+a_n+(2^l-n)\bar{a}]\geqslant(a_1a_2\cdots a_n\bar{a}^{2^l-n})^{\frac{1}{2^l}}=\bar{a},$$

整理后即有

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

对 $\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},\cdots,\frac{1}{a_n}$ 使用上面的结论,便得到右边的不等式.

证毕

习　题

1. 设 $S=\{\alpha,\beta,\gamma\}$, $T=\{a,b,c\}$,,问有多少种可能的映射 $f:S\to T$?其中哪些是双射?

2. (1)建立区间 $[a,b]$ 与 $[0,1]$ 之间的一一对应;

(2)建立区间 $(0,1)$ 与 $(-\infty,+\infty)$ 之间的一一对应.

3. 将下列函数 f 和 g 构成复合函数,并指出定义域与值域:

(1) $y=f(u)=\ln u$, $u=g(x)=x^2-3$;

(2) $y=f(u)=\arcsin u$, $u=g(x)=e^x$;

(3) $y=f(u)=\sqrt{u^2-1}$, $u=g(x)=\sec x$;

(4) $y=f(u)=\sqrt{u}$, $u=g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$.

4. 指出下列函数是由哪些基本初等函数复合而成的:

(1) $y=\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$;　　(2) $y=\dfrac{1}{3}\ln^3(x^2-1)$.

5. 求下列函数的自然定义域与值域:

(1) $y=\ln\sin x$;　　(2) $y=\sqrt{\cos x}$;

(3) $y=\sqrt{4-3x-x^2}$;　(4) $y=x^2+\dfrac{1}{x^4}$.

6. 问下列函数 f 和 g 是否等同.

(1) $f(x)=\ln x^2$, $g(x)=2\ln x$;

(2) $f(x)=\sec^2x-\tan^2x$, $g(x)=1$;

(3) $f(x)=\sin^2x+\cos^2x$, $g(x)=1$;

7. (1)设 $f(x+3)=2x^3-3x^2+5x-1$,求 $f(x)$;

(2)设 $f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=\dfrac{3x-1}{3x+1}$,求 $f(x)$.

8. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$,求 $f\circ f, f\circ f\circ f, f\circ f\circ f\circ f$ 的函数表达式.

9. 证明:定义于 $(-\infty,+\infty)$ 上的任何函数都可以表示成一个偶函数与一个奇函数之和.

10. 写出折线 $\overline{ABCD}$ 所表示的函数关系 $y=f(x)$ 的分段表示,其中 $A=(0,3)$, $B=(1,-1)$, $C=(3,2)$, $D(4,0)$.

11. 设 $f(x)$ 表示图 1.2.7 中阴影部分面积,写出函数 $y=f(x)$, $x\in[0,2]$ 的表达式.

12. 一玻璃杯装有汞、水、煤油三种液体,密度分别为 13.6g/cm^3, 1g/cm^3,

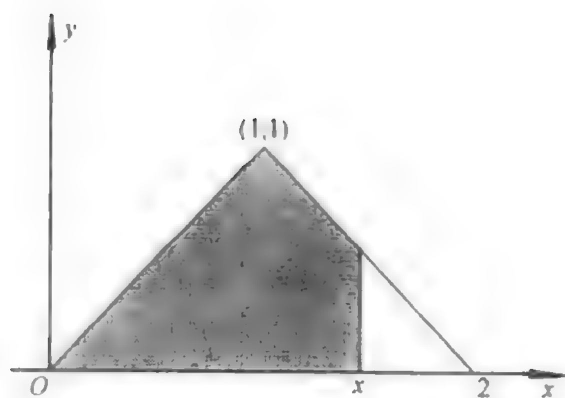


图 1.2.7

第二章　第列极限

§1　实数系的连续性

实数系

数学分析讨论的是实变量之间的函数关系.换言之,在数学分析中,变量的取值范围是限制在实数集合内的,因此有必要首先了解实数集合的一个重要的基本性质——连续性.我们先来考察一下数系的扩充历史.

人类对数的认识是从自然数开始的.若一个集合中的任意两个元素进行了某种运算后,所得的结果仍属于这个集合,我们称该集合对这种运算是**封闭**的.显然,任意两个自然数 m 与 n,其和 $m+n$ 与积 mn 必定还是自然数,即自然数集合对于加法与乘法运算是封闭的.但是自然数集合对于减法运算并不封闭,即任意两个自然数之差不一定还是自然数.

当数系由自然数集合扩充到整数集合 $\mathbf{Z}$ 后,关于加法、减法和乘法都封闭了,即对于任意两个整数 $p,q\in\mathbf{Z}$,其和、差、积必定还是整数:$p\pm q\in\mathbf{Z}$,$pq\in\mathbf{Z}$.但是,整数集 $\mathbf{Z}$ 关于除法是不封闭的,因此数系又由整数集合 $\mathbf{Z}$ 扩充为有理数集合 $\mathbf{Q}=\left\{x \mid x=\dfrac{q}{p},p\in\mathbf{N}^{+},q\in\mathbf{Z}\right\}$.显然,有理数集合 $\mathbf{Q}$ 关于加法、减法、乘法与除法(除数$\neq 0$)四则运算都是封闭的.

让我们从几何直观上来分析一下.取一水平直线,在上面取定一个原点 O,再在 O 的右方取一点 A,以线段 OA 作为单位长度,这样就建立了一个坐标轴.在这个坐标轴上,整数集合 $\mathbf{Z}$ 的每一个元素都能找到自己的对应点,这些点称为**整数点**.因为它们之间的最小间隔为 1,我们称整数系 $\mathbf{Z}$ 具有"离散性".

显然,有理数集合 $\mathbf{Q}$ 的每一个元素 $\dfrac{q}{p}(p\in\mathbf{N}^{+},q\in\mathbf{Z})$ 也都能在这坐标轴上找到自己的对应点,这些点称为**有理点**.由于对固定的 $p\in\mathbf{N}^{+}$,以 p 为分母的无限个有理点在坐标轴上按间隔距离 $\dfrac{1}{p}$ 依次排列,因此对坐标轴上的任意区间,设它的长度为 $\delta>0$,则该区间中必含有以 $p\left(p>\dfrac{1}{\delta}\right)$ 为分母的有理点。由此可知,在坐标轴的任意一段长度大于 0 的线段上,总存在无穷多个有理点.换句话说,在坐标轴上有理点是密密麻麻的,我们称有理数系 $\mathbf{Q}$ 具有"稠密性".

既然有理数系 $\mathbf{Q}$ 是如此的稠密,粗粗想来,它似乎已经是尽善尽美了,其

实不然. 比如说,若用 c 表示边长为 1 的正方形的对角线的长度,这个 c 就无法用有理数来表示. 这可以通过反证法来论证:根据勾股定理,$c^2=2$. 若 $c=\frac{q}{p}$,其中 $p,q\in\mathbf{N}^+$,并且 p,q 互质,那么 $q^2=2p^2$. 由于奇数的平方必为奇数,因此 q 是偶数. 设 $q=2r$, $r\in\mathbf{N}^+$,又得到 $p^2=2r^2$,也就是说 p 也是偶数,这就与 p,q 互质的假设发生矛盾,所以 c 不是有理数. 换句话说,有理数集合 $\mathbf{Q}$ 对于开方运算是不封闭的.

所以,有理点虽然在坐标轴上密密麻麻,但并没有布满整条直线,其中留有许多"空隙",如与单位正方形对角线长度对应的点 c 就位于有理点集合的"空隙"中(如图 2.1.1).

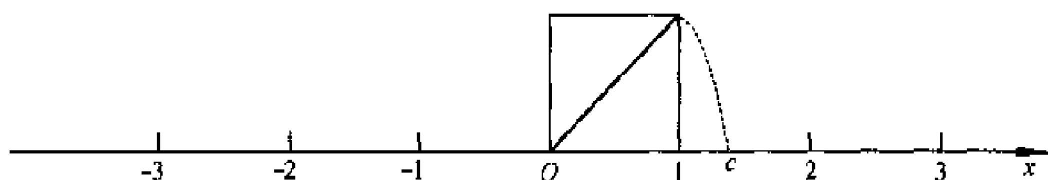


图 2.1.1

注意到有理数一定能表示成有限小数或无限循环小数,很自然会想到,扩充有理数集合 $\mathbf{Q}$ 最直接的方式之一,就是把所有的无限不循环小数(称为无理数)吸纳进来. 我们将全体有理数和全体无理数所构成的集合称为实数集 $\mathbf{R}$:

$$\mathbf{R}=\{x\mid x \text{ 是有理数或无理数}\}.$$

下面将会了解,全体无理数所对应的点(称为**无理点**)确实填补了有理点在坐标轴上的所有"空隙",即实数铺满了整个数轴. 这样,每个实数都可以在坐标轴上找到自己的对应点,而坐标轴上的每个点又可以通过自己的坐标表示唯一一个实数. 实数集合的这一性质称为实数系 $\mathbf{R}$ 的"连续性". 为了强调实数系所特有的这种连续性,$\mathbf{R}$ 又被称为**实数连续统**,而那条表示实数全体的坐标轴又称为**数轴**.

实数系的连续性是分析学的基础,对于我们将要学习的极限论、微积分乃至整个分析学具有无比的重要性. 可以说,正是因为有了连续性,实数系才成为数学分析课程的"活动基地"的.

实数系 $\mathbf{R}$ 的连续性,从几何角度理解,就是实数全体布满整个数轴而没有"空隙",但从分析角度阐述,则有多种相互等价的表述方式. 在本节中将要讲述的"确界存在定理"就是实数系 $\mathbf{R}$ 连续性的表述之一.

最大数与最小数

下面我们讨论实数集 $\mathbf{R}$ 的各种子集，简称为数集.

为了表达上的方便，引入两个记号："$\exists$"表示"存在"，"$\forall$"表示"对于任意给定的"或"对于每一个". 例如

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A, 有\ x \in B,$$

$$A \not\subset B \Leftrightarrow \exists x \in A, 使得\ x \overline{\in} B.$$

设 S 是一个数集，如果 $\exists \xi \in S$，使得 $\forall x \in S$，有 $x \leqslant \xi$，则称 ξ 是数集 S 的最大数，记为 $\xi = \max S$；如果 $\exists \eta \in S$，使得 $\forall x \in S$，有 $x \geqslant \eta$，则称 η 是数集 S 的最小数，记为 $\eta = \min S$.

当数集 S 是非空有限集，即 S 只含有有限个数时，$\max S$ 与 $\min S$ 显然存在，且 $\max S$ 是这有限个数中的最大者，$\min S$ 是这有限个数中的最小者. 但是当 S 是无限集时，最大数及最小数就有可能不存在.

例 2.1.1 集合 $A = \{x \mid x \geqslant 0\}$ 没有最大数，但有最小数，$\min A = 0$.

例 2.1.2 证明集合 $B = \{x \mid 0 \leqslant x < 1\}$ 没有最大数.

证 用反证法.

假设集合 B 有最大数，记为 β. 由 $\beta \in [0,1)$，可知 $\beta' = \frac{1+\beta}{2} \in [0,1)$. 但是 $\beta' > \beta$，这就与 β 是集合 B 的最大数发生矛盾. 所以集合 B 没有最大数.

证毕

上确界与下确界

设 S 是一个非空数集，如果 $\exists M \in \mathbf{R}$，使得 $\forall x \in S$，有 $x \leqslant M$，则称 M 是 S 的一个上界；如果 $\exists m \in \mathbf{R}$，使得 $\forall x \in S$，有 $x \geqslant m$，则称 m 是 S 的一个下界. 当数集 S 既有上界，又有下界时，称 S 为有界集. 显然

$$S\ 为有界集 \Leftrightarrow \exists X > 0, 使得\ \forall x \in S, 有 |x| \leqslant X.$$

设数集 S 有上界，记 U 为 S 的上界全体所组成的集合，则显然 U 不可能有最大数，下面将证明：U 一定有最小数. 设 U 的最小数为 β，就称 β 为数集 S 的**上确界**，即最小上界，记为

$$\beta = \sup S.$$

从上面的叙述，可知上确界 β 满足下述两性质：

1. β 是数集 S 的上界：$\forall x \in S$，有 $x \leqslant \beta$；

2. 任何小于 β 的数不是数集 S 的上界：$\forall \varepsilon > 0$，$\exists x \in S$，，使得 $x > \beta - \varepsilon$.

又假若数集 S 有下界，记 L 为 S 的下界全体所组成的集合，则显然 L 不可能有最小数，同样可以证明：L 一定有最大数. 设 L 的最大数为 α，就称 α 为数集 S 的**下确界**，即最大下界，记为

$$\alpha = \inf S.$$

类似地，下确界 α 满足下述两性质：

1. α 是数集 S 的下界：$\forall x \in S$，有 $x \geqslant \alpha$；

2. 任何大于 α 的数不是数集 S 的下界：$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in S$，使得 $x < \alpha + \varepsilon$.

定理 2.1.1（确界存在定理——实数系连续性定理） *非空有上界的数集必有上确界；非空有下界的数集必有下确界.*

证 由例 1.2.11 和例 1.2.12，任何一个实数可表示成

$$x = [x] + (x),$$

其中 $[x]$ 表示 x 的整数部分，(x) 表示 x 的非负小数部分. 我们将 (x) 表示成无限小数的形式

$$(x) = 0.a_1a_2\cdots a_n\cdots,$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 中的每一个都是数字 $0,1,2,\cdots,9$ 中的一个. 若 (x) 是有限小数，则在后面接上无限个 0，这称为实数的无限小数表示. 注意无限小数 $0.a_1a_2\cdots a_p000\cdots(a_p \neq 0)$ 与无限小数 $0.a_1a_2\cdots(a_p-1)999\cdots$ 是相等的，为了保持表示的唯一性，我们约定在 (x) 的无限小数表示中不出现后者. 这样，任何一个实数集合 S 就可以由一个确定的无限小数的集合来表示：

$$\{a_0 + 0.a_1a_2\cdots a_n\cdots \mid a_0 = [x], 0.a_1a_2\cdots a_n\cdots = (x), x \in S\}.$$

设数集 S 有上界，则可令 S 中元素的整数部分的最大者为 α_0（α_0 一定存在，否则的话，S 就不可能有上界），并记

$$S_0 = \{x \mid x \in S \text{ 并且} [x] = \alpha_0\}.$$

显然 S_0 不是空集，并且 $\forall x \in S$，只要 $x \overline{\in} S_0$，就有 $x < \alpha_0$.

再考察数集 S_0 中元素的无限小数表示中第一位小数的数字，令它们中最大的为 α_1，并记

$$S_1 = \{x \mid x \in S_0 \text{ 并且 } x \text{ 的第一位小数为} \alpha_1\}.$$

显然 S_1 也不是空集，并且 $\forall x \in S$，只要 $x \overline{\in} S_1$，就有 $x < \alpha_0 + 0.\alpha_1$.

一般地，考察数集 S_{n-1} 中元素的无限小数表示中第 n 位小数的数字，令它们中最大的为 α_n，并记

$$S_n = \{x \mid x \in S_{n-1} \text{ 并且 } x \text{ 的第} n \text{ 位小数为} \alpha_n\}.$$

显然 S_n 也不是空集，并且 $\forall x \in S$，只要 $x \overline{\in} S_n$，就有 $x < \alpha_0 + 0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$.

不断地做下去，我们得到一列非空数集 $S \supset S_0 \supset S_1 \supset \cdots \supset S_n \supset \cdots$，和一列数 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \cdots$，满足

$$\alpha_0 \in \mathbf{Z};$$
$$\alpha_k \in \{0,1,2,\cdots,9\}, \forall k \in \mathbf{N}^+.$$

令

$$\beta = \alpha_0 + 0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\cdots,$$

下面我们分两步证明 β 就是数集 S 的上确界.

(1) $\forall x\in S$,或者存在整数 $n_0\geqslant 0$,使得 $x\overline{\in} S_{n_0}$;或者对任何整数 $n\geqslant 0$,有 $x\in S_n$. 若 $x\overline{\in} S_{n_0}$,便有

$$x < \alpha_0 + 0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n_0} \leqslant \beta.$$

若 $x\in S_n$ ($\forall n\in\mathbf{N}$),由 S_n 的定义并逐个比较 x 与 β 的整数部分及每一个小数位上的数字,即知 $x=\beta$. 所以 $\forall x\in S$,有 $x\leqslant\beta$,即 β 是数集 S 的上界.

(2) $\forall \varepsilon>0$,只要将自然数 n_0 取得充分大,便有

$$\frac{1}{10^{n_0}} < \varepsilon.$$

取 $x_0\in S_{n_0}$,则 β 与 x_0 的整数部分及前 n_0 位小数是相同的,所以

$$\beta - x_0 \leqslant \frac{1}{10^{n_0}} < \varepsilon,$$

即

$$x_0 > \beta - \varepsilon,$$

即任何小于 β 的数 $\beta-\varepsilon$ 不是数集 S 的上界.

同理可证非空有下界的数集必有下确界.

证毕

注意在上面的证明中,上确界 β 的无限小数表示可能不符合我们的约定,例如 $S=\{0.9,0.99,0.999,\cdots\}$,则 $\beta=0.999\cdots9\cdots$. 但这并不影响我们的证明,事实上,我们关心的只是上确界 β 这样一个实数的存在性.

关于数集的上(下)确界有下述的唯一性定理:

定理 2.1.2 非空有界数集的上(下)确界是唯一的.

定理的证明留给读者(见习题 5).

确界存在定理反映了实数系连续性这一基本性质,这可以从几何上加以理解:假若实数全体不能布满整条数轴而是留有"空隙",则"空隙"左边的数集就没有上确界,"空隙"右边的数集就没有下确界. 比如,由于有理数集合 **Q** 在数轴上有"空隙",它就不具备实数集合 **R** 所具有的"确界存在定理",也就是说:**Q** 内有上界的集合 T 未必在 **Q** 内有它的上确界.

例 2.1.3 设 $T=\{x\,|\,x\in\mathbf{Q}$ 并且 $x>0, x^2<2\}$,证明 T 在 **Q** 中没有上确界.

证 用反证法.

假设 T 在 **Q** 内有上确界,记 $\sup T=\frac{n}{m}$ ($m,n\in\mathbf{N}^+$ 且 m,n 互质),则显然有

$$1<\left(\frac{n}{m}\right)^2<3.$$

由于有理数的平方不可能等于 2,于是只有下述两种可能:

(1) $1<\left(\frac{n}{m}\right)^2<2$;

记 $2-\frac{n^2}{m^2}=t$，则 $0<t<1$. 令 $r=\frac{n}{6m}t$，显然 $\frac{n}{m}+r>0$，$\frac{n}{m}+r\in\mathbf{Q}$.

由于 $r^2=\frac{n^2}{36m^2}t^2<\frac{1}{18}t$，及 $\frac{2n}{m}r=\frac{n^2}{3m^2}t<\frac{2}{3}t$，可以得到

$$\left(\frac{n}{m}+r\right)^2-2=r^2+\frac{2n}{m}r-t<0.$$

这说明，$\frac{n}{m}+r\in T$，与 $\frac{n}{m}$ 是 T 的上确界矛盾.

(2) $2<(\frac{n}{m})^2<3$：

记 $\frac{n^2}{m^2}-2=t$，则 $0<t<1$. 令 $r=\frac{n}{6m}t$，显然也有 $\frac{n}{m}-r>0$，$\frac{n}{m}-r\in\mathbf{Q}$.

由于 $\frac{2n}{m}r=\frac{n^2}{3m^2}t<t$，可以得到

$$\left(\frac{n}{m}-r\right)^2-2=r^2-\frac{2n}{m}r+t>0.$$

这说明 $\frac{n}{m}-r$ 也是 T 的上界，与 $\frac{n}{m}$ 是 T 的上确界矛盾.

由此得到结论：T 在 $\mathbf{Q}$ 中没有上确界.

证毕

附录 Dedekind 切割定理

在本节中，我们利用实数的无限小数表示，证明了确界存在定理——实数系连续性定理，但由于实数的无限小数表示的严格阐述需要用到我们尚未学到的级数知识，上述证明有稍欠严格之嫌.

事实上，实数系连续性有多种等价的叙述方式. 下面，我们改从有理数集的稠密性出发，介绍关于实数系连续性的另一个定理——Dedekind 定理.

Dedekind 是以有理数集合 $\mathbf{Q}$ 的切割为基础导出无理数定义，进而定义整个实数系的.

定义 1 *设两个非空有理数集合 A 和 B 满足下述条件：$\mathbf{Q}=A\cup B$ 且对任意的 $a\in A$ 与任意的 $b\in B$，成立 $a<b$，则称 A 和 B 构成 $\mathbf{Q}$ 的一个**切割**，记为 A/B.*

从逻辑上讲，对有理数集合 $\mathbf{Q}$ 的任何切割 A/B，下述四种情况有且仅有一种出现：

(1) 集合 A 有最大数 a_0，而集合 B 没有最小数；

(2) 集合 A 没有最大数，而集合 B 有最小数 b_0；

(3) 集合 A 没有最大数，而集合 B 没有最小数；

(4) 集合 A 有最大数 a_0，而集合 B 有最小数 b_0.

但情况(4)是不可能发生的. 因为根据切割的定义，可知 $a_0<b_0$. 而 $\frac{a_0+b_0}{2}$ 显然也是 $\mathbf{Q}$ 中的有理数，由 $a_0<\frac{a_0+b_0}{2}<b_0$，即得到 $\frac{a_0+b_0}{2}$ 既不属于 A，也不属于 B，这就与 $\mathbf{Q}=A\cup B$ 产生矛盾.

对情况(1)，我们称切割 A/B 确定了有理数 a_0；对情况(2)，我们称切割 A/B 确定了

有理数 b_0. 而对情况(3),由于切割 A/B 没有确定任何有理数,即集合 A 与 B 之间存在一个"空隙",因此有必要引进一个新的数(即无理数),作为这一切割的确定对象.

定义 2 设 A/B 是有理数集合 $\mathbf{Q}$ 的一个切割,如果 A 中没有最大数,B 中没有最小数,则称切割 A/B 确定了一个无理数 c,c 大于 A 中任何有理数,同时小于 B 中任何有理数.

例 设集合 A 由全部负有理数与满足 $x^2<2$ 的非负有理数构成,集合 B 由满足 $x^2>2$ 的正有理数构成,则 A 和 B 构成有理数集合 $\mathbf{Q}$ 的一个切割. 集合 A 没有最大数,集合 B 没有最小数,切割 A/B 确定的无理数就是 $\sqrt{2}$.

定义 3 由有理数全体与定义 2 确定的无理数全体所构成的集合称为实数集,记为 $\mathbf{R}$.

我们知道有理数集有稠密性,但没有连续性,即有理数之间有许多"空隙". 下面叙述的 Dedekind 切割定理则将告诉我们,在有理数集合加入了无理数后,就没有"空隙"了,也就是说,实数集 $\mathbf{R}$ 的任一切割,都不会出现上述的情况(3).

定义 4 设两个非空实数集合 $\widetilde{A}$ 和 $\widetilde{B}$ 满足下述条件: $\mathbf{R}=\widetilde{A}\cup\widetilde{B}$,且对任意的 $a\in\widetilde{A}$ 与任意的 $b\in\widetilde{B}$,成立 $a<b$,则称 $\widetilde{A}$ 和 $\widetilde{B}$ 构成 $\mathbf{R}$ 的一个切割,记为 $\widetilde{A}/\widetilde{B}$.

定理(Dedekind 切割定理) 设 $\widetilde{A}/\widetilde{B}$ 是实数集 $\mathbf{R}$ 的一个切割,则或者 $\widetilde{A}$ 有最大数,或者 $\widetilde{B}$ 有最小数.

证 设 A 是 $\widetilde{A}$ 中所有有理数所构成的集合,B 是 $\widetilde{B}$ 中所有有理数所构成的集合,则 A/B 是有理数集合 $\mathbf{Q}$ 的一个切割. 由前面所述,对于切割 A/B,下述三种情况有且仅有一种出现:

(1) 集合 A 有最大数 a_0,集合 B 没有最小数;

(2) 集合 A 没有最大数,集合 B 有最小数 b_0;

(3) 集合 A 没有最大数,集合 B 没有最小数.

对情况(1),可以证明此时 a_0 也是集合 $\widetilde{A}$ 的最大数,而集合 $\widetilde{B}$ 没有最小数.

用反证法. 若有 $\tilde{a}\in\widetilde{A}$,成立 $a_0<\tilde{a}$,则由有理数的稠密性,在区间 $(a_0,\tilde{a})$ 中必存在有理数 a. 由 $a<\tilde{a}$,可知 $a\in A$,但 $a>a_0$ 与 a_0 是 A 的最大数发生矛盾. 这说明 a_0 就是集合 $\widetilde{A}$ 的最大数.

对于任意的 $\tilde{b}\in\widetilde{B}$,因为 $a_0<\tilde{b}$,于是在区间 $(a_0,\tilde{b})$ 中必存在有理数 b. 由 $a_0<b$,可知 $b\in\widetilde{B}$,但 $b<\tilde{b}$,这说明集合 $\widetilde{B}$ 没有最小数.

对情况(2),可类似证明此时 b_0 也是集合 $\widetilde{B}$ 的最小数,而集合 $\widetilde{A}$ 没有最大数.

对情况(3),由定义 2,切割 A/B 确定一个无理数,将该无理数记为 c,则对任意 $a\in A$ 与任意 $b\in B$,成立 $a<c<b$.

因为无理数 $c\in\mathbf{R}=\widetilde{A}\cup\widetilde{B}$,所以只有两种可能:或者 $c\in\widetilde{A}$,或者 $c\in\widetilde{B}$. 若 $c\in\widetilde{A}$,则 c 必是 $\widetilde{A}$ 的最大数. 若不然则存在 $\tilde{a}\in\widetilde{A}$,成立 $c<\tilde{a}$. 在区间 $(c,\tilde{a})$ 中取有理数 a,由 $a<\tilde{a}$,可知 $a\in A$,但由 $c<a$,又可知 $a\in B$,这就产生矛盾.

同理. 若 $c\in\widetilde{B}$,则 c 必是 $\widetilde{B}$ 的最小数.

综合情况(1)(2)(3),可知 Dedekind 定理成立.

证毕

下面我们从 Dedekind 定理出发，给出定理 2.1.1(确界存在定理——实数系连续性定理)的另一证明：

证　设非空实数集合 S 有上界，则令集合 S 的上界全体所成的集合为 $\tilde{B}$：

$$\tilde{B}=\{y\mid y\geqslant t,\forall t\in S\},$$

并令 $\tilde{B}$ 的补集为 $\tilde{A}$：

$$\tilde{A}=\{x\mid x\overline{\in}\tilde{B}\},$$

于是 $\tilde{A}/\tilde{B}$ 构成了实数集 $\mathbf{R}$ 的一个切割．由 Dedekind 定理，或者 $\tilde{A}$ 有最大数，或者 $\tilde{B}$ 有最小数．

对任意的 $x\in\tilde{A}$，x 不是集合 S 的上界，也即存在 $t\in S$，使得 $x<t$．令 $x^*=\dfrac{x+t}{2}$，则 $x<x^*<t$．由 $x^*<t$，可知 x^* 也不是集合 S 的上界，于是 $x^*\in\tilde{A}$．再由 $x<x^*$，即知 x 不是 $\tilde{A}$ 的最大数．所以，$\tilde{A}$ 没有最大数．

由此证得 $\tilde{B}$ 有最小数，也即集合 S 必有最小上界，即上确界．

证毕

习　题

1．(1)证明 $\sqrt{6}$ 不是有理数；

(2) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ 是不是有理数？

2．求下列数集的最大数、最小数，或证明它们不存在．

$A=\{x\mid x\geqslant 0\}$；

$B=\left\{\sin x\;\middle|\;0<x<\dfrac{2\pi}{3}\right\}$；

$C=\left\{\dfrac{n}{m}\;\middle|\;m,n\in\mathbf{N}^+\text{ 并且 }n<m\right\}$．

3．A,B 是两个有界集，证明

(1) $A\cup B$ 是有界集；

(2) $S=\{x+y\mid x\in A,y\in B\}$ 也是有界集．

4．设数集 S 有上界，则数集 $T=\{x\mid -x\in S\}$ 有下界，且 $\sup S=-\inf T$．

5．证明有界数集的上、下确界唯一．

6．对任何非空数集 S，必有 $\sup S\geqslant\inf S$．当 $\sup S=\inf S$ 时，数集 S 有什么特点？

7．证明有下界的数集必有下确界．

8．设 $S=\{x\mid x\in\mathbf{Q}\text{ 并且 }x^2<3\}$，证明：

(1) S 没有最大数与最小数；

(2)S 在 $\mathbf{Q}$ 中没有上确界与下确界.

§2 数列极限

数列与数列极限

数列是指按自然数编了号的一串数:

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

通常表示成$\{x_n\}$,其中 x_n 称为该数列的**通项**.在这个数列中,第一项(即第一个数)是 x_1,第二项是 x_2,…,第 n 项是 x_n,等等.

下面是一些简单的数列的例子

$\left\{\frac{1}{n}\right\}: 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots;$

$\left\{\frac{n}{n+3}\right\}: \frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{6}, \cdots, \frac{n}{n+3}, \cdots;$

$\{n^2\}: 1, 4, 9, \cdots, n^2, \cdots;$

$\{(-1)^n\}: -1, 1, -1, 1, \cdots, (-1)^n, \cdots.$

注意,尽管数列与数集的记号是类似的,但两者的概念有重大区别.在数集中,元素之间没有次序关系,所以重复出现的数看成是同一个元素;但在数列中,每一个数都有确定的编号,前后次序不能颠倒,重复出现的数不能随便舍去.例如上面例子中的数列$\{(-1)^n\}$,是由两个数 1 与 -1 无限次重复交替出现而构成的,它反映的是这个变量的一种特殊的变化规律,显然不能把它仅仅看作是由 1 与 -1 所构成的一个数集.又譬如常数列,它是指数列$\{x_n\}$中的每一项 x_n 都等于常数 C,表示出来就是

$$C, C, C, \cdots, C, \cdots.$$

在数学中,要计算一个无法直接求得的数值,经常采用**逼近**的方法,即计算出一系列较容易求的、同时精确程度越来越好的数作为它的近似值.例如,古人为了求圆周率 π 即圆的周长与直径之比,采用单位圆(半径为 1 的圆)的内接正 n 边形(n 一般取成 $3\cdot 2^m, m\in \mathbf{N}^+$)的半周长 L_n 去逼近它.可以想象,随着 n 的增大,正多边形的半周长就越来越接近圆的半周长,与 π 的近似程度也越来越好.正如我国古代数学家刘徽所说:“割之弥细,所失弥少;割之又割,以至于不可割,则与圆周合体而无所失矣.”这就是说,你想让 L_n 与 π 的误差多小都是可以做得到的——只要将 n 取得足够大就行了.

下面我们对这种朴素的极限概念给出严格的定义.

定义 2.2.1 设$\{x_n\}$是一给定数列,a 是一个实常数.如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$,可以找到自然数 N,使得当 $n>N$ 时,成立

$$|x_n - a| < \varepsilon,$$

则称数列$\{x_n\}$**收敛于** a(或 a 是数列$\{x_n\}$的**极限**),记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

有时也记为

$$x_n \to a(n\to\infty).$$

如果不存在实数 a,使$\{x_n\}$收敛于 a,则称数列$\{x_n\}$**发散**.

我们来看一下这个定义的几何意义(图 2.2.1).首先,数列可以看成定义在正整数集上的一种特殊函数

$$x = f(t), t \in \mathbf{N}.$$

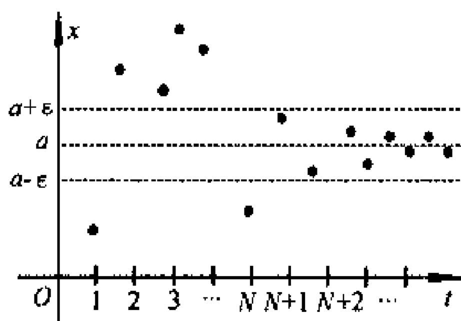


图 2.2.1

在直角平面坐标系 Otx 的 x 轴上取以 a 为中心,ε 为半径的一个开区间$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$,称它为点 a 的ε **邻域**,记为 $O(a,\varepsilon)$:

$$O(a,\varepsilon) = \{x \mid a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\},$$

"当 $n>N$ 时,成立$|x_n-a|<\varepsilon$"表示数列中从 $N+1$ 项起的所有项都落在点 a 的ε 邻域中,即

$$x_n \in O(a,\varepsilon), \quad n > N.$$

由于 ε 具有任意性,也就是说邻域 $O(a,\varepsilon)$的长度,即图 2.2.1 中上下两条横线的距离可以任意收缩.但不管收缩得多么小,数列一定会从某一项起全部落在由这两条线界定的范围中,不难理解,a 必为这个数列的极限值.

要注意在上述的收敛定义中,ε 既是任意的,又是给定的.因为只有对确定的 ε,才能找到相应的自然数 N.

从极限的定义可知,一个数列$\{x_n\}$收敛与否,收敛于哪个数,与这一数列的前面有限项无关.也就是说,改变数列前面的有限项,不影响数列的收敛性.例如数列

$$10,100,1000,10000,\frac{1}{5},\frac{1}{6},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$$

的极限仍然是 0.

例 2.2.1 证明数列$\left\{\frac{n}{n+3}\right\}$的极限为 1.

证 对任意给定的 $\varepsilon>0$,要使

$$\left|\frac{n}{n+3}-1\right|=\frac{3}{n+3}<\varepsilon,$$

只须

$$n>\frac{3}{\varepsilon}-3.$$

N 可以取任意大于$\frac{3}{\varepsilon}-3$ 的自然数,例如取 $N=\left[\frac{3}{\varepsilon}\right]+1$,其中$[x]$表示 x 的整数部分,则当 $n>N$ 时,必有 $n>\frac{3}{\varepsilon}-3$,于是成立

$$\left|\frac{n}{n+3}-1\right|=\frac{3}{n+3}<\varepsilon.$$

证毕

数列$\{n^2\}$:$1,4,9,\cdots,n^2,\cdots$与数列$\{(-1)^n\}$:$-1,1,-1,1,\cdots$是发散数列.事实上,随着 n 增加,$x_n=n^2$ 无限增大,而 $x_n=(-1)^n$ 不断在 1 与 −1 两个数值上跳跃,显然不能满足收敛数列的条件.

在收敛的数列中,我们称极限为 0 的数列为**无穷小量**,例如数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$,$\left\{\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right\}$都是无穷小量.要注意,无穷小量是一个变量,而不是一个"非常小的量"(如 10^{-100}).常数列

$$0,0,0,\cdots,0,\cdots$$

是一个特殊的无穷小量.

根据数列极限的定义,可直接得到

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\{x_n-a\}\text{ 是无穷小量}.$$

例2.2.2 证明$\{q^n\}$$(0<|q|<1)$是无穷小量.

证 对任意给定的 $\varepsilon>0$,要找自然数 N,使得当 $n>N$ 时,成立

$$|q^n-0|=|q|^n<\varepsilon,$$

对上式两边取对数,即得

$$n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}.$$

于是 N 只要取大于$\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$的任意自然数即可.为保证 N 为自然数,可取 $N=\max\left\{\left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right],1\right\}$,则当 $n>N$ 时,成立

$$|q^n-0|=|q|^n<|q|^{\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}}=\varepsilon.$$

证毕

注　根据前面对数列极限的定义的讨论,可以只考虑任意给定的很小的 $\varepsilon>0$,不妨考虑任意给定的 $0<\varepsilon<|q|$,则 N 可取为 $\left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]$,当 $n>N$ 时,成立 $|q^n-0|<\varepsilon$.

根据数列极限的定义来证明某一数列收敛,其关键是对任意给定的 $\varepsilon>0$ 寻找自然数 N. 在上面的两个例题中,都是通过解不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 而得出的. 但在大多数情况下,这个不等式并不容易解. 实际上,数列极限的定义并不要求取到最小的或最佳的自然数 N,所以在证明中常常对 $|x_n-a|$ 适度地做一些放大处理,这是一种常用的技巧.

例 2.2.3　设 $a>1$,求证:$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

证　令 $\sqrt[n]{a}=1+y_n, y_n>0\ (n=1,2,3,\cdots)$.

应用二项式定理,

$$a=(1+y_n)^n=1+ny_n+\frac{n(n-1)}{2}y_n^2+\cdots+y_n^n>1+ny_n,$$

便得到

$$\left|\sqrt[n]{a}-1\right|=|y_n|<\frac{a-1}{n}.$$

于是,对于任意给定的 $\varepsilon>0$,取 $N=\left[\frac{a-1}{\varepsilon}\right]$,当 $n>N$ 时,成立

$$\left|\sqrt[n]{a}-1\right|<\frac{a+1}{n}<\varepsilon.$$

证毕

例 2.2.4　求证:$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证　令 $\sqrt[n]{n}=1+y_n, y_n>0(n=1,2,3,\cdots)$.

应用二项式定理,

$$n=(1+y_n)^n=1+ny_n+\frac{n(n-1)}{2}y_n^2+\cdots+y_n^n>1+\frac{n(n-1)}{2}y_n^2,$$

即得到

$$\left|\sqrt[n]{n}-1\right|=|y_n|<\sqrt{\frac{2}{n}}.$$

于是,对于任意给定的 $\varepsilon>0$,取 $N=\left[\frac{2}{\varepsilon^2}\right]$,当 $n>N$ 时,成立

$$\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\sqrt{\frac{2}{n}}<\varepsilon.$$

证毕

类似地可证:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^k}=1\quad(k\in\mathbf{N}^+).$$

例2.2.5 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{2n^2-7n}=\dfrac{1}{2}$.

证 首先我们有

$$\left|\frac{n^2+1}{2n^2-7n}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{7n+2}{2n(2n-7)}\right|.$$

显然当 $n>6$ 时,

$$\left|\frac{7n+2}{2n(2n-7)}\right|<\frac{8n}{2n^2}=\frac{4}{n}.$$

于是,对任意给定的 $\varepsilon>0$,取 $N=\max\left\{6,\left[\dfrac{4}{\varepsilon}\right]\right\}$,当 $n>N$ 时,成立

$$\left|\frac{n^2+1}{2n^2-7n}-\frac{1}{2}\right|<\frac{4}{n}<\varepsilon.$$

证毕

上述不等式的放大,是在条件"$n>6$"前题下才成立,所以在取 N 时,必须要求 $N\geqslant\left[\dfrac{4}{\varepsilon}\right]$与$N\geqslant 6$ 同时成立。

例 2.2.6 证明:若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a.$$

证 我们先假设 $a=0$,即$\{a_n\}$是无穷小量,则对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在自然数 N_1,当 $n>N_1$ 时,成立 $|a_n|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

现在 $a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}$ 已经是一个固定的数了,因此可以取 $N>N_1$,使得当 $n>N$ 时成立

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}}{n}\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是,利用三角不等式,就得到

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right|&=\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}}{n}+\frac{a_{N_1+1}+a_{N_1+2}+\cdots+a_n}{n}\right|\\&\leqslant\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}}{n}\right|+\left|\frac{a_{N_1+1}+a_{N_1+2}+\cdots+a_n}{n}\right|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

当 $a\neq 0$ 时,则$\{a_n-a\}$是无穷小量,于是

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_n-a)}{n}=0,$$

此即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a.$$

证毕

数列极限的性质

回顾关于数列$\{x_n\}$收敛于a的定义2.2.1,为了表达上的方便,通常采用前面已介绍过的记号"$\forall$"与"$\exists$",将"对于任意给定的$\varepsilon>0$"写成"$\forall\varepsilon>0$",将"可以找到自然数N"(也就是"存在自然数N")写成"$\exists N$",将"当$n>N$时"(也就是"对于每一个$n>N$")写成"$\forall n>N$",于是就有下的符号表述法:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall n>N:|x_n-a|<\varepsilon.$$

(1)极限的唯一性

定理2.2.1 收敛数列的极限必唯一.

证 假设$\{x_n\}$有极限a与b,根据极限的定义,$\forall\varepsilon>0,\exists N_1,\forall n>N_1$:$|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$;且$\exists N_2,\forall n>N_2$:$|x_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}$.

取$N=\max\{N_1,N_2\}$,利用三角不等式,则$\forall n>N$:

$$|a-b|=|a-x_n+x_n-b|\leqslant|x_n-a|+|x_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

由ε可以任意接近于0,即知$a=b$.

证毕

本定理证明中用的插项(加一项再减一项)并辅以三角不等式的方法,是一种极为常用面重要的技巧,请读者注意学习和掌握.

(2)数列的有界性

对于数列$\{x_n\}$,如果存在实数M,使数列的所有的项都满足

$$x_n\leqslant M,\quad n=1,2,3,\cdots,$$

则称M是数列$\{x_n\}$的上界.如果存在实数m,使数列的所有的项都满足

$$m\leqslant x_n,\quad n=1,2,3,\cdots,$$

则称m是数列$\{x_n\}$的下界.

一个数列$\{x_n\}$,若既有上界又有下界,则称之为**有界数列**.显然数列$\{x_n\}$有界的一个等价定义是:存在正实数X,使数列的所有项都满足

$$|x_n|\leqslant X,\quad n=1,2,3,\cdots.$$

定理2.2.2 收敛数列必有界.

证 设数列$\{x_n\}$收敛,极限为 a,由极限的定义,取 $\varepsilon=1$,则$\exists N,\forall n>N:|x_n-a|<1$,即

$$a-1<x_n<a+1.$$

取 $M=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_N,a+1\}$, $m=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_N,a-1\}$,显然对$\{x_n\}$所有的项,成立

$$m\leqslant x_n\leqslant M,\qquad n=1,2,3,\cdots.$$

证毕

要注意定理 2.2.2 的逆命题并不成立,即有界数列未必收敛,例如$\{(-1)^n\}$是有界数列,但它并不收敛.

(3)数列的保序性

定理 2.2.3 设数列$\{x_n\}$,$\{y_n\}$皆收敛,若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$,且 $a<b$,则存在自然数 N,当 $n>N$ 时,成立

$$x_n<y_n.$$

证 取 $\varepsilon=\dfrac{b-a}{2}>0$. 由$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,$\exists N_1,\forall n>N_1:|x_n-a|<\dfrac{b-a}{2}$,因而

$$x_n<a+\frac{b-a}{2}=\frac{a+b}{2};$$

而由$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$,$\exists N_2,\forall n>N_2:|y_n-b|<\dfrac{b-a}{2}$,因而

$$y_n>b-\frac{b-a}{2}=\frac{a+b}{2}.$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$,$\forall n>N$:

$$x_n<\frac{a+b}{2}<y_n.$$

证毕

从几何图象看,从某一项开始,x_n 与 y_n 分别落在两个不相交的区间$\left(\dfrac{3a-b}{2},\dfrac{a+b}{2}\right)$与$\left(\dfrac{a+b}{2},\dfrac{3b-a}{2}\right)$中(图 2.2.2),于是显然成立

$$x_n<y_n.$$

由定理 2.2.3,可以得到下面的推论:

推论 若$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b\neq0$,则存在 N,当 $n>N$ 时,

$$|y_n|>\frac{|b|}{2}>0.$$

这说明若数列$\{y_n\}$收敛且极限不为 0,则当 n 充分大时,y_n 与 0 的距离不能任意小. 这一事实在后面讨论极限的四则运算时会用到.

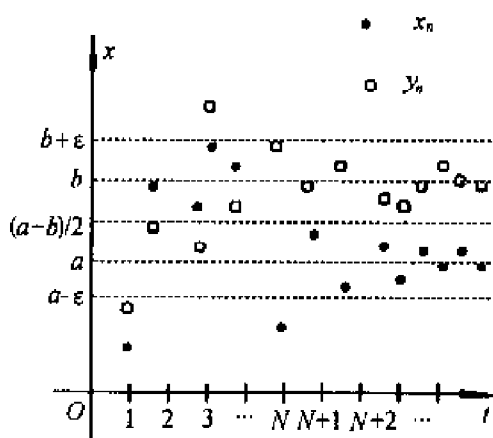


图 2.2.2

定理 2.2.3 的逆命题同样不成立. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, 且 $x_n < y_n$ 对 $n > N$ 成立, 我们并不能得出 $a < b$ 的结论, 这只要看数列 $x_n = \dfrac{1}{n}$ 与 $y_n = \dfrac{2}{n}$ 就可以了. 事实上只能有如下结论:

"若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, 且 $x_n \leqslant y_n$ 对 $n > N$ 成立, 则 $a \leqslant b$."

(4) 极限的夹逼性

定理 2.2.4　若三个数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ 从某项开始成立

$$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n, \qquad n > n_0,$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

证　$\forall \varepsilon > 0$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 可知 $\exists N_1$, $\forall n > N_1$: $|x_n - a| < \varepsilon$, 从而有

$$a - \varepsilon < x_n;$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, 可知 $\exists N_2$, $\forall n > N_2$: $|z_n - a| < \varepsilon$, 从而有

$$z_n < a + \varepsilon.$$

取 $N = \max\{n_0, N_1, N_2\}$, $\forall n > N$:

$$a - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < a + \varepsilon,$$

此即

$$|y_n - a| < \varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

证毕

在应用夹逼性求极限时, $\{y_n\}$ 被看成要求极限的数列, 而 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 往往是通过适度缩小与适度放大而得到的数列. 关键在于在适度缩小与适度放大过程中保持 $\{x_n\}$ 与 $\{z_n\}$ 具有相同极限.

例 2.2.7 求数列$\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\}$的极限.

解 首先我们有

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

取 $x_n=0, y_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}, z_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$,则有

$$x_n<y_n<z_n,$$

由$\left\{\frac{1}{n}\right\}$是无穷小量和习题 6 的结论,易知$\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$也是无穷小量,即有

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}z_n=0.$$

利用极限的夹逼性,得到

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0.$$

例 2.2.8 求证:

$$\lim_{n\to\infty}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_p^n)^{\frac{1}{n}}=\max_{1\leqslant i\leqslant p}\{a_i\},$$

其中 $a_i\geqslant 0(i=1,2,3,\cdots,p)$.

证 不失一般性,设 $a_1=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant p}\{a_i\}$,于是

$$a_1\leqslant(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_p^n)^{\frac{1}{n}}\leqslant a_1\sqrt[n]{p}.$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{p}=1$,利用极限的夹逼性,得到

$$\lim_{n\to\infty}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_p^n)^{\frac{1}{n}}=a_1=\max_{1\leqslant i\leqslant p}\{a_i\}.$$

证毕

数列极限的四则运算

定理 2.2.5 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$,则

(Ⅰ)$\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha x_n+\beta y_n)=\alpha a+\beta b$ (α、β 为常数);

(Ⅱ)$\lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)=ab$;

(Ⅲ)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right)=\frac{a}{b}$ $(b\neq 0)$.

证 由$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,可知$\exists X>0$,使得$|x_n|\leqslant X$,且$\forall\varepsilon>0$, $\exists N_1$, $\forall n>N_1$: $|x_n-a|<\varepsilon$.再由$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$,可知$\exists N_2$, $\forall n>N_2$: $|y_n-b|<\varepsilon$.

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$, $\forall n>N$:

$$|(\alpha x_n+\beta y_n)-(\alpha a+\beta b)|$$

$$\leqslant |\alpha|\cdot|x_n-a|+|\beta|\cdot|y_n-b|$$
$$<(|\alpha|+|\beta|)\varepsilon,$$
$$|x_ny_n-ab|=|x_n(y_n-b)+b(x_n-a)|<(X+|b|)\varepsilon,$$

因此(Ⅰ)和(Ⅱ)成立.

对于(Ⅲ)式,利用定理2.2.3的推论,$\exists N_0,\forall n>N_0:|y_n|>\frac{|b|}{2}$.

取 $N=\max\{N_0,N_1,N_2\}$,$\forall n>N$:

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-\frac{a}{b}\right|=\left|\frac{b(x_n-a)-a(y_n-b)}{y_nb}\right|<\frac{2(|a|+|b|)}{b^2}\varepsilon,$$

因此(Ⅲ)也成立.

证毕

在上面的证明中,最后所得关于$|(\alpha x_n+\beta y_n)-(\alpha a+\beta b)|$、$|x_ny_n-ab|$和$\left|\frac{x_n}{y_n}-\frac{a}{b}\right|$的不等式都不是小于任意给定的$\varepsilon>0$,而是小于$\varepsilon$乘上一个常数,如$(|\alpha|+|\beta|)\varepsilon$、$(X+|b|)\varepsilon$和$\frac{2(|a|+|b|)}{b^2}\varepsilon$.请读者思考一下,为什么这样做并不违背数列极限的定义.

例 2.2.9 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}-(-2)^n}{3\cdot5^n+2\cdot3^n}$.

解

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}-(-2)^n}{3\cdot5^n+2\cdot3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5-\left(\frac{-2}{5}\right)^n}{3+2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n}=\frac{5}{3}.$$

例 2.2.10 求证:当 $a>0$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

证 我们已经证明当 $a>1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.当 $a=1$ 时,结论显然成立.现考虑$0<a<1$,这时$\frac{1}{a}>1$,利用极限的四则运算,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}=1.$$

证毕

例 2.2.11 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)$.

解
$$\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}=1.$$

这里用到了本节习题 6 的结论，即若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\geqslant 0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n}=\sqrt{a}$.

值得注意的是数列极限的四则运算只能推广到有限个数列的情况，而不能随意推广到无限个数列或不定个数的数列上去. 例如对极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right),$$

若将定理 2.2.5 性质(Ⅰ)随意推广，就会得出极限为 0 的错误结论. 事实上，由于

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

利用极限的夹逼性，就可以得到极限为 1.

例 2.2.12　设 $a_n>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，求证：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a.$$

证　当 $a>0$ 时，应用平均值不等式(定理 1.2.2)，有

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\geqslant n\Big/\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right).$$

将不等式的右端写成 $1\Bigg/\left(\dfrac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}\right)$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n>0$，可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{a}$，由例 2.2.6 和极限的四则运算，即知上面不等式左、右两端的极限都是 a. 应用极限的夹逼性，便得到

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a.$$

当 $a=0$ 时，显然有

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\geqslant 0=a.$$

同样可由极限的夹逼性推出结论成立.

证毕

习　　题

1. 按定义证明下列数列是无穷小量

(1) $\left\{\dfrac{n+1}{n^2+1}\right\}$； (2) $\{(-1)^n(0.99)^n\}$；

(3) $\left\{\dfrac{1}{n}+\mathrm{e}^{-n}\right\}$； (4) $\left\{\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^3}\right\}$；

(5) $\left\{\dfrac{n^2}{\mathrm{e}^n}\right\}$； (6) $\left\{\dfrac{\mathrm{e}^n}{n!}\right\}$；

(7) $\left\{\dfrac{n!}{n^n}\right\}$； (8) $\left\{\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}-\cdots+(-1)^n\dfrac{1}{2n}\right\}$

2.按定义证明下述极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-1}{3n^2+2}=\dfrac{2}{3}$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+n}}{n}=1$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\dfrac{1}{2}$； (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3n+2}=1$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$，其中 $x_n=\begin{cases}\dfrac{n+\sqrt{n}}{n}, & n\text{ 是偶数},\\ 1-\mathrm{e}^{-n}, & n\text{ 是奇数}.\end{cases}$

3.举例说明下列关于无穷小量的定义是不正确的：

(1)对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 N，使当 $n>N$ 时成立 $x_n<\varepsilon$；

(2)对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在无穷多个 x_n，使 $|x_n|<\varepsilon$.

4.设 k 是任意一个给定的自然数，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+k}=a$.

5.设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

6.设 $x_n\geqslant0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\geqslant0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n}=\sqrt{a}$.

7.$\{x_n\}$是无穷小量，$\{y_n\}$是有界数列，证明$\{x_ny_n\}$也是无穷小量.

8.利用夹逼法计算极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+\sqrt{1}}+\dfrac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}\right)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdots\cdot(2n)}$.（提示：应用不等式 $2k>\sqrt{(2k-1)(2k+1)}$.）

9.求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+4n-1}{n^2+1}$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+2n^2-3n+1}{2n^3-n+3}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+n^3}{3^{n+1}+(n+1)^3}$； (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n^2+1}-1\right)\sin\dfrac{n\pi}{2}$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$；　(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[4]{n^2+1}-\sqrt{n+1})$；

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{n!}}$；　(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

10. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ 存在，证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(a_1+2a_2+\cdots+na_n)=0$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(n!\cdot a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}=0(a_i>0, i=1,2,\cdots)$.

(提示：设 $a_1+a_2+\cdots+a_n=S_n$，则 $\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k=nS_n-\sum\limits_{k=1}^{n-1}S_k$.)

11. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=ab.$$

12. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a(-\infty<a<+\infty)$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0.$$

§3 无穷大量

无穷大量

按数列收敛定义，$\{n^2\}$，$\{(-2)^n\}$，$\{-e^n\}$ 等数列无疑都是发散的，但它们与 $\{(-1)^n\}$ 之类发散数列有一个根本区别，即当 n 增大时，其各项的绝对值也无限制地增大. 这样的数列我们称为**无穷大量**，其严格的分析定义可表述为：

定义 2.3.1 *若对于任意给定的 $G>0$，可以找到自然数 N，使得当 $n>N$ 时成立*

$$|x_n|>G,$$

则称数列 $\{x_n\}$ 是无穷大量，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\infty.$$

若采用符号表示法，"数列 $\{x_n\}$ 是无穷大量"可表示为：$\forall G>0$，$\exists N$，$\forall n>N$：$|x_n|>G$.

与极限定义中 ε 表示任意给定的很小的正数相类似，这里的 G 表示任意给定的很大的正数.

如果无穷大量 $\{x_n\}$ 从某一项开始都是正的(或负的)，则称其为正无穷大量(或负无穷大量)，统称为定号无穷大量，分别记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty(\text{或}\lim_{n\to\infty}x_n=-\infty).$$

显然,$\{n^2\}$是正无穷大量,$\{-c^n\}$是负无穷大量,而$\{(-2)^n\}$是(不定号)无穷大量.

例 2.3.1 设$|q|>1$,证明:$\{q^n\}$是无穷大量.

证 $\forall G>1$,取 $N=\left[\dfrac{\ln G}{\ln|q|}\right]$,于是$\forall n>N$,成立

$$|q|^n > |q|^{\frac{\ln G}{\ln|q|}} = G.$$

证毕

例 2.3.2 证明:$\left\{\dfrac{n^2-1}{n+5}\right\}$是正无穷大量.

证 当>5 时,有不等式

$$\frac{n^2-1}{n+5} > \frac{n}{2},$$

于是$\forall G>0$,取 $N=\max\{[2G],5\}$,对于$\forall n>N$,成立

$$\frac{n^2-1}{n+5} > \frac{n}{2} > G.$$

证毕

无穷大量与无穷小量之间有如下的关系:

定理 2.3.1 *设 $x_n\neq 0$,则$\{x_n\}$是无穷大量的充分必要条件是$\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$是无穷小量.*

证 设$\{x_n\}$是无穷大量,$\forall \varepsilon>0$,取 $G=\dfrac{1}{\varepsilon}>0$,于是$\exists N,\forall n>N$:$|x_n|>G=\dfrac{1}{\varepsilon}$,从而$\left|\dfrac{1}{x_n}\right|<\varepsilon$.

反过来,设$\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$是无穷小量,$\forall G>0$,取 $\varepsilon=\dfrac{1}{G}>0$,于是$\exists N,\forall n>N$:$\left|\dfrac{1}{x_n}\right|<\varepsilon=\dfrac{1}{G}$,从而$|x_n|>G$.

证毕

关于无穷大量的运算,如下的性质是显然的:同号无穷大量之和仍然是该符号的无穷大量,而异号无穷大量之差是无穷大量,其符号与被减无穷大量的符号相同;无穷大量与有界量之和或差仍然是无穷大量;同号无穷大量之积为正无穷大量,而异号无穷大量之积为负无穷大量.进一步,我们有下述与§2中习题 7 相对应的结论.

定理 2.3.2 *设$\{x_n\}$是无穷大量,若存在 $\delta>0$,使$\forall n>N$,$|y_n|\geqslant\delta$,则$\{x_ny_n\}$是无穷大量.*

推论 *设 $\{x_n\}$是无穷大量,$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b\neq 0$,则$\{x_ny_n\}$与$\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$都是无穷大*

量.

请读者自己完成定理 2.3.2 及其推论的证明(习题 3)

根据上面的讨论与定理,可直接求出下列极限:

$$\lim_{n\to\infty}(e^n+\sqrt{n})=+\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty}(n-\ln\frac{1}{n})=+\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\arctan n=+\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sin n}=\infty.$$

例 2.3.3 讨论极限

$$\lim_{n\to\infty}=\frac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\cdots+a_{k-1}n+a_k}{b_0n^l+b_1n^{l-1}+\cdots+b_{l-1}n+b_l},$$

其中 k,l 为自然数,$a_0\neq0,b_0\neq0$.

解

$$\frac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\cdots+a_{k-1}n+a_k}{b_0n^l+b_1n^{l-1}+\cdots+b_{l-1}n+b_l}=n^{k-l}\frac{a_0+\frac{a_1}{n}+\cdots+\frac{a_{k-1}}{n^{k-1}}+\frac{a_k}{n^k}}{b_0+\frac{b_1}{n}+\cdots+\frac{b_{l-1}}{n^{l-1}}+\frac{b_l}{n^l}}.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0+\frac{a_1}{n}+\cdots+\frac{a_{k-1}}{n^{k-1}}+\frac{a_k}{n^k}}{b_0+\frac{b_1}{n}+\cdots+\frac{b_{l-1}}{n^{l-1}}+\frac{b_l}{n^l}}=\frac{a_0}{b_0}\neq0,$$

可以得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\cdots+a_{k-1}n+a_k}{b_0n^l+b_1n^{l-1}+\cdots+b_{l-1}n+b_l}=\begin{cases}0, & k<l,\\ \frac{a_0}{b_0}, & k=l,\\ \infty, & k>l.\end{cases}$$

待定型

例 2.3.3 是无穷大量与无穷大量的商的极限问题,我们看到,对于 k 与 l 的不同情况,得出了截然不同的结果.事实上,若分别以 $+\infty,-\infty,\infty$ 与 0 表示正无穷大量,负无穷大量,无穷大量与无穷小量,则很容易举出例子说明,$(+\infty)+(-\infty),(+\infty)-(+\infty),(-\infty)-(-\infty),0\cdot\infty,\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}$ 的结果可以是无穷小量,或有非零极限,或是无穷大量,也可以没有极限.我们称这种类型的极限为**待定型**.

实际上,我们前面已接触过不少待定型极限问题.如$\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$就是$0\cdot\infty$待定型;当$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a\neq 0$时,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$就是$\frac{\infty}{\infty}$待定型.讨论无穷大量(及无穷小量)之间运算的极限,往往并不那么轻而易举,而是需要针对具体情况来作分别判断的.

下面介绍的 Stolz 定理将为求某些类型的待定型极限带来很大的方便.在叙述定理前,先给出单调数列的定义.

定义 2.3.2 如果数列$\{x_n\}$满足

$$x_n \leqslant x_{n+1}, \qquad n = 1,2,3,\cdots,$$

则称$\{x_n\}$为**单调增加数列**,记为$\{x_n\}\uparrow$;若进一步满足

$$x_n < x_{n+1}, \qquad n = 1,2,3,\cdots,$$

则称$\{x_n\}$为**严格单调增加数列**.

可以类似地定义**单调减少数列**和**严格单调减少数列**记为$\{x_n\}\downarrow$.

因为数列前面有限项的变化不会影响它的收敛性,所以下面我们谈到单调数列的场合,都可以将"从某一项开始为单调的数列"统统包括在内.

定理 2.3.3(Stolz 定理) 设$\{y_n\}$是单调增加的正无穷大量,且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a \quad (a \text{ 可以为有限量}, +\infty \text{ 与 } -\infty),$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = a.$$

证 先考虑$a=0$的情况.

由$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}=0$,可知$\forall\,\varepsilon>0,\exists N_1,\forall\, n>N_1$:

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon(y_n - y_{n-1}).$$

由于$\{y_n\}$是正无穷大量,显然可要求$y_{N_1}>0$,于是

$$\begin{aligned}\left|x_n - x_{N_1}\right| &\leqslant |x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_{n-2}| + \cdots + \left|x_{N_1+1} - x_{N_1}\right| \\ &< \varepsilon(y_n - y_{n-1}) + \varepsilon(y_{n-1} - y_{n-2}) + \cdots + \varepsilon(y_{N_1+1} - y_{N_1}) \\ &= \varepsilon(y_n - y_{N_1}).\end{aligned}$$

因为

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{x_n - x_{N_1}}{y_n - y_{N_1}}\cdot\frac{y_n - y_{N_1}}{y_n} + \frac{x_{N_1}}{y_n},$$

固定 N_1,又可以取到 $N>N_1$, $\forall n>N$: $\left|\frac{x_{N_1}}{y_n}\right|<\varepsilon$,从而

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right| \leqslant \left|\frac{x_n - x_{N_1}}{y_n - y_{N_1}} \cdot \frac{y_n - y_{N_1}}{y_n}\right| + \left|\frac{x_{N_1}}{y_n}\right| < 2\varepsilon.$$

当 a 是非零有限数时,令 $x_n' = x_n - ay_n$,于是

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n' - x_{n-1}'}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - a = 0.$$

从而由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n'}{y_n}=0$,得到

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n'}{y_n} + a = a.$$

对于 $a=+\infty$ 的情况,首先 $\exists N$, $\forall n>N$:

$$x_n - x_{n-1} > y_n - y_{n-1}.$$

于是 $\{x_n\}$ 也单调增加,且从 $x_n - x_N > x_n - y_N$ 可知 $\{x_n\}$ 是正无穷大量.将前面的结论应用到 $\left\{\frac{y_n}{x_n}\right\}$,得到

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = 0,$$

因而

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty.$$

对于 $a=-\infty$ 的情况,证明方法类同.

证毕

在§2.2,我们证明过,若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a$.这只要在 Stolz 定理中令 $x_n = a_1+a_2+\cdots+a_n$, $y_n = n$ 即可直接得到.

例 2.3.4 求极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} \quad (k \text{ 为自然数}).$$

解 令 $x_n = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$, $y_n = n^{k+1}$,由

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{(k+1)n^k - C_{k+1}^2 n^{k-1} + \cdots} = \frac{1}{k+1},$$

得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}=\frac{1}{k+1}.$$

例 2.3.5 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}$$

解 令 $x_n=a_1+2a_2+\cdots+na_n$，$y_n=n^2$，由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{n^2-(n-1)^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{2n-1}=\frac{a}{2},$$

得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\frac{a}{2}.$$

习　　题

1. 按定义证明下述数列为无穷大量

(1) $\left\{\dfrac{n^2+1}{2n+1}\right\}$；　　(2) $\left\{\ln\dfrac{1}{n}\right\}$；

(3) $\{n-\arctan n\}$；　　(4) $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\right\}$.

2. (1) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$（或 $-\infty$），按定义证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=+\infty(\text{或}-\infty);$$

(2) 设 $a_n>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，利用 Stolz 定理，证明：

$$\lim_{n\to\infty}(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}=0.$$

3. (1) 设 $\{x_n\}$ 是无穷大量，$|y_n|\geqslant\delta>0$，则 $\{x_ny_n\}$ 是无穷大量.

(2) 设 $\{x_n\}$ 是无穷大量，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b\neq0$，则 $\{x_ny_n\}$ 与 $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ 都是无穷大量.

4. (1) 利用 Stolz 定理，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n+1)^2}{n^3}=\frac{4}{3};$$

(2) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\dfrac{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n+1)^2}{n^3}-\dfrac{4}{3}\right]$.

5. 利用 Stolz 定理,证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_a n}{n}=0 \qquad (a>1)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0 \qquad (a>1, k$ 是自然数).

6. (1) 在 Stolz 定理中,若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\infty$,能否得出 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\infty$ 的结论?

(考虑例子:$x_n=(-1)^n n, y_n=n$.)

(2) 在 Stolz 定理中,若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$ 不存在,能否得出 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}$ 不存在的结论?

(考虑例子:$x_n=1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n-1}n, y_n=n^2$.)

7. 设 $0<\lambda<1$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,证明

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+\lambda a_{n-1}+\lambda^2 a_{n-2}+\cdots+\lambda^n a_0)=\frac{a}{1-\lambda}.$$

8. 设 $A_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$,当 $n\to\infty$ 时有极限. $\{p_n\}$ 为单调递增的正数数列,且 $p_n\to+\infty(n\to\infty)$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n}{p_n}=0.$$

(提示:先作代换 $a_k=A_k-A_{k-1}$,再应用 Stolz 定理.)

§4 收敛准则

单调有界数列收敛定理

知道了收敛数列必定有界,而有界的数列不一定收敛的结论之后,很自然会产生这样两个问题:

(1) 对有界的数列加上什么条件,就可以保证它必定收敛?

(2) 若不对有界数列加任何条件,则能得到怎样的(比收敛稍弱一些的)结论?

我们先来回答第一个问题:只要对有界数列加上如定义 2.3.2 的单调性,那么它就一定收敛,而极限就是该数列所构成的数集的上确界(当数列单调增加时)或下确界(当数列单调减少时).

定理 2.4.1 单调有界数列必定收敛.

证 不妨设数列 $\{x_n\}$ 单调增加且有上界,根据确界存在定理,由 $\{x_n\}$ 构成的数集必有上确界 β, β 满足:

(1) $\forall n\in N: x_n\leqslant\beta$;

(2) $\forall \varepsilon>0, \exists x_{n_0}: x_{n_0}>\beta-\varepsilon$.

取 $N=n_0, \forall n>N$:

$$\beta-\varepsilon<x_{n_0}\leqslant x_n\leqslant\beta.$$

因而 $|x_n-\beta|<\varepsilon$，于是得到

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\beta.$$

证毕

在按极限定义证明一个数列收敛时，都必须先知道它的极限是什么.这个要求对于许多实际情况来说并不现实，因为一个数列即使收敛，其极限也往往无法事先得知.定理 2.4.1 的重要性在于，它使我们可以从数列本身出发去研究其敛散性，进而，在判断出数列收敛时，利用极限运算的性质去求出相应的极限.

下面我们举例来说明它的应用.

例 2.4.1 设 $x_1>0, x_{n+1}=1+\frac{x_n}{1+x_n}, n=1,2,3,\cdots$. 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求它的极限.

解 首先，应用数学归纳法可直接得到：当 $n\geqslant 2$ 时，

$$1<x_n<2.$$

然后由 $x_{n+1}=1+\frac{x_n}{1+x_n}(n=1,2,3,\cdots)$，可得

$$x_{n+1}-x_n=\frac{x_n-x_{n-1}}{(1+x_n)(1+x_{n-1})}.$$

这说明对一切 $n\geqslant 2, x_{n+1}-x_n$ 具有相同符号，从而 $\{x_n\}$ 是单调数列.由定理 2.4.1, $\{x_n\}$ 收敛.

设 $\{x_n\}$ 的极限为 a，在等式 $x_{n+1}=1+\frac{x_n}{1+x_n}$ 两边同时求极限，得到方程

$$a=1+\frac{a}{1+a}.$$

解得方程的根为 $a=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$，由 $x_n>1$，舍去负值，即有

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

例 2.4.2 设 $0<x_1<1, x_{n+1}=x_n(1-x_n), n=1,2,3,\cdots$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求它的极限.

解 应用数学归纳法，可以得到当 $n\geqslant 1$ 时，

$$x_n>0.$$

然后由 $x_{n+1}=x_n(1-x_n)(n=1,2,3,\cdots)$，可得

$$x_{n+1} - x_n = -x_n^2 < 0.$$

这说明$\{x_n\}$单调减少有下界，由定理 2.4.1，$\{x_n\}$收敛.

设它的极限为 a，在等式 $x_{n+1}=x_n(1-x_n)$两边同时求极限，得到方程 $a=a(1-a)$，解得 $a=0$. 于是得到:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

应用 Stolz 定理(定理 2.3.3)，还可得到关于上述$\{x_n\}$的一个有意义的结果:

$$\lim_{n\to\infty}(nx_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\dfrac{1}{x_n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\dfrac{1}{x_{n+1}}-\dfrac{1}{x_n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}x_n}{x_n - x_{n+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2(1-x_n)}{x_n^2} = 1.$$

换言之，不管 $0<x_1<1$ 如何选取，当 n 充分大时，无穷小量$\{x_n\}$的变化规律与无穷小量$\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$愈来愈趋于一致，在许多场合，$\{x_n\}$可以用$\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$来代替. 以后我们将知道这两个无穷小量称为是等价的.

例 2.4.3 设 $x_1=\sqrt{2}, x_{n+1}=\sqrt{3+2x_n}, n=1,2,3,\cdots$. 证明数列$\{x_n\}$收敛，并求它的极限.

解 首先我们有 $0<x_1<3$. 设 $0<x_k<3$，则

$$0 < x_{k+1} = \sqrt{3+2x_k} < 3.$$

由数学归纳法，可知对一切 n，

$$0 < x_n < 3.$$

于是

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{3+2x_n} - x_n = \frac{(3-x_n)(1+x_n)}{\sqrt{3+2x_n}+x_n} > 0,$$

这说明数列$\{x_n\}$单调增加且有上界. 由定理 2.4.1 可知$\{x_n\}$收敛. 设它的极限为 a，对 $x_{n+1}=\sqrt{3+2x_n}$两边求极限，得到

$$a = \sqrt{3+2a},$$

解此方程，得到 $a=3$，即

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 3.$$

例 2.4.4 Fibonacci 数列与兔群增长率.

设一对小兔要经过 2 个季度才能成熟并可产小兔，每对成熟的兔子每季度产一对小兔，在不考虑兔子死亡的前提下，求兔群逐年增长率的变化趋势.

解 设开始只有 1 对刚出生的小兔，则在第一季与第二季，兔群只有 1 对兔

子.第三季,由于这对小兔成熟并产下1对小兔,兔群有2对兔子.第四季,1对大兔又产下1对小兔,而原来1对小兔处于成长期,所以兔群有3对兔子.第五季,又有1对小兔成熟,并与原来的1对大兔各产下1对兔子,兔群有5对兔子.以此类推.各季兔群情况可见下表:

季度	成熟兔对数	小兔对数	兔对总和
1	0	1	1
2	0	1	1
3	1	1	2
4	1	2	3
5	2	3	5
6	3	5	8
7	5	8	13

设 a_n 是第 n 季度兔对总数,则

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 5, \cdots$$

数列 $\{a_n\}$ 称为 **Fibonaici 数列**.

注意这样的事实:到第 $n+1$ 季度,能产小兔的兔对数为 a_{n-1},而第 $n+1$ 季度兔对的总数 a_{n+1} 应等于第 n 季度兔对的总数 a_n 加上新产下的小兔对数 a_{n-1},于是我们知道 $\{a_n\}$ 具有性质:

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \quad n = 2,3,4,\cdots.$$

令 $b_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$,它表示了兔群在第 $n+1$ 季度的增长率.显然我们有 $b_n > 0$,且

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{b_{n-1}}.$$

容易发现,当 $b_n > \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ 时,$b_{n+1} < \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$;而当 $b_n < \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ 时,$b_{n+1} > \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.由此可知 $\{b_n\}$ 并不是单调数列.

但是进一步探讨,可以发现有

$$b_{2k-1} \in \left(0, \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right), b_{2k} \in \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}, +\infty\right), k = 1,2,3,\cdots,$$

以及

$$b_{2k+2} - b_{2k} = 1 + \frac{1}{1 + \dfrac{1}{b_{2k}}} - b_{2k}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2} - b_{2k}\right)\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} + b_{2k}\right)}{1 + b_{2k}} < 0,$$

和

$$b_{2k+1}-b_{2k-1}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{b_{2k-1}}}-b_{2k-1}$$

$$=\frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}-b_{2k-1}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}+b_{2k-1}\right)}{1+b_{2k-1}}>0.$$

于是$\{b_{2k}\}$是单调减少的有下界的数列,而$\{b_{2k+1}\}$是单调增加的有上界的数列,因而都是收敛数列.记它们的极限分别为 a 与 b,显然有$\frac{\sqrt{5}+1}{2}\leqslant a<+\infty$,$0<b\leqslant\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

由$\lim\limits_{k\to\infty}b_{2k+2}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1+2b_{2k}}{1+b_{2k}}$得到

$$a=\frac{1+2a}{1+a};$$

以及由$\lim\limits_{k\to\infty}b_{2k+1}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1+2b_{2k-1}}{1+b_{2k-1}}$得到

$$b=\frac{1+2b}{1+b}.$$

这两个方程有相同的解 $a=b=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.舍去负值解,于是我们得出结论:在不考虑兔子死亡的前提下,经过较长一段时间,兔群逐季增长率趋于$\frac{\sqrt{5}+1}{2}\approx 1.618$.

π 和 e

下面我们利用数列的"单调有界必定收敛"性质,来导出最重要的而个无理数——π 和 e.

设单位圆内接正 n 边形的半周长为 L_n,则 $L_n=n\sin\frac{180^\circ}{n}$.在本章§2 中曾经指出,数列$\{L_n\}$应该收敛到该圆的半周长,即圆周率 π.现在我们来严格证明$\{L_n\}$的极限确实存在.

例 2.4.5 数列$\left\{n\sin\frac{180^\circ}{n}\right\}$收敛.

证 令 $t=\frac{180^\circ}{n(n+1)}$,则当 $n\geqslant 3$ 时,$nt\leqslant 45^\circ$.于是

$$\tan nt=\frac{\tan(n-1)t+\tan t}{1-\tan(n-1)t\tan t}\geqslant\tan(n-1)t+\tan t\geqslant\cdots\geqslant n\tan t,$$

从而,

$$\sin(n+1)t = \sin nt\cos t + \cos nt\sin t$$
$$= \sin nt\cos t\left(1+\frac{\tan t}{\tan nt}\right)$$
$$\leqslant \frac{n+1}{n}\sin nt,$$

所以,当 $n\geqslant 3$ 时,

$$L_n = n\sin\frac{180^\circ}{n} \leqslant (n+1)\sin\frac{180^\circ}{n+1} = L_{n+1}.$$

另一方面,单位圆内接正 n 边形的面积

$$S_n = n\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n} < 4,$$

因此当 $n\geqslant 3$ 时,

$$L_n = n\sin\frac{180^\circ}{n} < \frac{4}{\cos\frac{180^\circ}{n}} \leqslant \frac{4}{\cos 60^\circ} = 8.$$

综上所述,数列 $\{L_n\}$ 单调增加且有上界,因而收敛.将这个极限用希腊字母 π 来记,就有

$$\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{180^\circ}{n} = \pi.$$

证毕

注 有了 π 的定义,就可以定义角度的弧度制了.由于单位圆的半周长为 π,我们就把半个圆周所对的圆心角(即 180°)的弧度定义为 π,其余角度的弧度则按比例得到.于是对单位圆来说,一个圆心角的弧度恰好等于它所对的圆弧的长度.

设单位圆的内接正 n 边形的面积为 S_n,则 S_n 的极限就是单位圆的面积.由于

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n} = \pi,$$

可知单位圆的一个扇形的面积等于其顶角弧度的一半.

在弧度制下,上例中的极限式又可以写成

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n} = 1$$

例2.4.6 数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 单调增加, $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ 单调减少,两者收敛于同一极限.

证 记 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$,利用平均值不等式

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\quad(a_k\geqslant 0,k=1,2,3,\cdots,n)$$

得到

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 1\leqslant\left[\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}\right]^{n+1}=x_{n+1},$$

和

$$\frac{1}{y_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\cdot 1\leqslant\left[\frac{(n+1)\frac{n}{n+1}+1}{n+2}\right]^{n+2}=\frac{1}{y_{n+1}}.$$

这表示$\{x_n\}$单调增加，而$\{y_n\}$单调减少. 又由于

$$2=x_1<x_n<y_n<y_1=4,$$

可知数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$都收敛. 因为$y_n=x_n\left(1+\frac{1}{n}\right)$，所以它们具有相同的极限.

证毕

习惯上用字母 e 来表示这一极限，即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\mathrm{e},$$

e=2.718 281 8…是自然对数的底.

作为定理 2.4.1 的进一步应用，我们讨论数列$\{a_n\}$，其中

$$a_n=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}\quad(p>0).$$

例 2.4.7 当$p>1$时，数列$\{a_n\}$收敛；当$0<p\leqslant 1$时，数列$\{a_n\}$是正无穷大量.

证 显然数列$\{a_n\}$是单调增加的，它的收敛与否取决于其是否有界.

当$p>1$时，记$\frac{1}{2^{p-1}}=r$，则$0<r<1$. 由于

$$\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}<\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}=r,$$

$$\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}<\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}=r^2$$

…………

$$\frac{1}{2^{kp}}+\frac{1}{(2^k+1)^p}+\cdots+\frac{1}{(2^{k+1}-1)^p}<\frac{2^k}{2^{kp}}=r^k$$

可知

$$a_n\leqslant a_{2^n-1}<1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}<\frac{1}{1-r},$$

这说明当 $p>1$ 时,数列 $\{a_n\}$ 收敛.

当 $p\leqslant 1$ 时,我们有

$$\frac{1}{2^p}\geqslant\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}+\frac{1}{8^p}>\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

……

$$\frac{1}{(2^k+1)^p}+\frac{1}{(2^k+2)^p}+\cdots+\frac{1}{(2^{k+1})^p}>\frac{2^k}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}$$

因而

$$a_{2^n}>1+\frac{n}{2}.$$

这说明当 $p\leqslant 1$ 时,数列 $\{a_{2^n}\}$ 是正无穷大量,即 $\forall\, G>0,\exists\, N_1,\forall\, n>N_1:a_{2^n}>G$. 利用数列 $\{a_n\}$ 的单调性,取 $N=2^{N_1+1}$, $\forall\, n>N$:

$$a_n>a_{2^{N_1+1}}>G.$$

证毕

在上例中,特别当 $p=1$ 时,$\{a_n\}=\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\}$ 是无穷大量. 下面给出与此有关的几个重要的结果.

例 2.4.8 若记 $b_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$,则数列 $\{b_n\}$ 收敛.

证 由例 2.4.6,可知

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

由此得到

$$\frac{1}{n+1}<\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}.$$

于是有

$$\begin{aligned} b_{n+1}-b_n&=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n\\ &=\frac{1}{n+1}-\ln\frac{n+1}{n}<0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\\ &>\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}-\ln n\end{aligned}$$

$$= \ln(n+1) - \ln n > 0.$$

这说明数列 $\{b_n\}$ 单调减少有下界,从而收敛.

证毕

$\{b_n\}$ 的极限 $\gamma = 0.577\ 215\ 664\ 90\cdots$ 称为 **Euler** 常数.

例 2.4.9 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=\ln 2.$

解 记 $c_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$,则显然有

$$c_n = b_{2n} - b_n + \ln(2n) - \ln n = b_{2n} - b_n + \ln 2.$$

即得到

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right) = \ln 2.$$

例 2.4.10 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right]=\ln 2.$

解 记 $d_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$. 由于

$$b_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}-\ln n \to \gamma\ (n\to\infty),$$

和

$$\begin{aligned} b_{2n} &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6} \\ &\quad +\cdots+\frac{1}{2n-2}+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-\ln 2n \to \gamma,\ (n\to\infty), \end{aligned}$$

考虑 $b_{2n}-b_n$,用 b_{2n} 中的第 $2k$ 项与 b_n 中的第 k 项($k=1,2,\cdots,n$)对应相减,得到

$$\begin{aligned} b_{2n}-b_n &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}-\ln 2 \\ &= d_{2n}-\ln 2 \to 0 \quad (n\to\infty). \end{aligned}$$

由于 $d_{2n+1}=d_{2n}+\frac{1}{2n+1}$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=0$,即可得到

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right]=\ln 2.$$

闭区间套定理

定义 2.4.1 如果一列闭区间 $\{[a_n,b_n]\}$ 满足条件

(1) $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$, $n=1,2,3,\cdots$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$,

则称这列闭区间形成一个**闭区间套**.

定理 2.4.2(闭区间套定理) 如果 $\{[a_n,b_n]\}$ 形成一个闭区间套,则存在

唯一的实数 ξ 属于所有的闭区间$[a_n,b_n]$，且 $\xi=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$($a_n\uparrow\xi$ 且 $b_n\downarrow\xi$).

证 由条件(1)可得

$$a_1\leqslant\cdots\leqslant a_{n-1}\leqslant a_n<b_n\leqslant b_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant b_1.$$

显然$\{a_n\}$单调增加而有上界 b_1，$\{b_n\}$单调减少而有下界 a_1，由定理 2.4.1，$\{a_n\}$与$\{b_n\}$都收敛.

设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\xi$，则

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}[(b_n-a_n)+a_n]=\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)+\lim_{n\to\infty}a_n=\xi.$$

由于 ξ 是$\{a_n\}$所构成的数集的上确界，也是$\{b_n\}$所构成的数集的下确界，于是有

$$a_n\leqslant\xi\leqslant b_n,\qquad n=1,2,3,\cdots,$$

即 ξ 属于所有闭区间$[a_n,b_n]$.

若另有实数 ξ' 属于所有的闭区间$[a_n,b_n]$，则也有

$$a_n\leqslant\xi'\leqslant b_n,\qquad n=1,2,3,\cdots,$$

令 $n\to\infty$，由极限的夹逼性得到

$$\xi'=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\xi,$$

此即说明满足定理结论的实数 ξ 是唯一的.

证毕

需要指出，若将定理条件中的闭区间套改为开区间套，则数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$依然收敛于同一个极限 ξ，但这个 ξ 可能不属于任何一个开区间(a_n,b_n)，请读者自己举出例子.

在定理 1.1.2 我们证明了有理数集 **Q** 是可列集，利用闭区间套定理，可以证明

定理 2.4.3 *实数集是不可列集.*

证 用反证法.假设实数集 **R** 是可列集，即可以找到一种排列的规则，使

$$\mathbf{R}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}.$$

先取一个闭区间$[a_1,b_1]$，使 $x_1\overline{\in}[a_1,b_1]$，这总是可以做到的.然后将$[a_1,b_1]$三等分，则在闭区间 $\left[a_1,\frac{2a_1+b_1}{3}\right]$，$\left[\frac{2a_1+b_1}{3},\frac{a_1+2b_1}{3}\right]$，$\left[\frac{a_1+2b_1}{3},b_1\right]$中，至少有一个不含有 x_2，把它记为$[a_2,b_2]$.再将$[a_2,b_2]$三等分，同样，在闭区间$\left[a_2,\frac{2a_2+b_2}{3}\right]$，$\left[\frac{2a_2+b_2}{3},\frac{a_2+2b_2}{3}\right]$，$\left[\frac{a_2+2b_2}{3},b_2\right]$中，至少有一个不含有 x_3，把它记为$[a_3,b_3]$.……

这样的步骤可一直做下去，于是得到一个闭区间套$\{[a_n,b_n]\}$，满足

$$x_n \overline{\in} [a_n, b_n], \qquad n = 1,2,3,\cdots.$$

由闭区间套定理,存在唯一的实数 ξ 属于所有的闭区间$[a_n, b_n]$,换言之,$\xi \neq x_n, n = 1,2,3,\cdots,$,这就与集合$\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$表示实数集 $\mathbf{R}$ 产生矛盾.

证毕

子列

为了回答本节一开始提出的第二个问题,先引入**子列**的概念.

定义 2.4.2 *设$\{x_n\}$是一个数列,而*

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$$

是一列严格单调增加的自然数,则

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}, \cdots$$

*也形成一个数列,称为数列$\{x_n\}$的***子列**,*记为$\{x_{n_k}\}$.*

这里,下标"n_k"表示子列中的第 k 项恰好是原数列中的第 n_k 项.例如在数列$\{x_n\}$中,取其偶数项所构成的子列可表示为$\{x_{2k}\}$.又若取 $n_k = 2^k$,则子列$\{x_{n_k}\}$是通过依次选取原数列$\{x_n\}$中的第 2 项,第 4 项,第 8 项,第 16 项,…而构成的数列.

由于子列下标"n_k"的严格单调增加性质,可知成立

$$n_k \geqslant k, \qquad \forall k \in \mathbf{N}$$

和

$$n_j \geqslant n_k, \qquad \forall j \geqslant k, \quad j, k \in \mathbf{N}.$$

定理 2.4.4 *若数列$\{x_n\}$收敛于 a,则它的任何子列$\{a_{n_k}\}$也收敛于 a,即*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a.$$

证 由$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,可知$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N$

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

取 $K = N$,于是当 $k > K$ 时,有 $n_k \geqslant k > N$,因而成立

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon.$$

证毕

定理 2.4.4 经常被用来判断一个数列的发散.

推论 *若存在数列$\{x_n\}$的两个子列$\{x_{n_k}^{(1)}\}$与$\{x_{n_k}^{(2)}\}$,分别收敛于不同的极限,则数列$\{x_n\}$必定发散.*

例2.4.11 数列$\left\{\sin \frac{n\pi}{4}\right\}$发散.

证 取 $n_k^{(1)} = 4k, n_k^{(2)} = 8k + 2$,则子列$\{x_{n_k}^{(1)}\}$收敛子 0,而子列$\{x_{n_k}^{(2)}\}$收敛于 1,由上述推论可知$\{x_n\}$发散.

证毕

Bolzano－Weierstrass 定理

现在我们来回答第二个问题:如果把单调这一条件去掉,只考虑数列是有界的,则只能得到下面稍弱的结论.

定理 2.4.5(Bolzano－Weierstrass 定理) *有界数列必有收敛子列.*

证 设数列$\{x_n\}$有界,于是存在实数a_1,b_1,成立

$$a_1 \leqslant x_n \leqslant b_1, \qquad n = 1,2,3,\cdots.$$

将闭区间$[a_1,b_1]$等分为两个小区间$\left[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}\right]$与$\left[\frac{a_1+b_1}{2},b_1\right]$,则其中至少有一个含有数列$\{x_n\}$中的无穷多项,把它记为$[a_2,b_2]$.再将闭区间$[a_2,b_2]$等分为两个小区间$\left[a_2,\frac{a_2+b_2}{2}\right]$与$\left[\frac{a_2+b_2}{2},b_2\right]$,同样其中至少有一个含有数列$\{x_n\}$中的无穷多项,把它记为$[a_3,b_3,]$.……这样的步骤可以一直做下去,于是得到一个闭区间套$\{[a_k,b_k]\}$,其中每一个闭区间$[a_k,b_k]$中都含有数列$\{x_n\}$中无穷多项.

根据闭区间套定理,存在实数ξ,满足

$$\xi = \lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k.$$

现在我们证明数列$\{x_n\}$必有一子列收敛于实数ξ.

首先在$[a_1,b_1]$中选取$\{x_n\}$中某一项,记它为x_{n_1}.然后,因为在$[a_2,b_2]$中含有$\{x_n\}$中无穷多项,可以选取位于x_{n_1}后的某一项,记它为x_{n_2},$n_2>n_1$.继续这样做下去,在选取$x_{n_k}\in[a_k,b_k]$后,因为在$[a_{k+1},b_{k+1}]$中仍含有$\{x_n\}$中无穷多项,可以选取位于x_{n_k}后的某一项,记它为$x_{n_{k+1}}$,$n_{k+1}>n_k$.这样就得到了数列$\{x_n\}$的一个子列$\{x_{n_k}\}$,满足

$$a_k \leqslant x_{n_k} \leqslant b_k, \qquad k = 1,2,3,\cdots.$$

由$\lim\limits_{k\to\infty} a_k=\lim\limits_{k\to\infty} b_k=\xi$,利用极限的夹逼性,得到

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi.$$

证毕

当数列无界时,也有与定理 2.4.5 相对应的结论.

定理 2.4.6 *若$\{x_n\}$是一个无界数列,则存在子列$\{x_{n_k}\}$,使得*

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \infty.$$

证 由于$\{x_n\}$无界,因此对任意$M>0$,$\{x_n\}$中必存在无穷多个x_n,满足

$$|x_n| > M,$$

否则可以得出$\{x_n\}$有界的结论.

令 $M_1=1$,则存在 x_{n_1},使得 $|x_{n_1}|>1$;再令 $M_2=2$,因为在 $\{x_n\}$ 中有无穷多项满足 $|x_n|>2$,我们可以取到排在 x_{n_1} 之后的 x_{n_2},$n_2>n_1$,使得 $|x_{n_2}|>2$. 继续令 $M_3=3$,同理可以取到 x_{n_3},$n_3>n_2$,使得 $|x_{n_3}|>3$. ……这样便得到 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$,满足

$$\left|x_{n_k}\right|>k,$$

由定义,

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=\infty.$$

证毕

Cauchy 收敛原理

前面已经指出,从数列 $\{x_n\}$ 本身的特征直接判断它是否收敛是个很有意义的重要问题.但"单调有界数列必定收敛"这一定理只是给出了判断数列收敛的一个充分而非必要的条件,事实上,许多收敛的数列并非是单调的,Fibonacci 数列的增长率数列即为一例.

所以,有必要从数列本身出发来寻找其收敛的充分必要条件,为此,先引进基本数列的概念.

定义 2.4.3 如果数列 $\{x_n\}$ 具有以下特性:$\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall n,m>N$:

$$|x_n-x_m|<\varepsilon,$$

则称数列 $\{x_n\}$ 是一个**基本数列**.

例 2.4.12 设 $x_n=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}$,则 $\{x_n\}$ 是一个基本数列.

证 对任意自然数 n 与 m,不妨设 $m>n$,则

$$\begin{aligned}x_m-x_n&=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{m^2}\\&<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(m-1)m}\\&=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}\right)\\&=\frac{1}{n}-\frac{1}{m}<\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

对任意给定的 $\varepsilon>0$,取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$,当 $m>n>N$ 时,成立

$$|x_m-x_n|<\varepsilon.$$

证毕

例 2.4.13 设 $x_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$,则 $\{x_n\}$ 不是基本数列.

证 对任意自然数 n,有

$$x_{2n}-x_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$
$$>n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$，无论 N 多么大，总存在自然数 $n>N, m=2n>N$，使得

$$|x_m-x_n|=|x_{2n}-x_n|>\varepsilon_0,$$

因此 $\{x_n\}$ 不是基本数列.

证毕

定理 2.4.7(Cauchy 收敛原理)　*数列 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是：$\{x_n\}$ 是基本数列.*

证　先证必要性. 设 $\{x_n\}$ 收敛于 a，按照定义，$\forall\varepsilon>0, \exists N, \forall n, m>N$：

$$|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}, |x_m-a|<\frac{\varepsilon}{2},$$

于是

$$|x_m-x_n|\leqslant|x_m-a|+|x_n-a|<\varepsilon.$$

再证充分性.

先证明基本数列必定有界. 取 $\varepsilon_0=1$，因为 $\{x_n\}$ 是基本数列，所以 $\exists N_0$，$\forall n>N_0$：

$$\left|x_n-x_{N_0+1}\right|<1$$

令 $M=\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_{N_0}|,|x_{N_0+1}|+1\}$，则对一切 n，成立

$$|x_n|\leqslant M.$$

由 Bolzano－Weierstrass 定理，在 $\{x_n\}$ 中必有收敛子列：

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=\xi.$$

因为 $\{x_n\}$ 是基本数列，$\forall\varepsilon>0, \exists N, \forall n, m>N$：

$$|x_n-x_m|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

在上式中取 $x_m=x_{n_k}$，其中 k 充分大，满足 $n_k>N$，并且令 $k\to\infty$，于是得到

$$|x_n-\xi|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

此即表明数列 $\{x_n\}$ 收敛.

证毕

由 Cauchy 收敛原理可知，例 2.4.12 中数列 $\{x_n\}$ 收敛，而例 2.4.13 中数列 $\{x_n\}$ 发散. 这与例 2.4.7 中得到的结论是一致的.

Cauchy 收敛原理表明由实数构成的基本数列$\{x_n\}$必存在实数极限,这一性质称为实数系的**完备性**.值得注意的是有理数集不具有完备性.例如$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$是由有理数构成的基本数列,我们将在学习了微分之后严格证明,其极限 e 并不是有理数.

例 2.4.14 设数列$\{x_n\}$满足**压缩性条件**:

$$|x_{n+1}-x_n| \leqslant k|x_n - x_{n-1}|,\quad 0<k<1, n=2,3,\cdots,$$

则$\{x_n\}$收敛.

证 只要证明$\{x_n\}$是基本数列即可.

首先对于一切 n,我们有

$$\begin{aligned}|x_{n+1}-x_n| &\leqslant k|x_n - x_{n-1}| < k^2|x_{n-1}-x_{n-2}| \\ &< \cdots < k^{n-1}|x_2 - x_1|.\end{aligned}$$

设 $m>n$,则

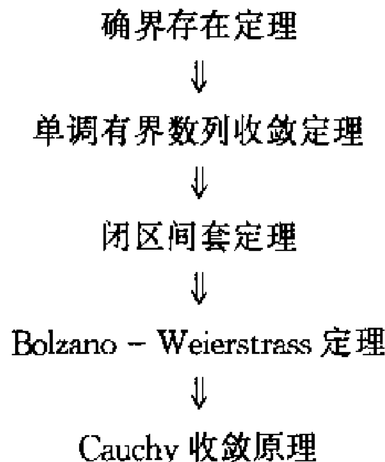
$$\begin{aligned}|x_m - x_n| &\leqslant |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1}-x_{m-2}| + \cdots + |x_{n+1}-x_n| \\ &< k^{m-2}|x_2-x_1| + k^{m-3}|x_2 - x_1| + \cdots + k^{n-1}|x_2 - x_1| \\ &< \frac{k^{n-1}}{1-k}|x_2 - x_1| \to 0 (n\to\infty),\end{aligned}$$

因此$\{x_n\}$是基本数列,从而收敛.

证毕

实数系的基本定理

我们在§1 中证明了实数系连续性定理——确界存在定理.在本节中,我们又依次证明了单调有界数列收敛定理、闭区间套定理、Bolzano - Weierstrass 定理与实数系完备性定理——Cauchy 收敛原理.通过分析它们的证明,可以发现它们之间的逻辑推理关系:



也就是说,实数系的连续性包含了实数系的完备性.

下面我们证明实数系的完备性也包含了实数系的连续性.也就是说,在实数系中,完备性与连续性这两个概念是等价的.

定理 2.4.8　实数系的完备性等价于实数系的连续性.

证　我们分两步

Cauchy 收敛原理 ⇒ 闭区间套定理 ⇒ 确界存在定理

来证明实数系的完备性包含实数系的连续性.

先证明:Cauchy 收敛原理 ⇒ 闭区间套定理.

设$\{[a_n,b_n]\}$是一列闭区间,满足条件

(i)$[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$,　$n=1,2,3,\cdots$;

(ii)$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$.

设 $m>n$,则

$$0\leqslant a_m-a_n<b_n-a_n\to 0\ (n\to\infty),$$

所以数列$\{a_n\}$是一基本数列,从而有

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\xi,$$

并由此得到

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)+\lim_{n\to\infty}a_n=\xi.$$

由于数列$\{a_n\}$单调增加,数列$\{b_n\}$单调减少,可以知道 ξ 是属于所有闭区间$[a_n,b_n]$的唯一实数.闭区间套定理得证.

再证明:闭区间套定理 ⇒ 确界存在定理.

设 S 是非空有上界的实数集合,又设 T 是由 S 的所有上界所组成的集合,现证 T 含有最小数,即 S 有上确界.

取 $a_1\overline{\in}T$,$b_1\in T$,显然 $a_1<b_1$.现按下述规则依次构造一列闭区间:

$$[a_2,b_2]=\begin{cases}\left[a_1,\dfrac{a_1+b_1}{2}\right], & 若\dfrac{a_1+b_1}{2}\in T,\\[2mm] \left[\dfrac{a_1+b_1}{2},b_1\right], & 若\dfrac{a_1+b_1}{2}\overline{\in}T;\end{cases}$$

$$[a_3,b_3]=\begin{cases}\left[a_2,\dfrac{a_2+b_2}{2}\right], & 若\dfrac{a_2+b_2}{2}\in T,\\[2mm] \left[\dfrac{a_2+b_2}{2},b_2\right], & 若\dfrac{a_2+b_2}{2}\overline{\in}T;\end{cases}$$

…………

由此得到一个闭区间套$\{[a_n,b_n]\}$,满足

$$a_n\overline{\in}T,\quad b_n\in T,\qquad n=1,2,3,\cdots.$$

由闭区间套定理,存在唯一实数 ξ 属于所有的闭区间 $[a_n, b_n]$,且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$. 现只需说明 ξ 是集合 T 的最小数,也就是集合 S 的上确界.

若 $\xi \notin T$,即 ξ 不是集合 S 的上界,则存在 $x \in S$,使得 $\xi < x$. 由 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$,可知当 n 充分大时,成立 $b_n < x$,这就与 $b_n \in T$ 发生矛盾,所以 $\xi \in T$.

若存在 $\eta \in T$,使得 $\eta < \xi$,则由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi$,可知当 n 充分大时,成立 $\eta < a_n$. 由于 $a_n \notin T$,于是存在 $y \in S$,使得 $\eta < a_n < y$,这就与 $\eta \in T$ 发生矛盾. 从而得出 ξ 是集合 S 的上确界的结论. 确界存在定理得证.

证毕

因此上述五个定理是等价的,即从其中任何一个定理出发都可以推断出其它的定理,所以,这五个定理中的每一个都可以称为是实数系的基本定理.

习　题

1. 利用单调有界数列必定收敛的性质,证明下述数列收敛,并求出极限

(1) $x_1 = \sqrt{2}, x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, n = 1, 2, 3, \cdots$;

(2) $x_1 = \sqrt{2}, x_{n+1} = \sqrt{2x_n}, n = 1, 2, 3, \cdots$;

(3) $x_1 = \sqrt{2}, x_{n+1} = \dfrac{-1}{2 + x_n}, n = 1, 2, 3, \cdots$;

(4) $x_1 = 1, x_{n+1} = \sqrt{4 + 3x_n}, n = 1, 2, 3, \cdots$;

(5) $0 < x_1 < 1, x_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - x_n}, n = 1, 2, 3, \cdots$;

(6) $0 < x_1 < 1, x_{n+1} = x_n(2 - x_n), n = 1, 2, 3, \cdots$;

2. 利用递推公式与单调有界数列的性质,证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{4}{7} \cdots \dfrac{n+1}{2n+1} = 0$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0 \quad (a > 1)$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$.

3. 设 $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{2}{x_n}\right), n = 1, 2, 3, \cdots$,分 $x_1 = 1$ 与 $x_1 = -2$ 两种情况求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

4. 设 $x_1 = a, x_2 = b, x_{n+2} = \dfrac{x_{n+1} + x_n}{2}, n = 1, 2, 3, \cdots$,求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

5. 给定 $0 < a < b$,令 $x_1 = a, y_1 = b$.

(1)若 $x_{n+1}=\sqrt{x_n y_n}, y_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}, n=1,2,3,\cdots$,

证明$\{x_n\},\{y_n\}$收敛,且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.这个公共极限称为 a 与b 的**算术几何平均**.

(2)若 $x_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}, y_{n+1}=\dfrac{2x_n y_n}{x_n+y_n}, n=1,2,3,\cdots$,

证明$\{x_n\},\{y_n\}$收敛,且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.这个公共极限称为 a 与b 的**算术调和平均**.

6. 设 $x_1=\sqrt{2}, x_{n+1}=\dfrac{1}{2+x_n}, n=1,2,3,\cdots$,证明数列$\{x_n\}$收敛,并求极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

7. 设$\{x_n\}$是一单调数列,证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的充分必要条件是存在子列$\{x_{n_k}\}$:

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=a.$$

8. 证明:若有界数列$\{x_n\}$不收敛,则必存在两个子列$\{x_{n_k}^{(1)}\}$与$\{x_{n_k}^{(2)}\}$收敛于不同的极限,即$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}^{(1)}=a, \lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}^{(2)}=b, a\neq b$.

9. 证明:若数列$\{x_n\}$无界,但非无穷大量,则必存在两个子列$\{x_{n_k}^{(1)}\}$与$\{x_{n_k}^{(2)}\}$,其中$\{x_{n_k}^{(1)}\}$是无穷大量,$\{x_{n_k}^{(2)}\}$是收敛子列.

10. 设 S 是非空有上界的数集,$\sup S=a\overline{\in}S$.证明在数集 S 中可取出严格单调增加的数列$\{x_n\}$:$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

11. 设$\{(a_n,b_n)\}$是一列开区间,满足条件:

(1)$a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots<b_n<\cdots<b_2<b_1$,

(2)$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$.

证明存在唯一的实数 ξ 属于所有的开区间(a_n,b_n),且 $\xi=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

12. 利用 Cauchy 收敛原理证明下述数列收敛

(1)$x_n=a_0+a_1q+a_2q^2+\cdots+a_nq^n \quad (|q|<1,|a_k|\leqslant M)$;

(2)$x_n=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$.

13. (1)设数列$\{x_n\}$满足条件$\lim\limits_{n\to\infty}|x_{n+1}-x_n|=0$,问$\{x_n\}$是否一定是基本数列.

(2)设数列$\{x_n\}$满足条件$|x_{n+1}-x_n|<\dfrac{1}{2^n}, n=1,2,3,\cdots$,证明$\{x_n\}$是基本数列.

14. 对于数列$\{x_n\}$构造数集 A_k:

$$A_k = \{x_n \mid n \geqslant k\} = \{x_k, x_{k+1}, \cdots\}.$$

记 $\operatorname{diam} A_k = \sup\{|x_n - x_m|, x_n \in A_k, x_m \in A_k\}$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{diam} A_k = 0.$$

15. 利用 Cauchy 收敛原理证明：单调有界数列必定收敛.（提示：采用反证法.）



第三章　函数极限与连续函数

§1　函数极限

函数极限的定义

我们在第二章讨论了数列的极限,现在来讨论另一类极限,即函数的极限.设 $y=f(x)$是一给定的函数,我们考虑这样的问题:当自变量趋于某个点 x_0 时,因变量 y 是否相应地趋于某个定值 A.

先看一个例子.在半径为 r 的圆上任取一小段圆弧,记它所对的圆心角的弧度为 $2x$,则圆弧长度为 $2xr$,而圆弧所对的弦的长度为 $2r\sin x$,弦长与弧长之比值 y 是 x 的函数,其关系式为 $y=\frac{\sin x}{x}$.现问当 x 趋于0时,y 是否趋于某个固定值?

如果我们分别取 x 为0.5, 0.1, 0.05, 0.01,…,可求出 y 的相应值分别为0.96, 0.998, 0.999 6, 0.999 8,….可以看出,随着 x 趋来越接近于0,$y=\frac{\sin x}{x}$的值也趋来越接近于1.因此我们有理由猜测,当 x 趋于0时,$y=\frac{\sin x}{x}$趋于1,并记为$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.后面我们将对这一极限给出严格证明.

必须注意,在 x 趋于0的过程中,我们不取 $x=0$(事实上,当 $x=0$ 时,函数$\frac{\sin x}{x}$没有意义).我们当前关心的是在 x 趋于0的过程中,函数 $y=\frac{\sin x}{x}$的变化趋势,而对函数在 $x=0$ 处是否有意义,如果有意义的话取值为多少之类的问题,暂时都不予考虑.

下面我们给出函数极限的严格定义.

定义 3.1.1　*设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的某个去心邻域中有定义,即存在 $\rho>0$,使*

$$O(x_0,\rho)\setminus\{x_0\}\subset D_f.$$

如果存在实数 A,对于任意给定的 $\varepsilon>0$,可以找到 $\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$时,成立

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称 A 是函数$f(x)$在点 x_0 的极限,记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A,$$

或

$$f(x)\to A\quad(x\to x_0).$$

如果不存在具有上述性质的实数 A,则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 的极限不存在.

图 3.1.1 表示了这个定义的几何意义. 在直角平面坐标系 Oxy 的 y 轴上取以 A 为中心,ε 为半径的一个开区间 $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$,即 A 点的 ε 邻域 $O(A,\varepsilon)$;在 x 轴上存在一个以 x_0 为中心,δ 为半径的开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$,即 x_0 点的 δ 邻域 $O(x_0,\delta)$,"当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,成立 $|f(x)-A|<\varepsilon$"表示 $O(x_0,\delta)$ 中除 x_0 之外的所有点的函数值都落在点 A 的 ε 邻域中.

跟数列极限的情况类似,ε 既是任意的,又是给定的. 一方面,只有当 ε 给定时,才能确定正数 δ(δ 是由 ε 决定的);另一方面,由于 ε 具有任意性,也就是说图 3.1.1 中上下两条横线的距离可以任意收缩. 但无论收缩得多小,都能找到正数 δ,使得当 x 处于 x_0 的 δ 去心邻域时,$f(x)$ 落在由这两条线界定的范围中. 将这两方面结合起来,就不难理解,A 必为 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限值(见图 3.1.1).

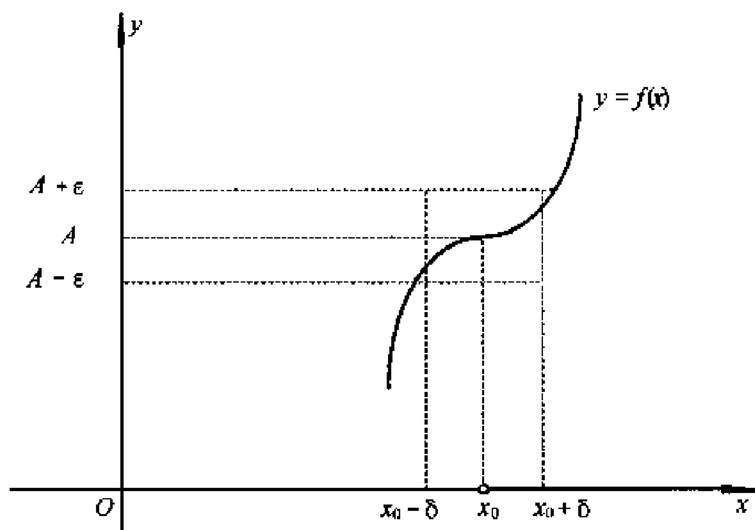


图 3.1.1

上述函数极限的定义可利用符号表述为:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x(0 < |x - x_0| < \delta):$$

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

例 3.1.1 证明 $\lim\limits_{x\to 0} e^x = 1$.

证 按极限定义,$\forall \varepsilon>0$(不妨设 $0<\varepsilon<1$),要找 $\delta>0$,使得当 $0<|x|<\delta$ 时,成立

$$|e^x - 1| < \varepsilon.$$

由于上式等价于

$$\ln(1-\varepsilon) < x < \ln(1+\varepsilon),$$

于是我们取 $\delta=\min\{\ln(1+\varepsilon),-\ln(1-\varepsilon)\}>0$,当 x 满足 $0<|x|<\delta$ 时,显然成立

$$|e^x-1|<\varepsilon.$$

证毕

同样,对任意给定的 $\varepsilon>0$,正数 δ 并不要求取最大的或最佳的值,所以对具体的函数极限问题,常常采用与数列极限证明时类似的适度放大技巧.

例 3.1.2 证明 $\lim\limits_{x\to 2}x^2=4$.

证 按极限的定义,对任意给定的 $\varepsilon>0$,要找 $\delta>0$,使当 $0<|x-2|<\delta$ 时成立

$$|x^2-4|<\varepsilon.$$

因为 $|x^2-4|=|x-2|\cdot|x+2|$,我们保留因子 $|x-2|$,而将因子 $|x+2|$ 放大,为此加上条件

$$|x-2|<1,\text{即 } 1<x<3,$$

于是 $|x+2|<5$,从而有

$$|x^2-4|<5|x-2|.$$

因此,取

$$\delta=\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{5}\right\},$$

当 $0<|x-2|<\delta$ 时,成立

$$|x^2-4|=|x+2|\cdot|x-2|<5\cdot\frac{\varepsilon}{5}=\varepsilon,$$

从而证得

$$\lim_{x\to 2}x^2=4.$$

证毕

例 3.1.3 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x-1)}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}$.

证 因为

$$\left|\frac{x(x-1)}{x^2-1}-\frac{1}{2}\right|=\frac{|x-1|}{2|x+1|},$$

我们保留因子 $|x-1|$,而将因子 $\dfrac{1}{2|x+1|}$ 放大.为此,加上条件

$$0<|x-1|<1,\text{即 } 0<x<2,$$

于是有

$$\frac{1}{2|x+1|}<\frac{1}{2}.$$

取 $\delta=\min\{1,2\varepsilon\}$,当 $0<|x-1|<\delta$ 时,成立

$$\left|\frac{x(x-1)}{x^2-1}-\frac{1}{2}\right|=\frac{|x-1|}{2|x+1|}<\frac{1}{2}\cdot 2\varepsilon=\varepsilon,$$

从而证得

$$\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{x^2-1}=\frac{1}{2}.$$

证毕

函数极限的性质

函数极限的许多性质及其证明方法都与数列极限有类似之处，请读者仔细领会，统一掌握，并注意区别它们不同的地方.

(1)极限的唯一性

定理 3.1.1 设 A 与 B 都是函数 $f(x)$ 在点 x_0 的极限，则 $A=B$.

证 根据函数极限的定义，可知：

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\delta_1>0,\forall x(0<|x-x_0|<\delta_1):|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2};$$

$$\exists\delta_2>0,\forall x(0<|x-x_0|<\delta_2):|f(x)-B|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，

$$|A-B|\leqslant|f(x)-A|+|f(x)-B|<\varepsilon.$$

由于 ε 可以任意接近于 0，可知 $A=B$.

证毕

(2)局部保序性

定理 3.1.2 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，且 $A>B$，则存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时成立

$$f(x)>g(x).$$

证 取 $\varepsilon_0=\dfrac{A-B}{2}>0$. 由 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\exists\delta_1>0,\forall x(0<|x-x_0|<\delta_1):|f(x)-A|<\varepsilon_0$，从而

$$\frac{A+B}{2}<f(x);$$

由 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，$\exists\delta_2>0,\forall x(0<|x-x_0|<\delta_2):|g(x)-B|<\varepsilon_0$，从而

$$g(x)<\frac{A+B}{2}.$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，当 $0<|x-x_0|<\delta$，成立

$$g(x)<\frac{A+B}{2}<f(x).$$

证毕

推论 1 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，且存在$\rho>0$，当$0<|x-x_0|<\rho$时，成立$g(x)\leqslant f(x)$，则

$$B\leqslant A.$$

证 运用反证法.若$B>A$，则由定理 3.1.2，存在$\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，

$$g(x)>f(x).$$

取$\eta=\min\{\delta,\rho\}$，则当$0<|x-x_0|<\eta$时，既有$g(x)>f(x)$，又有$g(x)\leqslant f(x)$，从而产生矛盾.

证毕

即使将推论 1 条件加强到当$0<|x-x_0|<\rho$时，$g(x)<f(x)$，我们也只能得到$B\leqslant A$的结论，而不能得到$B<A$的结论，请读者自己举出例子.

推论 2(局部有界性) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则存在$\delta>0$，使得$f(x)$在$O(x_0,\delta)\setminus\{x_0\}$中有界.

证 取常数M与m，满足$m<A<M$，令$g(x)=m$，$h(x)=M$为两个常数函数，由定理 3.1.2 可知存在$\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，成立

$$m<f(x)<M.$$

证毕

顺便指出，如果$f(x)$在x_0有定义，我们可以取

$$G=\max\{|m|,|M|,|f(x_0)|\},$$

则当$|x-x_0|<\delta$时，成立

$$|f(x)|\leqslant G.$$

注意δ不能随意扩大.例如，对$f(x)=\dfrac{1}{x}$，考虑点$x_0=1$，则$f(x)$在$\{x|0<|x-1|<\frac{1}{2}\}$有界，但$f(x)$在$\{x|0<|x-1|<1\}$是无界的.

(3)夹逼性

定理 3.1.3 若存在$\rho>0$，使当$0<|x-x_0|<\rho$时成立

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x),$$

且$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}h(x)=A$，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

证 $\forall\varepsilon>0$，由$\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，$\exists\delta_1>0$，$\forall x(0<|x-x_0|<\delta_1)$：

$$|h(x)-A|<\varepsilon,$$

从而

$$h(x)<A+\varepsilon;$$

由$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$，$\exists\delta_2>0$，$\forall x(0<|x-x_0|<\delta_2)$：$|g(x)-A|<\varepsilon$，从而

$$A-\varepsilon<g(x).$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\rho\}$，$\forall x(0<|x-x_0|<\delta)$：

$$A-\varepsilon<g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)<A+\varepsilon,$$

此即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

证毕

例 3.1.4 证明：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

证 （图 3.1.2）设 $\angle AOB$ 的弧度为 x，$0<x<\frac{\pi}{2}$，由于

$$\triangle OAB\text{ 面积}<\text{扇形 }OAB\text{ 面积}<\triangle OBC\text{ 面积},$$

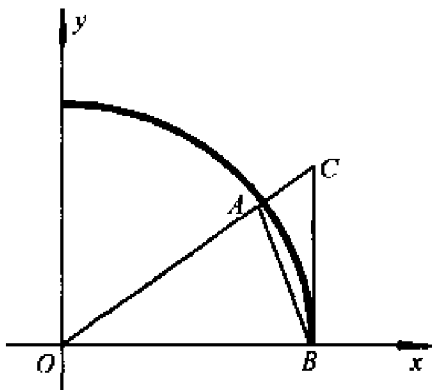


图 3.1.2

可以得到（见例 2.4.5 的注）

$$\sin x<x<\tan x,\qquad 0<x<\frac{\pi}{2}.$$

从而有

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1,\qquad 0<x<\frac{\pi}{2}.$$

显然上式对于 $-\frac{\pi}{2}<x<0$ 也成立.

由于

$$|\cos x-1|=2\sin^2\frac{x}{2}\leqslant\frac{x^2}{2},$$

可知 $\lim\limits_{x\to0}\cos x=1$. 应用极限的夹逼性，得到

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

证毕

注 此极限亦可由例 2.4.5 的结果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n}=1$$

直接导出:对任意 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\setminus\{0\}$,一定存在自然数 n,满足

$$\frac{\pi}{n+1}<|x|\leqslant\frac{\pi}{n},$$

由此得到

$$\frac{\sin[\pi/(n+1)]}{\pi/(n+1)}\cdot\frac{n}{n+1}<\frac{\sin x}{x}<\frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n}\cdot\frac{n+1}{n}.$$

令 $n\to\infty$ 即 $x\to 0$,利用极限的夹逼性,即有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

函数极限的四则运算

定理 3.1.4　设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$,则

(Ⅰ) $\lim\limits_{x\to x_0}(\alpha f(x)+\beta g(x))=\alpha A+\beta B$　(α,β 为常数);

(Ⅱ) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x))=AB$;

(Ⅲ) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$　$(B\neq 0)$.

证　因 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,由定理 3.1.2 的推论 2, $\exists\,\delta_0>0$, $\forall\,x(0<|x-x_0|<\delta_0)$:

$$|f(x)|\leqslant X,$$

且 $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,\delta_1>0$, $\forall\,x(0<|x-x_0|<\delta_1)$:

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

再由 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$,可知 $\exists\,\delta_2>0$, $\forall\,x(0<|x-x_0|<\delta_2)$:

$$|g(x)-B|<\varepsilon.$$

取 $\delta=\min(\delta_0,\delta_1,\delta_2)$, $\forall\,x(0<|x-x_0|<\delta)$:

$$\begin{aligned}&|(\alpha f(x)+\beta g(x))-(\alpha A+\beta B)|\\ \leqslant\;&|\alpha|\cdot|f(x)-A|+|\beta|\cdot|g(x)-B|\\ <\;&(|\alpha|+|\beta|)\varepsilon;\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}&|f(x)g(x)-AB|\\ =\;&|f(x)(g(x)-B)+B(f(x)-A)|\\ <\;&(X+|B|)\varepsilon,\end{aligned}$$

因此(Ⅰ)和(Ⅱ)成立.

利用定理 3.1.2 可知, $\exists\,\delta_*>0$, $\forall\,x(0<|x-x_0|<\delta_*)$:

$$|g(x)|>\frac{|B|}{2}.$$

取 $\delta=\min(\delta_*,\delta_1,\delta_2)$，$\forall x(0<|x-x_0|<\delta)$：

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}\right|=\left|\frac{B(f(x)-A)-A(g(x)-B)}{Bg(x)}\right|$$
$$<\frac{2(|A|+|B|)}{|B|^2}\varepsilon,$$

因此(Ⅲ)也成立.

证毕

例 3.1.5 对于任意实数 $\alpha\neq0$，有

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\ \alpha x}{x}=\lim_{x\to0}\alpha\left(\frac{\sin\ \alpha x}{\alpha x}\right)=\alpha;$$

对于任意实数 $\alpha,\beta\neq0$，则有

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\ \alpha x}{\sin\ \beta x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\ \alpha x}{x}\Big/\frac{\sin\ \beta x}{x}\right)=\frac{\alpha}{\beta}.$$

函数极限与数列极限的关系

定理 3.1.5(Heine 定理) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是对于任意满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，且 $x_n\neq x_0(n=1,2,3,\cdots)$ 的数列 $\{x_n\}$，相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 成立

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=A.$$

证 必要性：

由 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，可知 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x(0<|x-x_0|<\delta)$：

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，且 $x_n\neq x_0(n=1,2,3,\cdots)$，对于上述 $\delta>0,\exists N,\forall n>N$：

$$0<|x_n-x_0|<\delta.$$

于是当 $n>N$ 时，成立

$$|f(x_n)-A|<\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

充分性：用反证法.

按函数极限定义，命题"$f(x)$在 x_0 点以 A 为极限"可以表述为：

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\forall x(0<|x-x_0|<\delta):|f(x)-A|<\varepsilon.$$

于是它的否定命题"$f(x)$在 x_0 点不以 A 为极限"可以相应地表述为：

$$\exists\varepsilon_0>0,\ \forall\delta>0,\ \exists x(0<|x-x_0|<\delta):|f(x)-A|\geqslant\varepsilon_0.$$

亦即，存在某个固定正数 ε_0，不管 δ 取得多么小，总能在 $O(x_0,\delta)\setminus\{x_0\}$ 中找

到一个 x,使 $f(x)$与 A 的差不小于ε_0,即$|f(x)-A|\geqslant\varepsilon_0$.

现在取一列$\{\delta_n\}$,$\delta_n=\dfrac{1}{n}$,$n=1,2,3,\cdots$.

对 $\delta_1=1$,存在 $x_1(0<|x_1-x_0|<\delta_1)$,使$|f(x_1)-A|\geqslant\varepsilon_0$;

对 $\delta_2=\dfrac{1}{2}$,存在 $x_2(0<|x_2-x_0|<\delta_2)$,使$|f(x_2)-A|\geqslant\varepsilon_0$;

……

一般地,对 $\delta_k=\dfrac{1}{k}$,存在 $x_k(0<|x_k-x_0|<\delta_k)$,使$|f(x_k)-A|\geqslant\varepsilon_0$;

……

于是得到数列$\{x_n\}$,满足 $x_n\neq x_0$,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$,但相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$不可能以 A 为极限.

由此推翻假定,得到 $f(x)$在 x_0 点以 A 为极限.

证毕

这一性质被经常用于证明某个函数极限的不存在.

例 3.1.6　证明 $\sin\dfrac{1}{x}$在 $x=0$ 没有极限.

证　取

$$x_n^{(1)}=\frac{1}{n\pi},\qquad n=1,2,3,\cdots;$$

$$x_n^{(2)}=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}},n=1,2,3,\cdots.$$

则显然有 $x_n^{(1)}\neq0$,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n^{(1)}=0$ 与 $x_n^{(2)}\neq0$,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n^{(2)}=0$. 但由于

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n^{(1)}}=0,\quad 而\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n^{(2)}}=1,$$

根据定理 3.1.5,可知 $\sin\dfrac{1}{x}$在 $x=0$ 没有极限(见图 3.1.3).

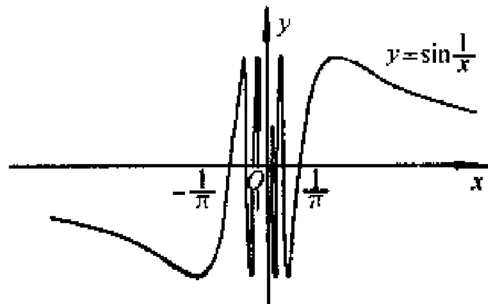


图 3.1.3

注:如果我们只关心函数 $f(x)$在点 x_0 的极限是否存在,而不管极限值

是多少,则定理 3.1.5 有下述另一种表述:

定理 3.1.5′ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在的充分必要条件是对于任意满足条件$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ 且 $x_n \neq x_0 (n=1,2,3,\cdots)$的数列$\{x_n\}$,相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$收敛.

对于定理 3.1.5′充分性的证明,只要注意这样一个事实:若存在数列$\{x_n'\}$与$\{x_n''\}$,$x_n' \neq x_0$,$x_n'' \neq x_0$,且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n' = \lim\limits_{n\to\infty} x_n'' = x_0$,使得$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n') \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n'')$,则取新的数列$\{x_n\}$,使 $x_{2n-1} = x_n'$,$x_{2n} = x_n''(n=1,2,3,\cdots)$,显然 $x_n \neq x_0$,$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$,但是相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$必定不收敛.

单侧极限

在函数极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 的定义中,自变量 x 可以按任意的方式趋于 x_0(只要 $x \neq x_0$).但有时候,$f(x)$只在 x_0 的一侧(左侧或右侧)有定义,或者需要分别研究 $f(x)$在 x_0 两侧的性态,这就有必要引入单侧极限的概念.

定义 3.1.2 设 $f(x)$在$(x_0-\rho, x_0)$有定义$(\rho>0)$,如果存在实数 B,对于任意给定的 $\varepsilon>0$,可以找到 $\delta>0$,使得当 $-\delta<x-x_0<0$ 时,成立

$$|f(x)-B|<\varepsilon,$$

则称 B 是函数 $f(x)$在点 x_0 的**左极限**,记为

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0-) = B.$$

类似地,如果 $f(x)$在$(x_0, x_0+\rho)$有定义$(\rho>0)$,并且存在实数 C,对于任意给定的 $\varepsilon>0$,可以找到 $\delta>0$,使得当 $0<x-x_0<\delta$ 时,成立

$$|f(x)-C|<\varepsilon,$$

则称 C 是函数 $f(x)$在点 x_0 的**右极限**,记为

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0+) = C.$$

显然,函数 $f(x)$在 x_0 极限存在的充分必要条件是 $f(x)$在 x_0 的左极限与右极限存在并且相等:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0-} f(x) = \lim_{x\to x_0+} f(x) = A.$$

例 3.1.7 符号函数 $\operatorname{sgn} x$(见§1.2)在原点的单侧极限存在但不相等:

$$\lim_{x\to 0-} \operatorname{sgn} x = -1, \quad \lim_{x\to 0+} \operatorname{sgn} x = 1,$$

因此符号函数 $\operatorname{sgn} x$ 在 $x=0$ 处没有极限.

例 3.1.8 函数 $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$(图 3.1.4)在 $x=0$ 的左极限存在,$\lim\limits_{x\to 0-} e^{\frac{1}{x}}=0$;但右极限不存在,当 $x\to 0+$ 时,函数值 $f(x)$趋于 $+\infty$.

函数极限定义的扩充

在本节中,函数极限是对$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 定义的,表述为:

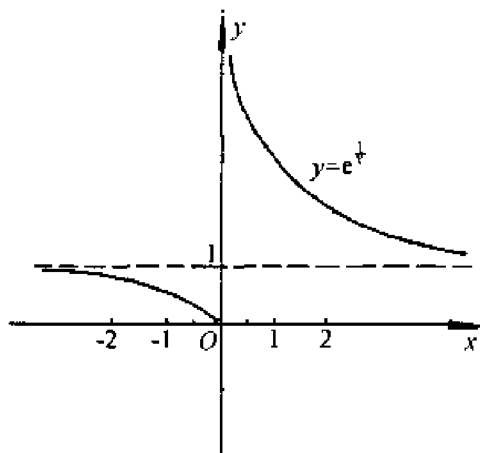


图 3.1.4

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x(0 < |x - x_0| < \delta): |f(x) - A| < \varepsilon,$$

其中 x_0, A 都是有限实数.

但实际上,自变量的极限过程有六种情况:$x \to x_0$、$x_0 +$、$x_0 -$、∞、$+\infty$、$-\infty$,函数的极限值有四种情况:$f(x) \to A$、∞、$+\infty$、$-\infty$. 仔细分析一下 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 的情况,可以发现其定义描述的是两个方面:"$\forall \varepsilon > 0, \cdots: |f(x) - A| < \varepsilon$"描述的是"$f(x) \to A$"的情景;"$\cdots, \exists \delta > 0, \forall x(0 < |x - x_0| < \delta); \cdots$"描述的是"$x \to x_0$"的过程. 而对于上述四种函数极限值情况和六种自变量的极限过程,分别有相应的表述方式:

"$f(x) \to A$(有限数)" :　"$\forall \varepsilon > 0, \cdots: |f(x) - A| < \varepsilon$";

"$f(x) \to \infty$" :　"$\forall G > 0, \cdots: |f(x)| > G$";

"$f(x) \to +\infty$" :　"$\forall G > 0, \cdots: f(x) > G$";

"$f(x) \to -\infty$" :　"$\forall G > 0, \cdots: f(x) < -G$";

以及

"$x \to x_0$" :　"$\cdots, \exists \delta > 0, \forall x(0 < |x - x_0| < \delta): \cdots$";

"$x \to x_0 +$":　"$\cdots, \exists \delta > 0, \forall x(0 < x - x_0 < \delta): \cdots$";

"$x \to x_0 -$":　"$\cdots, \exists \delta > 0, \forall x(-\delta < x - x_0 < 0): \cdots$";

"$x \to \infty$" :　"$\cdots, \exists X > 0, \forall x(|x| > X): \cdots$";

"$x \to +\infty$":　"$\cdots, \exists X > 0, \forall x(x > X): \cdots$";

"$x \to -\infty$":　"$\cdots, \exists X > 0, \forall x(x < -X): \cdots$".

理解了这一点,读者就不难举一反三,对任何一种函数极限立即写出相应的定义. 例如:

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \infty$的定义为:

$$\forall G > 0, \exists \delta > 0, \forall x(0 < x - x_0 < \delta): |f(x)| > G;$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 的定义为：

$$\forall \varepsilon>0,\exists X>0,\forall x(x>X):|f(x)-A|<\varepsilon;$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$的定义为：

$$\forall G>0,\exists X>0,\forall x(x<-X):f(x)>G.$$

例 3.1.9=0 $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$

证 $\forall\varepsilon\in(0,1)$，取 $G=\ln\frac{1}{\varepsilon}>0,\forall x<-G$：

$$0<e^x<e^{-G}=\varepsilon,$$

于是得到 $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$.

证毕

例 3.1.10 $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^2}{x-1}=-\infty$

证 对于任意给定的 $G>0$，要找 $\delta>0$，使当 $-\delta<x-1<0$ 时成立

$$\frac{x^2}{x-1}<-G.$$

为了适度放大不等式的左边，先加上条件 $-\frac{1}{2}<x-1<0$，于是 $x^2>\frac{1}{4}$，从而 $\frac{x^2}{x-1}<\frac{1}{4(x-1)}$.

令 $\delta=\min\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{4G}\right\}$，则当 $-\delta<x-1<0$ 时

$$\frac{x^2}{x-1}<\frac{1}{4(x-1)}<-\frac{1}{4\delta}\leqslant-G.$$

由此证得 $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^2}{x-1}=-\infty$.

证毕

对于上述扩充了定义的函数极限，可以参照本节前半部分讨论其函数极限的性质、函数极限的四则运算以及函数极限与数列极限的关系，我们不一一作叙述了. 请读者自己加以推导，并注意以下几点说明.

(1)关于函数极限的性质，例如局部保序定理与夹逼性定理，只当函数极限 A 为有限数、$+\infty$与$-\infty$时才是成立的. 也就是说，讨论这些定理，须排除 A 是未定号无穷大∞的情况. 这是因为我们无法将∞与任意有限数作大小的比较，而对于定号无穷大$+\infty$或$-\infty$，我们可以认为不等式$-\infty<A<+\infty$（A 为任意实数）成立.

(2)关于函数极限的四则运算，只要不是待定型，如$\infty+\infty$，$(+\infty)+(-\infty)$，$\infty+(\pm\infty)$，$0\cdot\infty$，$\frac{\infty}{\infty}$，$\frac{0}{0}$，等等，定理 3.1.4 总是成立的. 如果出现待

定型，则需要对具体的函数极限作具体的讨论.

(3)对于这些不同的函数极限，分别有相应的 Heine 定理，它们的叙述、证明方法和作用都是类似的.

例 3.1.11 讨论极限

$$l=\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0};a_n\neq 0,b_m\neq 0$$

解 当 $n=m$ 时

$$l=\lim_{x\to\infty}\frac{a_n+\dfrac{a_{n-1}}{x}+\cdots+\dfrac{a_1}{x^{n-1}}+\dfrac{a_0}{x^n}}{b_m+\dfrac{b_{m-1}}{x}+\cdots+\dfrac{b_1}{x^{m-1}}+\dfrac{b_0}{x^m}}=\frac{a_n}{b_n};$$

当 $n<m$ 时

$$l=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x^{m-n}}\cdot\frac{a_n+\dfrac{a_{n-1}}{x}+\cdots+\dfrac{a_1}{x^{n-1}}+\dfrac{a_0}{x^n}}{b_m+\dfrac{b_{m-1}}{x}+\cdots+\dfrac{b_1}{x^{m-1}}+\dfrac{b_0}{x^m}}\right]=0;$$

当 $n>m$ 时，

$$l=\lim_{x\to\infty}\left[x^{n-m}\cdot\frac{a_n+\dfrac{a_{n-1}}{x}+\cdots+\dfrac{a_1}{x^{n-1}}+\dfrac{a_0}{x^n}}{b_m+\dfrac{b_{m-1}}{x}+\cdots+\dfrac{b_1}{x^{m-1}}+\dfrac{b_0}{x^m}}\right]=\infty.$$

所以

$$l=\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_n}, & n=m,\\ 0, & n<m,\\ \infty, & n>m.\end{cases}$$

例 3.1.12 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

证 先证 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$. 首先，对于任意 $x\geqslant 1$，有

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1},$$

其中$[x]$表示 x 的整数部分. 当 $x\to+\infty$时，不等式左、右两侧表现为两个数列极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\mathrm{e}$$

与

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\mathrm{e}.$$

利用函数极限的夹逼性,得到

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.$$

再证 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$. 为此令 $y=-x$,于是当 $x\to-\infty$ 时,$y\to+\infty$,从而有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}&=\lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}\\&=\lim_{y\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\cdot\left(1+\frac{1}{y-1}\right)\right]=\mathrm{e}.\end{aligned}$$

将 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$ 与 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$ 结合起来,就得到

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.$$

证毕

注 例 3.1.12 的证明中包含下述结果:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

在§2.4 中讲述了数列收敛的 Cauchy 收敛原理. 对于本节中最后所讨论的各类函数极限情况,同样也分别有相应的 Cauchy 收敛原理,而在证明中需要用到相应的 Heine 定理,下面仅举一例.

定理 3.1.6 *函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在而且有限的充分必要条件是:对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $X>0$,对一切 $x',x''>X$,成立*

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

证 先证必要性. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,按照定义,$\forall\varepsilon>0$, $\exists X>0$, $\forall x',x''>X$:

$$|f(x')-A|<\frac{\varepsilon}{2},\qquad |f(x'')-A|<\frac{\varepsilon}{2},$$

于是

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant|f(x')-A|+|f(x'')-A|<\varepsilon.$$

再证充分性. 设 $\forall\varepsilon>0$, $\exists X>0$, $\forall x',x''>X$

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

任意选取数列 $\{x_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$. 则对上述 $X>0$, $\exists N$, $\forall n>N$: $x_n>X$. 于是当 $m>n>N$ 时,成立

$$|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon.$$

这说明函数值数列$\{f(x_n)\}$是基本数列,因而必定收敛.根据相应的 Heine 定理,可知$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在而且有限.

证毕

请读者写出函数极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$,$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$,$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$存在而且有限的 Cauchy 收敛原理,并加以证明.

今后,在建立广义积分的收敛性判别法则等方面,函数极限的 Cauchy 收敛原理将发挥重要的作用.

习　题

1.按函数极限的定义证明:

(1)$\lim\limits_{x\to2}x^3=8$;　(2)$\lim\limits_{x\to4}\sqrt{x}=2$;

(3)$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$;　(4)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{2x-1}=\dfrac{1}{2}$;

(5)$\lim\limits_{x\to0+}\ln x=-\infty$;　(6)$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$;

(7)$\lim\limits_{x\to2+}\dfrac{2x}{x^2-4}=+\infty$;　(8)$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x+1}=-\infty$.

2.求下列函数极限

(1)$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;　(2)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

(3)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^5-5x^3+2x}{x^5-x^3+3x}$;　(4)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+2x)(1+3x)-1}{x}$;

(5)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^n-1}{x}$;　(6)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$;

(7)$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$;　(8)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}$;

(9)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$;　(10)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

3.利用夹逼法求极限:

(1)$\lim\limits_{x\to0}x\left[\dfrac{1}{x}\right]$;　(2)$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}$.

4.利用夹逼法证明:

(1)$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^k}{a^x}=0$　($a>1$,k 为任意自然数);

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^k x}{x}=0$($k$ 为任意自然数).

5. 讨论单侧极限

(1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x}, & 0<x\leqslant 1,\\ x^2, & 1<x<2,\\ 2x, & 2<x<3,\end{cases}$ 在 $x=0,1,2$ 三点;

(2) $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}+1}{2^{\frac{1}{x}}-1}$,在 $x=0$ 点;

(3) Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 为有理数},\\ 0, & x \text{ 为无理数},\end{cases}\text{在任意点};$$

(4) $f(x)=\dfrac{1}{x}-\left[\dfrac{1}{x}\right]$,在 $x=\dfrac{1}{n}$, $n=1,2,3,\cdots$.

6. 说明下列函数极限的情况

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}e^x\sin x$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^\alpha\sin\dfrac{1}{x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$;

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x}$;

(6) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\dfrac{1}{x}-\left[\dfrac{1}{x}\right]\right)$.

7. 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ $(a\geqslant 0)$,证明:$\lim\limits_{x\to\sqrt{a}}f(x^2)=A$.

8. 写出下述命题的"否定命题"的分析表述

(1) $\{x_n\}$ 是无穷小量.

(2) $\{x_n\}$ 是正无穷大量.

(3) $f(x)$ 在 x_0 的右极限是 A.

(4) $f(x)$ 在 x_0 的左极限是正无穷大量.

(5) 当 $x\to-\infty$, $f(x)$ 的极限是 A.

(6) 当 $x\to+\infty$, $f(x)$ 是负无穷大量.

9. 证明:$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=+\infty$ 的充分必要条件是对于任意从右方收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\}$ $(x_n>x_0)$,成立

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty.$$

10. 证明：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在而且有限的充分必要条件是对任意正无穷大量$\{x_n\}$，相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$收敛.

§2 连续函数

连续函数的定义

在本节中，我们讨论函数的连续性.

函数连续与否的概念源于对函数图象的直观分析. 例如，函数 $y=f(x)=x^2$ 的图象是一条抛物线，图象上各点相互"连结"而不出现"间断"，构成了曲线"连续"的外观. 而符号函数 $y=\operatorname{sgn} x$ 的图象(图 1.2.2)也直观地告诉我们，它的"连续性"在 $x=0$ 处遭到破坏，也就是说在这一点出现了"间断".

用分析的观点来看，函数 $f(x)$在某点 x_0 处是否具有"连续"特性，就是指当 x 在x_0 点附近作微小变化时，$f(x)$是否也在 $f(x_0)$附近作微小变化. 借助于已经学过的函数极限的工具，就是看当自变量 x 趋于x_0($x\to x_0$)时，因变量 y 是否趋于$f(x_0)$($y\to f(x_0)$).

定义 3.2.1 设函数 $f(x)$在点 x_0 的某个邻域中有定义，并且成立

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),$$

则称函数 $f(x)$在点 x_0 **连续**，或称 x_0 是函数 $f(x)$的**连续点**.

显然，"函数 $f(x)$在点 x_0 连续"可用"$\varepsilon-\delta$ 方式"表述为：

$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x(|x-x_0|<\delta):|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$

从定义看出，$f(x)$"在点 x_0 连续"只是"在点 x_0 的函数极限存在"，即$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$当$A$ 为$f(x_0)$时的特殊情况，所以表述中只需将极限值 A 换成 $f(x_0)$，并去掉$|x-x_0|>0$的要求——因为当 $x=x_0$ 时，显然有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

同时可以知道，"连续"反映的是函数 $f(x)$在一点 x_0 邻域中的变化，因而只是局部性的概念. 但它提示我们，可以通过逐点考察的办法，了解函数 $f(x)$在一个区间上是否连续.

开区间(a,b)的情形比较简单.

定义 3.2.2 若函数 $f(x)$在区间(a,b)的每一点都连续，则称函数$f(x)$**在开区间(a,b)上连续**.

例 3.2.1 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$在区间$(0,1)$连续.

证 设 x_0 是$(0,1)$中任意一点. $\forall\varepsilon>0$，要找 $\delta>0$，使得当$|x-x_0|<\delta$时，有

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|=\left|\frac{x-x_0}{xx_0}\right|<\varepsilon.$$

为了将不等式左边放大,加上条件$|x-x_0|<\frac{x_0}{2}$,于是$x>\frac{x_0}{2}$,从而

$$xx_0>\frac{x_0^2}{2}.$$

取$\delta=\min\{\frac{x_0}{2},\frac{x_0^2}{2}\varepsilon\}$,当$|x-x_0|<\delta$时,

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|=\left|\frac{x-x_0}{xx_0}\right|<\frac{2|x-x_0|}{x_0^2}<\varepsilon,$$

所以$f(x)=\frac{1}{x}$在$(0,1)$连续.

证毕

为了讨论函数在闭区间上的连续性,需要**单侧连续**的概念:

定义 3.2.3　若$\lim\limits_{x\to x_0-}f(x)=f(x_0)$,则称函数$f(x)$在$x_0$**左连续**;若$\lim\limits_{x\to x_0+}f(x)=f(x_0)$,则称函数$f(x)$在$x_0$**右连续**.

$\lim\limits_{x\to x_0-}f(x)=f(x_0)$可表述为:$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $\forall x(-\delta<x-x_0\leqslant 0)$:

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon;$$

$\lim\limits_{x\to x_0+}f(x)=f(x_0)$可表述为:$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $\forall x(0\leqslant x-x_0<\delta)$:

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

定义 3.2.4　若$f(x)$在(a,b)连续,且在左端点a右连续,在右端点b左连续,则称函数$f(x)$**在闭区间$[a,b]$上连续**.

例 3.2.2　$f(x)=\sqrt{x(1-x)}$在闭区间$[0,1]$上连续.

证　设$x_0\in(0,1)$是任意一点,令$\eta=\min\{x_0,1-x_0\}>0$,当$|x-x_0|<\eta$时,$x\in(0,1)$,因而

$$\begin{aligned}&\left|\sqrt{x(1-x)}-\sqrt{x_0(1-x_0)}\right|\\&=\frac{|1-x-x_0|}{\sqrt{x(1-x)}+\sqrt{x_0(1-x_0)}}|x-x_0|\\&<\frac{1}{\sqrt{x_0(1-x_0)}}|x-x_0|.\end{aligned}$$

所以,$\forall\varepsilon>0$,取$\delta=\min\{\eta,\sqrt{x_0(1-x_0)}\varepsilon\}$,当$|x-x_0|<\delta$时,成立

$$\left|\sqrt{x(1-x)}-\sqrt{x_0(1-x_0)}\right|<\frac{1}{\sqrt{x_0(1-x_0)}}|x-x_0|<\varepsilon,$$

即$f(x)=\sqrt{x(1-x)}$在$(0,1)$上连续.

现考虑区间的端点,对于任意给定的 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\varepsilon^2$,则当 $0\leqslant x<\delta$ 时,

$$|f(x)-f(0)|\leqslant\sqrt{x}<\varepsilon;$$

而当 $-\delta<x-1\leqslant 0$ 时,

$$|f(x)-f(1)|\leqslant\sqrt{1-x}<\varepsilon.$$

这说明 $f(x)$在 $x=0$ 右连续,在 $x=1$ 左连续.

由此得出 $f(x)=\sqrt{x(1-x)}$在闭区间$[0,1]$上连续.

证毕

例 3.2.3 $f(x)=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$上连续.

证 设 $x_0\in(-\infty,+\infty)$是任意一点,由于

$$\begin{aligned}&|\sin x-\sin x_0|\\=&2\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\leqslant|x-x_0|,\end{aligned}$$

对任意给定的 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\varepsilon$,当$|x-x_0|<\delta$ 时,成立

$$|\sin x-\sin x_0|\leqslant|x-x_0|<\varepsilon.$$

所以 $f(x)=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$上连续.

证毕

同样可以按定义证明 $f(x)=\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$上连续.

例 3.2.4 指数函数 $f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$在$(-\infty,+\infty)$上连续.

证 首先,对任意一点 $x_0\in(-\infty,+\infty)$,有

$$a^x-a^{x_0}=a^{x_0}(a^{x-x_0}-1).$$

所以证 $\lim\limits_{x\to x_0}a^x=a^{x_0}$就归结为证$\lim\limits_{t\to 0}a^t=1$.

若 $t>0$,则当 $a>1$ 时,成立

$$1<a^t<a^{1/\left[\frac{1}{t}\right]},$$

因$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$,由极限的夹逼性,得到

$$\lim_{t\to 0+}a^t=1.$$

当 $0<a<1$,由极限的除法运算,得到

$$\lim_{t\to 0+}\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^t}=\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0+}\left(\frac{1}{a}\right)^t}$$

最后,若 $t<0$,则令 $u=-t$,于是

$$\lim_{t\to 0-}a^t=\lim_{u\to 0+}\frac{1}{a^u}=1.$$

综合起来,得到$\lim\limits_{t\to 0}a^t=1$,从而有 $\lim\limits_{x\to x_0}a^x=a^{x_0}$.

证毕

连续函数的四则运算

根据函数极限的四则运算,对于连续函数,也有下述运算规则:

设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)$,则

(Ⅰ) $\lim\limits_{x\to x_0}(\alpha f(x)+\beta g(x))=\alpha f(x_0)+\beta g(x_0)$ (α,β 为常数);

(Ⅱ) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x))=f(x_0)g(x_0)$;

(Ⅲ) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$ $(g(x_0)\neq 0)$.

由上述运算法则,设有有限个函数在某区间连续,则它们之间进行有限次加、减、乘、除四则运算,所得到的函数在该区间除去使分母为零的点后余下的范围内连续.

例 3.2.5 对于常数函数 $f(x)=c$ 与恒等函数 $g(x)=x$,容易从定义出发证明它们的连续性,然后由上述的连续函数的四则运算规则,可以得到

(Ⅰ)任意多项式 $p_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续;

(Ⅱ)任意有理函数 $Q(x)=\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}$ 在其定义域上连续,即 $Q(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 去掉分母 $b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0$ 的零点(至多 m 个点)的范围连续.

例 3.2.6 在例 3.2.3,我们证明了三角函数 $\sin x$ 与 $\cos x$ 的连续性,由连续函数的四则运算规则,可知正切函数

$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$,正割函数 $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$ 在其定义域 $\{x\mid x\in\mathbf{R},x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$ 上连续;余切函数 $\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$,余割函数 $\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$ 在其定义域 $\{x\mid x\in\mathbf{R},\ x\neq k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$ 上连续.

不连续点的类型

按照连续性定义,函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续必须满足:

(1)函数 $f(x)$ 在点 x_0 有定义,即 $f(x_0)$ 为有限值;

(2)函数 $f(x)$ 在点 x_0 有左极限,且 $f(x_0-)=f(x_0)$;

(3)函数 $f(x)$ 在点 x_0 有右极限,且 $f(x_0+)=f(x_0)$.

三者缺一不可.否则,就称点 x_0 是函数 f 的**不连续点**,亦称**间断点**.

通常将不连续点分成三类.

第一类不连续点:函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左、右极限都存在但不相等,即 $f(x_0+)\neq f(x_0-)$.

例如 $f(x)=\operatorname{sgn}x$, $x=0$ 是它的第一类不连续点:

$$f(0-)=\lim_{x\to0-}\operatorname{sgn}x=-1,\quad f(0+)=\lim_{x\to0+}\operatorname{sgn}x=1.$$

在函数的第一类不连续点处,图象会出现一个跳跃,所以第一类不连续点又称为**跳跃点**,而右极限与左极限之差 $f(x_0+)-f(x_0-)$ 称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的**跃度**.例如符号函数 $\operatorname{sgn}x$ 在 $x=0$ 的跃度为 2.

第二类不连续点:函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左、右极限中至少有一个不存在.

例如 $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$,$x=0$ 是它的第二类不连续点(图 3.1.4):

$$f(0-)=\lim_{x\to0-}e^{\frac{1}{x}}=0,\qquad f(0+)=\lim_{x\to0+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty.$$

又如 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$,$x=0$ 也是它的第二类不连续点(图 3.1.3),因为 $\sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 的左、右极限都不存在.

第三类不连续点:函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左、右极限都存在而且相等,但不等于 $f(x_0)$ 或者 $f(x)$ 在点 x_0 无定义.

例如 $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$,它在 $x=0$ 没有定义,但在 $x=0$ 的左、右极限都等于 0,所以 $x=0$ 是它的第三类不连续点.通过重新定义

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

则 $f(x)$ 就是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数.

在函数的第三类不连续点,可以通过重新定义在该点的函数值,使之成为函数的连续点,因此第三类不连续点又称为**可去不连续点**.

例 3.2.7 Riemann 函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{p}, & x=\dfrac{q}{p},(p\in\mathbf{N}^+,q\in\mathbf{Z},p,q\text{ 互质})\\ 0, & x\text{ 是无理数}\end{cases}$$

在任意点 x_0 的极限存在,且极限值为 0.换言之,一切无理点都是 $R(x)$ 的连续点,而一切有理点都是 $R(x)$ 的第三类不连续点.

证 $R(x)$ 是以 1 为周期的周期函数,所以只要讨论区间 $[0,1]$ 上的函数性质.

注意到 $x=0$ 可写成 $x=\frac{0}{1}$,即 $R(0)=1$.所以,在 $[0,1]$ 上,分母为 1 的有理点只有两个:$\frac{0}{1}$ 和 $\frac{1}{1}$;分母为 2 的有理点只有一个:$\frac{1}{2}$;分母为 3 的有理点只有两个:$\frac{1}{3}$ 和 $\frac{2}{3}$;分母为 4 的有理点只有两个:$\frac{1}{4}$ 和 $\frac{3}{4}$;分母为 5 的有理点只

有四个：$\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5}$和$\frac{4}{5}$；…，总之，对任意自然数 k，分母不超过 k 的有理点个数是有限的.

设 $x_0\in[0,1]$是任意一点，对任意给定的 $\varepsilon>0$，设 $k=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，因为分母不超过 k 的有理点个数有限，设它们为 $r_1,r_2,\cdots,r_n$. 令

$$\delta=\min_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ r_i\neq x_0}}\{|r_i-x_0|\},$$

显然 $\delta>0$。

当$0<|x-x_0|<\delta$时，若 x 是无理数，则 $R(x)=0$；若 x 是有理数，其分母必大于$\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，于是

$$R(x)\leqslant\frac{1}{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1}<\varepsilon,$$

因此成立

$$|R(x)-0|<\varepsilon.$$

此即说明 $R(x)$在 x_0 的极限为 0（$x_0=0$ 时是指右极限，$x_0=1$ 时是指左极限）. 根据 $R(x)$的周期性，对一切 $x_0\in(-\infty,+\infty)$成立

$$\lim_{x\to x_0}R(x)=0.$$

证毕

例 3.2.8 区间(a,b)上单调函数的不连续点必为第一类不连续点.

证 不妨设 $f(x)$在(a,b)单调增加.

设 $x_0\in(a,b)$是任意一点. 显然集合$\{f(x)\mid x\in(a,x_0)\}$有上界，由“确界存在定理”，必定存在上确界，记它为 α：

$$\alpha=\sup\{f(x)\mid x\in(a,x_0)\}.$$

对一切 $x\in(a,x_0)$，成立 $f(x)\leqslant\alpha$；而对任意给定的 $\varepsilon>0$，必存在 $x'\in(a,x_0)$，使得 $f(x')>\alpha-\varepsilon$. 取 $\delta=x_0-x'>0$，则当 $-\delta<x-x_0<0$ 时，有 $x'<x<x_0$，于是成立

$$-\varepsilon<f(x')-\alpha\leqslant f(x)-\alpha\leqslant 0$$

这就说明 $\lim\limits_{x\to x_0-}f(x)=\alpha$. 同理可证 $\lim\limits_{x\to x_0+}f(x)=\beta$，其中

$$\beta=\inf\{f(x)\mid x\in(x_0,b)\}.$$

证毕

由例 3.2.8 可知，单调函数在任意点的左、右极限都存在. 换言之，单调函数的不连续点必定是跳跃点.

反函数连续性定理

在第一章§2中,我们曾指出,当 $f: X\to Y$ 是单射,即对任意 $y\in R_f\subset Y$,它的逆像 $x\in X$ 唯一,则存在 f 的逆映射 $f^{-1}: R_f\to X$.对于函数来说,与之相对应的就是**反函数**.

定理 3.2.1(反函数存在性定理)　*若函数 $y=f(x),x\in D_f$ 是严格单调增加(减少)的,则存在它的反函数 $x=f^{-1}(y),y\in R_f$,并且 $f^{-1}(y)$ 也是严格单调增加(减少)的.*

证　不妨设 $y=f(x),x\in D_f$ 严格单调增加.对任意两点 $x',x''\in D_f$ 及它们相应的函数值 $y'=f(x'),y''=f(x'')$,由 $f(x)$ 严格单调增加,可知 $x'<x''\Rightarrow y'<y''$.显然它保证了逆像的唯一性,所以存在反函数 $x=f^{-1}(y),y\in R_f$.

设 $y_1,y_2\in R_f,y_1<y_2$,它们的逆像相应为 $x_1=f^{-1}(y_1),x_2=f^{-1}(y_2)$.则 x_1,x_2,的大小只有三种可能:(1)$x_1>x_2$,(2)$x_1=x_2$,(3)$x_1<x_2$.但 $x_1>x_2$ 违背 f 的严格单调增加性,$x_1=x_2$ 违背 f 具有像的唯一性,于是必然有 $x_1<x_2$,这表明 $f^{-1}(y)$ 也是严格单调增加的.

证毕

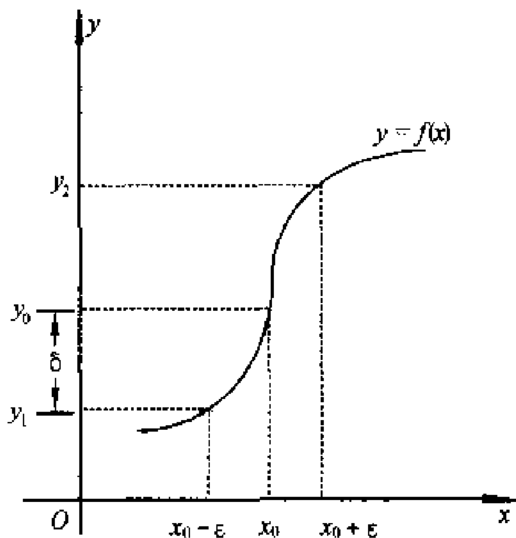


图 3.2.1

定理 3.2.2(反函数连续性定理)　*设函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续且严格单调增加,$f(a)=\alpha,f(b)=\beta$,则它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续且严格单调增加.*

证　首先,我们利用例 3.2.8 的结论,证明

$$f([a,b])=[\alpha,\beta],$$

即 f 的值域(也就是 f^{-1} 的定义域)是 $[\alpha,\beta]$.

显然 $\alpha,\beta\in f([a,b])$. 设 $\gamma\in(\alpha,\beta)$是任意一点,记

$$S=\{x\mid x\in[a,b],\ f(x)<\gamma\},$$

则集合 S 非空且有上界,由确界存在定理,S 必有上确界,记 $x_0=\sup S$,则 $x_0\in(a,b)$.

根据 $f(x)$的严格单调增加性,当 $x<x_0$ 时,$f(x)<\gamma$;当 $x>x_0$ 时,$f(x)>\gamma$. 于是由例 3.2.8,得到

$$f(x_0-)\leqslant\gamma\leqslant f(x_0+).$$

由 $f(x)$在点 x_0 的连续性,得到 $f(x_0)=f(x_0+)=f(x_0-)=\gamma$. 这就说明 $f(x)$的值域是闭区间$[\alpha,\beta]$.

根据定理3.2.1,在$[\alpha,\beta]$上必定存在 f 的反函数$x=f^{-1}(y)$,且 $f^{-1}(y)$也是严格单调增加函数.

现在只需要证明反函数 $x=f^{-1}(y)$在$[\alpha,\beta]$上的连续性.

设 $y_0\in(\alpha,\beta)$,相应地有 $f^{-1}(y_0)=x_0\in(a,b)$. 对于任意给定的 $\varepsilon>0$,要找出 $\delta>0$,使当$|y-y_0|<\delta$ 时,成立

$$|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)|=|f^{-1}(y)-x_0|<\varepsilon,$$

即

$$x_0-\varepsilon<f^{-1}(y)<x_0+\varepsilon.$$

令 $y_1=f(x_0-\varepsilon)$, $y_2=f(x_0+\varepsilon)$,取 $\delta=\min\{y_0-y_1,y_2-y_0\}>0$,显然当$|y-y_0|<\delta$时,成立

$$|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)|<\varepsilon.$$

如果 $y_0=\alpha$,则只要证明右连续性;如果 $y_0=\beta$,则只要证明左连续性,请读者自己给出证明.

证毕

例3.2.9 由例3.2.3,例 3.2.6 与定理 3.2.2,可知下述反三角函数在它们的定义域连续:

$$y=\arcsin x,\quad x\in[-1,1],\quad y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right];$$

$$y=\arccos x,\quad x\in[-1,1],\quad y\in[0,\pi];$$

$$y=\arctan x,\quad x\in(-\infty,+\infty),\quad y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right);$$

$$y=\operatorname{arccot} x,\quad x\in(-\infty,+\infty),\quad y\in(0,\pi).$$

例3.2.10 由例3.2.4与定理3.2.2可知,指数函数 $y=a^x$ 的反函数$y=\log_a x\,(a>0,a\neq1)$在$(0,+\infty)$连续.

复合函数的连续性

设$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$, $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$,对于复合函数 $f\circ g(x)$,我们不能得出

$\lim\limits_{x\to x_0} f\circ g(x)=A$ 的结论.容易举出它的反例,如:

$$y=f(u)=\begin{cases}0, & u=0,\\ 1, & u\neq 0,\end{cases}\qquad u=g(x)=x\sin\frac{1}{x},$$

显然有

$$\lim_{x\to 0}g(x)=0,\qquad \lim_{u\to 0}f(u)=1$$

但是复合函数 $f\circ g$ 在 $x=0$ 没有极限(请读者自己证明).

但是当 f 与 g 都是连续函数时,则上述的结论是成立的.

定理 3.2.3 *若 $u=g(x)$ 在点 x_0 连续, $g(x_0)=u_0$, 又 $y=f(u)$ 在点 u_0 连续,则复合函数 $y=f\circ g(x)$ 在点 x_0 连续.*

证 对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 由于 $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=f(u_0)$, 所以存在 $\eta>0$, 当 $|u-u_0|<\eta$ 时,成立

$$|f(u)-f(u_0)|<\varepsilon.$$

对上面这个 $\eta>0$, 由于 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)=u_0$, 所以存在 $\delta>0$, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时,成立

$$|g(x)-u_0|<\eta.$$

由此得出,当 $|x-x_0|<\delta$ 时,

$$|f\circ g(x)-f\circ g(x_0)|=|f\circ g(x)-f(u_0)|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{x\to x_0}f\circ g(x)=f\circ g(x_0).$$

证毕

例 3.2.10 双曲正弦函数 $\mathrm{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ 与双曲余弦函数 $\mathrm{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ 是实际问题中经常遇到的两个初等函数,因为它们可以看成是由连续函数

$$y=f(u)=\frac{u\pm u^{-1}}{2},D_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty),$$

与

$$u=g(x)=e^x,\ D_g=(-\infty,+\infty),R_g=(0,+\infty),$$

复合而成,所以它们在 $(-\infty,+\infty)$ 连续.

例 3.2.11 对于任意实数 a, 幂函数 $f(x)=x^a$ 在 $(0,+\infty)$ 连续.

解 事实上,幂函数 $f(x)=x^a$ 是由

$$f(x)=x^a=e^{a\ln x},x\in(0,+\infty)$$

定义的,即它是由 $y=e^u,u\in(-\infty,+\infty)$ 与 $u=a\ln x,x\in(0,+\infty)$ 复合而成.根据定理 3.2.3, $f(x)=x^a$ 在 $(0,+\infty)$ 连续.

注 对于具体给定的实数 α，$f(x)=x^\alpha$ 的定义域可以扩大. 例如当 α 是自然数 n 时，$f(x)=x^n$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$；当 α 是负整数 $-n$ 时，$f(x)=x^{-n}$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$；当 α 是正有理数 $\frac{q}{p}$（既约分数），若 p 是奇数，则定义域是 $(-\infty,+\infty)$，若 p 是偶数，则定义域是 $[0,+\infty)$；…. 总的来说，幂函数 $f(x)=x^\alpha$ 在其定义域连续.

由上面的讨论，我们不仅论证了幂函数，指数函数，对数函数，三角函数，反三角函数这 5 类基本初等函数在它们的定义域上的连续性，还进一步得到，从这些基本初等函数出发，经过有限次四则运算及复合运算所产生的函数即初等函数，在它们各自的定义域上也是连续的. 概括起来就是

定理 3.2.4 *一切初等函数在其定义域上连续.*

在函数极限的计算中，经常需要用到函数的连续性.

例 3.2.12 计算极限 $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 利用对数恒等式，有 $(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^u$，其中

$$\begin{aligned}u=g(x)&=\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)\\&=\frac{1}{x^2}\ln\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)\\&=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\ln\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}},\end{aligned}$$

由例 3.1.4'，例 3.1.12 和对数函数的连续性，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}g(x)&=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\ln\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}}\\&=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{e}=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

再由指数函数 e^u 的连续性，得到

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{u\to-\frac{1}{2}}e^u=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

例3.2.13 放射性物质的质量变化规律

设时刻 $t=0$ 时有质量为 M 的某种放射性物质，它的瞬时放射速率与该时刻放射性物质的质量成正比，比例系数为 k. 求时刻 t 时该放射性物质的质量 $M(t)$.

解 随着时间从 0 变到 t，放射性物质的质量在连续不断地减少，而放射

速率也随之连续地减小.为了便于进行计算,我们采用下述处理方法:

将时间区间$(0,t]$平均分成 n 个小区间

$$(0,t]=\sum_{i=1}^{n}\Delta_i,\quad \Delta i=\left(\frac{(i-1)t}{n},\frac{it}{n}\right],$$

并在每个小区间 Δ_i 上,将放射速率近似地取为常数 $kM\left(\frac{(i-1)t}{n}\right)$.

在时间段 Δ_1 上,因放射速率近似为 kM,于是

$$M\left(\frac{t}{n}\right)\approx M-kM\frac{t}{n}=M\left(1-k\frac{t}{n}\right);$$

在时间段 Δ_2 上,因放射速率近似为 $kM\left(\frac{t}{n}\right)$,于是

$$M\left(\frac{2t}{n}\right)\approx M\left(1-k\frac{t}{n}\right)-kM\left(1-k\frac{t}{n}\right)\frac{t}{n}=M\left(1-k\frac{t}{n}\right)^2;$$

……

继续不断地做下去,可得到 $M(t)$的近似值

$$M(t)\approx M\left(1-k\frac{t}{n}\right)^n.$$

很自然可以认为,分割的区间数 n 越大,近似值就越接近 $M(t)$的精确值.于是

$$M(t)=\lim_{n\to\infty}M\left(1-k\frac{t}{n}\right)^n=M\lim_{n\to\infty}e^{\ln\left(1-k\frac{t}{n}\right)^n}=Me^{-kt}.$$

例 3.2.13 说明放射性物质的质量是时间 t 的指数函数.自然界中这类函数关系是很普遍的,例如一类物种在不考虑种种灾难性因素的前提下,它的数量也是时间 t 的指数函数.需要指出,例题中采用的方法反映了"微积分"的基本思想,关于它的严格性,我们在学习了积分学后就能有充分的认识.

习 题

1.按定义证明下列函数在其定义域连续:

(1)$y=\sqrt{x}$; (2)$y=\sin\frac{1}{x}$;

(3)$y=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$.

2.确定下列函数的连续范围:

(1)$y=\tan x+\csc x$; (2)$y=\frac{1}{\sqrt{\cos x}}$;

(3) $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-3)}{x+1}}$； (4) $y=[x]\ln(1+x)$；

(5) $y=\left[\dfrac{1}{x}\right]$； (6) $y=\operatorname{sgn}(\sin x)$.

3. 若 $f(x)$ 在点 x_0 连续，则 $f^2(x)$ 与 $|f(x)|$ 在点 x_0 也连续. 反之，若 $f^2(x)$ 或 $|f(x)|$ 在点 x_0 连续，能否断言 $f(x)$ 在点 x_0 连续？

4. 若 $f(x)$ 在点 x_0 连续，$g(x)$ 在点 x_0 不连续，能否断言 $f(x)\cdot g(x)$ 在点 x_0 不连续？又若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 都不连续，则上面的断言是否成立？

5. 证明：若 f,g 在 $[a,b]$ 连续，则 $\max\{f,g\}$ 与 $\min\{f,g\}$ 在 $[a,b]$ 连续，其中

$$\max\{f,g\}=\max\{f(x),g(x)\},x\in[a,b];$$
$$\min\{f,g\}=\min\{f(x),g(x)\},x\in[a,b].$$

6. 若对任意 $\delta>0$，f 在 $[a+\delta,b-\delta]$ 上连续，能否得出

(1) f 在 (a,b) 上连续？

(2) f 在 $[a,b]$ 上连续？

7. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\alpha>0$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\beta$，证明：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=\alpha^\beta$；并求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{2x-1}{x+1}}$； (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$； (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+x}{n-1}\right)^{n}$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)$.

8. 指出下列函数的不连续点，并确定其不连续的类型：

(1) $y=\dfrac{x^2-1}{x^3-3x+2}$ (2) $y=[x]\sin\dfrac{1}{x}$；

(3) $y=\dfrac{x}{\sin x}$； (4) $y=[2x]-2[x]$；

(5) $y=\dfrac{1}{x^n}e^{\frac{1}{x^2}}$； (6) $y=x\ln^n|x|$；

(7) $y=\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}$； (8) $y=\dfrac{\sqrt{1+3x}-1}{\sqrt{1+2x}-1}$；

(9) $y=\begin{cases}\sin\pi x, & x\text{ 为有理数}\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$； (10) $y=\begin{cases}\sin\dfrac{\pi}{p}, & x=\dfrac{q}{p}(p,q\text{ 互质},p>0),\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$

§3　无穷小量与无穷大量的阶

无穷小量的比较

与数列极限类似，在函数极限中同样也有无穷小量与无穷大量的概念，这里先讨论无穷小量.

定义 3.3.1　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，则称当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$是**无穷小量**.

就是说，无穷小量是以零为极限的变量. 这里的极限过程 $x\to x_0$ 可以扩充到 $x\to x_0+$、x_0-、∞、$+\infty$、$-\infty$等情况.

设 $u(x)$，$v(x)$是两个变量，当 $x\to x_0$ 时，它们都是无穷小量. 为了比较两者趋于零的速度快慢，我们讨论$\dfrac{u(x)}{v(x)}$的极限情况：

(1)若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{u(x)}{v(x)}=0$，则表示当 $x\to x_0$ 时，$u(x)$趋于零的速度比 $v(x)$快. 我们称当 $x\to x_0$ 时，$u(x)$关于 $v(x)$是**高阶无穷小量**(或 $v(x)$关于$u(x)$是**低阶无穷小量**)，记为

$$u(x)=o(v(x))(x\to x_0).$$

例如

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x}=0$$

可表示为

$$1-\cos x=o(x)(x\to 0).$$

又如

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x}\right)=0$$

可表示为

$$\tan x-\sin x=o(x^2)(x\to 0).$$

(2)若存在 $A>0$，当 x 在x_0 的某个去心邻域中，成立

$$\left|\frac{u(x)}{v(x)}\right|\leqslant A$$

则称当 $x\to x_0$ 时，$\dfrac{u(x)}{v(x)}$是**有界量**，记为

$$u(x)=O(v(x))(x\to x_0).$$

例如当 $x\to 0$ 时，$x\sin\dfrac{1}{x}$与 x 都是无穷小量，且 $\left|\dfrac{x\sin\dfrac{1}{x}}{x}\right|\leqslant 1$，从而有表示式

$$x\sin\frac{1}{x} = O(x)(x\to 0).$$

若又存在 $a>0$，当 x 在 x_0 的某个去心邻域中，成立

$$a\leqslant\left|\frac{u(x)}{v(x)}\right|\leqslant A,$$

则称当 $x\to x_0$ 时，$u(x)$与 $v(x)$是**同阶无穷小量**.

显然，若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{u(x)}{v(x)}=c\neq 0$，则 $u(x)$与 $v(x)$必是同阶无穷小量.

(3)若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{u(x)}{v(x)}=1$，称当 $x\to x_0$ 时，$u(x)$与 $v(x)$是**等价无穷小量**，记为

$$u(x)\sim v(x)\ (x\to x_0).$$

上式也可写成

$$u(x) = v(x) + o(v(x))\quad (x\to x_0),$$

它表示当 $x\to x_0$ 时，$u(x)$与 $v(x)$并不一定相等，两者相差一个关于 $v(x)$的高阶无穷小量.

例如 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 可表示为

$$\sin x\sim x(x\to 0)\text{ 或者 }\sin x = x + o(x)\quad (x\to 0);$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}}=1$ 可表示为

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2\quad (x\to 0)$$

或者

$$1-\cos x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\quad (x\to 0);$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\frac{1}{2}x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x\cos x}\cdot\dfrac{1-\cos x}{x^2/2}\right)=1$ 可表示为

$$\tan x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3\quad (x\to 0)$$

或者

$$\tan x-\sin x = \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)\quad (x\to 0).$$

需要注意的是，记号“o”、“O”和“$\sim$”都是相对于一定的极限过程的，一般来说，在使用时应附上记号“$(x\to x_0)$”，以说明相应的极限过程. 只有在意义明确，不会发生误解的前题下才能省略.

从上面例子可以看出,我们往往选取 $v(x)=(x-x_0)^k$ 作为与 $u(x)$ 进行比较的无穷小量(如果极限过程是 $x\to\infty$,则选取 $v(x)=\frac{1}{x^k}$),这样有便于得出 $u(x)$ 作为无穷小量的确切阶数.例如由 $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2(x\to 0)$ 可知当 $x\to 0$ 时,$1-\cos x$ 是二阶无穷小量;由 $\tan x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3(x\to 0)$ 可知当 $x\to 0$ 时,$\tan x-\sin x$ 是三阶无穷小量.

特别,我们有时选取 $v(x)=1$(即 $k=0$)与变量 $u(x)$ 进行比较,这时,

$$u(x)=o(1)\quad(x\to x_0)$$

表示当 $x\to x_0$ 时,$u(x)$ 是无穷小量;

$$u(x)=O(1)\quad(x\to x_0)$$

则表示当 $x\to x_0$ 时,$u(x)$ 是有界量.

例如当 $x\to 0+$ 时,$\frac{-1}{\ln x}$ 是无穷小量,但它关于无穷小量 x^α(α 为任意小的正数)总是低阶无穷小量(见下面的例 3.3.1),所以它只能表示为

$$\frac{-1}{\ln x}=o(1)\quad(x\to 0+).$$

又如当 $x\to 0$ 时,$e^x\sin\frac{1}{x}$ 是有界量,所以可表示为

$$e^x\sin\frac{1}{x}=O(1)\quad(x\to 0).$$

无穷大量的比较

定义 3.3.2　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$(或 $\pm\infty$),则称当 $x\to x_0$ 时,$f(x)$ 是**无穷大量**(或正、负无穷大量).

定义中的极限过程同样可以扩充到 $x\to x_0+$、x_0-、∞、$+\infty$、$-\infty$ 等情况.

设 $u(x)$, $v(x)$ 是两个变量,当 $x\to x_0$ 时它们都是无穷大量,为了比较两者趋于无穷大的速度,同样我们讨论 $\frac{u(x)}{v(x)}$ 的极限情况:

(1)若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{u(v)}{v(x)}=\infty$,则表示当 $x\to x_0$ 时,$u(x)$ 趋于无穷大的速度比 $v(x)$ 快.我们称之为当 $x\to x_0$ 时,$u(x)$ 关于 $v(x)$ 是**高阶无穷大量**(或 $v(x)$ 关于 $u(x)$ 是**低阶无穷大量**).

由于对任意自然数 k,有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^k}=\infty(a>1)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^k x}{x}=0$(见 §1 习题 4),所以当 $x\to+\infty$ 时,$a^x(a>1)$ 关于 x^k 是高阶无穷大量,$\ln^k x$ 关于 x 是低阶无穷大量.

(2)若存在 $A>0$,当 x 在 x_0 的某个去心邻域中,成立

$$\left|\frac{u(x)}{v(x)}\right|\leqslant A,$$

则称当 $x\to x_0$ 时,$\frac{u(x)}{v(x)}$是有界量,记为

$$u(x)=O(v(x))\quad(x\to x_0).$$

例如当 $x\to+\infty$ 时,$x(\arctan x+\sin x)$与 x 都是无穷大量,且 $\left|\frac{x(\arctan x+\sin x)}{x}\right|\leqslant 3$,从而有表示式

$$x(\arctan x+\sin x)=O(x)\quad(x\to+\infty).$$

若又存在 $a>0$,当 x 在 x_0 的某个去心邻域中,成立

$$a\leqslant\frac{u(x)}{v(x)}\leqslant A,$$

则称当 $x\to x_0$ 时,$u(x)$与 $v(x)$是**同阶无穷大量**.

显然,若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{u(x)}{v(x)}=c\neq 0$,则 $u(x)$与 $v(x)$必是同阶无穷大量.

(3)若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{u(x)}{v(x)}=1$,称当 $x\to x_0$ 时,$u(x)$与 $v(x)$是**等价无穷大量**,记为

$$u(x)\sim v(x)\quad(x\to x_0).$$

例如 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3\sin\frac{1}{x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$ 可表示为

$$x^3\sin\frac{1}{x}\sim x^2\quad(x\to\infty).$$

对于极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\tan x$,令 $y=\frac{\pi}{2}-x$,得到

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\tan x=\lim_{y\to 0+}\frac{y\cos y}{\sin y}=1,$$

此即可表示为

$$\tan x\sim\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}\quad\left(x\to\frac{\pi}{2}-\right).$$

需注意的是,在进行无穷大量阶的比较时,习惯上不使用记号“o”,但仍使用记号“O”和“$\sim$”.

例 3.3.1 当 $x\to 0+$ 时,对任意自然数 k,$\left(\frac{-1}{\ln x}\right)^k$ 关于 x 是低阶无穷小量.

证　令 $y=-\ln x$,则当 $x\to 0+$ 时,$y\to+\infty$,

$$\lim_{x\to 0+}\frac{x}{\left(\frac{-1}{\ln x}\right)^k}=\lim_{y\to+\infty}\frac{y^k}{e^y}=0.$$

证毕

例 3.3.2　当 $x\to 0+$ 时,对任意自然数 k,$e^{-\frac{1}{x}}$关于x^k 是高阶无穷小量.

证　令 $y=\frac{1}{x}$,则当 $x\to 0+$ 时,$y\to+\infty$,

$$\lim_{x\to 0+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^k}=\lim_{y\to+\infty}\frac{y^k}{e^y}=0.$$

证毕

等价量

所谓**等价量**,就是指等价无穷小量或等价无穷大量.在极限计算中,等价量起着举足轻重的作用.下面我们通过例题,导出一些基本的等价量,并讨论它们在计算极限时的应用.

例 3.3.3　$\ln(1+x)\sim x(x\to 0)$.

证　在§3.1 中证明了$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$,此式等价于$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.利用对数函数的连续性,得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=1.$$

证毕

例 3.3.4　$e^x-1\sim x\quad(x\to 0)$.

证　令 $y=e^x-1$,则 $x=\ln(1+y)$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=1.$$

证毕

例 3.3.5　$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x\quad(x\to 0)$.

证　令$(1+x)^\alpha-1=y$,则当 $x\to 0$ 时,$y\to 0$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{\ln(1+x)^\alpha}\cdot\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}=\alpha.$$

证毕

这三个等价关系连同已经知道的 $\sin x\sim x\ (x\to 0)$,是计算极限时最常用的关系式.

例 3.3.6 设 $u(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}$.

当 $x\to+\infty$时, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}=1$,所以有

$$u(x)\sim x^{\frac{1}{2}}(x\to+\infty);$$

当 $x\to0+$时, $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x}}=\lim\limits_{x\to0+}\sqrt{1+\sqrt{x}}=1$,所以有

$$u(x)\sim x^{\frac{1}{4}}(x\to0+).$$

例 3.3.7 设 $v(x)=2x^3+3x^5$

当 $x\to\infty$时, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^5}{3x^5}=1$,所以有

$$v(x)\sim3x^5(x\to\infty);$$

当 $x\to0$ 时, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^3+3x^5}{2x^3}=1$,所以有

$$v(x)\sim2x^3(x\to0).$$

考察例3.3.6中的变量 $u^2(x)$和例3.3.7中的变量 $v(x)$,可以得出这样一个结论:设一个变量是由几个成分迭加而成的,则当它是无穷大量时,它与阶数最高的那个无穷大量成分等价;当它是无穷小量时,它与阶数最低的那个无穷小量成分等价.

在计算具体的函数极限时,用等价的无穷小量(或无穷大量)作代换,往往会带来很大的方便.

例 3.3.8

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n+1}x^{n+1}+\cdots+a_mx^m}{b_nx^n+b_{n+1}x^{n+1}+\cdots+b_mx^m}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_mx^m}{b_mx^m}=\frac{a_m}{b_m}.$$

$$\lim_{x\to0}\frac{a_nx^n+a_{n+1}x^{n+1}+\cdots+a_mx^m}{b_nx^n+b_{n+1}x^{n+1}+\cdots+b_mx^m}=\lim_{x\to0}\frac{a_nx^n}{b_nx^n}=\frac{a_n}{b_n}.$$

例 3.3.9

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-e^{\frac{x}{3}}}{\ln(1+2x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)-(e^{\frac{x}{3}}-1)}{\ln(1+2x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left[\frac{x}{2}+o(x)\right]-\left[\frac{x}{3}+o(x)\right]}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{6}+o(x)}{2x}=\frac{1}{12}.$$

例 3.3.10

$$\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt[3]{x^3+x}-\sqrt[3]{x^3-x}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}x^2\left[\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)-\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^2}}-1\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}x^2\left\{\left[\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]-\left[-\frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]\right\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}x^2\left[\frac{2}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]=\frac{2}{3}.$$

例 3.3.11

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}[1-(1-\cos x)]^{\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{2}{x^2}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

上例即例 3.2.12，读者可以发现，利用等价关系 $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}(x\to 0)$，问题就变得简单多了.

必须注意的是，当计算中出现无穷小量（或无穷大量）相互叠加时，就不能随便用等价量直接进行代换. 例如，在求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$ 时，若贸然用 $\tan x\sim x(x\to 0)$ 与 $\sin x\sim x(x\to 0)$ 进行代换，就会得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0$$

的错误结论——我们已经知道 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{2}$.

事实上，虽然当 $x\to 0$ 时，$\tan x$ 与 $\sin x$ 分别等价于 x，但这是省略了关于 x 的高阶无穷小量部分后得到的等价关系，所以 $\operatorname{tg}x-\sin x$ 并不等于 0，而是等价于 x 的高阶无穷小量 $\frac{x^3}{2}$. 对这一问题，如果我们用 $\tan x=x+o(x)$ 和 $\sin x=x+o(x)$ 进行代换，则得到

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{o(x)}{x^3},$$

虽然不能据此判断极限是否存在,但至少可以避免出现上述错误.这也就是我们在例 3.3.9 和例 3.3.10 的计算中保留高阶无穷小量的缘故.

再比如,在求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1-\frac{1}{2}x}{x^2}$时,也不能直接用 $x\to0$ 时的等价关系$\sqrt{1+x}-1\sim\frac{1}{2}x$ 代人,事实上,

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1-\frac{1}{2}x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1+x)-(1+\frac{1}{2}x)^2}{x^2\left(\sqrt{1+x}+1+\frac{1}{2}x\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{4}x^2}{x^2\left(\sqrt{1+x}+1+\frac{1}{2}x\right)}=-\frac{1}{8}.$$

(学了微分学后,可知本题要用等价无穷小量$\sqrt{1+x}-1\sim\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2(x\to0)$来代.)

习　题

1. 确定 a 与 α,使下列各无穷小量或无穷大量等价于$(\sim)ax^\alpha$

(1) $u(x)=x^5-3x^4+2x^3\quad(x\to0,x\to\infty)$;

(2) $u(x)=\dfrac{x^5+2x^2}{3x^4-x^3}\quad(x\to0,x\to\infty)$;

(3) $u(x)=\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^2}\quad(x\to0+,x\to+\infty)$;

(4) $u(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\quad(x\to0+,x\to+\infty)$;

(5) $u(x)=\sqrt{1+3x}-\sqrt[3]{1+2x}\quad(x\to0,x\to+\infty)$;

(6) $u(x)=\sqrt{x^2-1}-x\quad(x\to+\infty)$;

(7) $u(x)=\sqrt{x^2+x}-x\quad(x\to+\infty)$;

(8) $u(x)=\sqrt{1+x\sqrt{x}}-e^{2x}\quad(x\to0)$;

(9) $u(x)=\ln\cos x-\arctan x^2\quad(x\to0)$;

(10) $u(x)=\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}\quad(x\to0)$.

2. (1) 当 $x\to+\infty$时,下列变量都是无穷大量,将它们从低阶到高阶进行

排列，并说明理由.

$$a^x(a>1),x^x,x^a(a>0),\ln^k x(k>0),[x]!.$$

(2)当 $x\to 0+$ 时，下列变量都是无穷小量，将它们从高阶到低阶进行排列，并说明理由.

$$x^a(a>0),\frac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]!},a^{-\frac{1}{x}}(a>1),\left(\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{x}},\ln^{-k}\left(\frac{1}{x}\right)(k>0).$$

3. 计算下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+2x^2}}{\ln(1+3x)}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$；　(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right)$；

(5) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-a^a}{x-a}(a>0)$；　(6) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^a-a^a}{x-a}(a>0)$；

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\ln(1+x)-\ln x)$；　(8) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}(a>0)$；

(9) $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$；　(10) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x-\dfrac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$；

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{x}-1)(x>0)$；　(12) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x})(x>0)$.

§4 闭区间上的连续函数

闭区间上的连续函数具有一些重要的性质，这些性质是开区间上的连续函数不一定具有的. 它们在今后的学习中有重要的应用.

有界性定理

定理 3.4.1 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则它在 $[a,b]$ 上有界.

证 用反证法.

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界，将 $[a,b]$ 等分为两个小区间 $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ 与 $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$，则 $f(x)$ 至少在其中之一上无界，把它记为 $[a_1,b_1]$；再将闭区间 $[a_1,b_1]$ 等分为两个小区间 $\left[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}\right]$ 与 $\left[\frac{a_1+b_1}{2},b_1\right]$，同样 $f(x)$ 至少在其中之一上无界，把它记为 $[a_2,b_2]$，；……. 这样的步骤一直做下去，便得到一个闭区间套 $\{[a_n,b_n]\}$，$f(x)$ 在其中任何一个闭区间 $[a_n,b_n]$ 上都是无界的.

根据闭区间套定理，存在唯一的实数 ξ 属于所有的闭区间 $[a_n,b_n]$，并且

$$\xi=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n.$$

因为 $\xi\in[a,b]$，而 $f(x)$ 在点 ξ 连续，由定理 3.1.2 的推论 2，存在 $\delta>0$，$M>0$，对于一切 $x\in O(\xi,\delta)\cap[a,b]$，成立

$$|f(x)|\leqslant M.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$，我们又可知道对于充分大的 n，

$$[a_n,b_n]\subset O(\xi,\delta)\cap[a,b],$$

于是得到 $f(x)$ 在这些闭区间 $[a_n,b_n]$（n 充分大）上有界的结论，从而产生矛盾.

这说明所作的假设不能成立，即函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必定有界.

证毕

开区间上的连续函数就不一定是有界的. 例如 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 上连续，但显然是无界的.

最值定理

定理 3.4.2 *若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则它在 $[a,b]$ 上必能取到最大（小）值，即存在 ξ 和 $\eta\in[a,b]$，对于一切 $x\in[a,b]$ 成立*

$$f(\xi)\leqslant f(x)\leqslant f(\eta).$$

证 由上述定理 3.4.1，集合

$$R_f=\{f(x)\mid x\in[a,b]\}$$

是一个有界数集，所以必有上（下）确界，记

$$\alpha=\inf R_f,\qquad \beta=\sup R_f.$$

现在证明存在 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=\alpha$.

按照下确界的定义，一方面对一切 $x\in[a,b]$，成立 $f(x)\geqslant\alpha$；另一方面对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $x\in[a,b]$，使得 $f(x)<\alpha+\varepsilon$. 于是取 $\varepsilon_n=\dfrac{1}{n}$，$n=1,2,3,\cdots$，相应地得到一个数列 $\{x_n\}$，$x_n\in[a,b]$ 并且满足

$$\alpha\leqslant f(x_n)<\alpha+\frac{1}{n}.$$

因为 $\{x_n\}$ 是有界数列，应用 Bolzano－Weierstrass 定理，存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$：

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=\xi,\text{且 }\xi\in[a,b].$$

考虑不等式

$$\alpha\leqslant f(x_{n_k})<\alpha+\frac{1}{n_k},\quad k=1,2,3,\cdots,$$

令 $k\to\infty$，由极限的夹逼性与 $f(x)$ 在点 ξ 的连续性，得到

$$f(\xi)=\alpha.$$

这说明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取到最小值 α，即 $\alpha=\min R_f$.

同样可以证明存在 $\eta\in[a,b]$，使得 $f(\eta)=\beta=\max R_f$.

证毕

同样，开区间上的连续函数即使有界，也不一定能取到它的最大(小)值. 例如，$f(x)=x$ 在$(0,1)$连续而且有界，因而有上、下确界 $\alpha=\inf\{f(x)\mid x\in(0,1)\}=0$ 和 $\beta=\sup\{f(x)\mid x\in(0,1)\}=1$，但是，$f(x)$在区间$(0,1)$上取不到 $\alpha=0$ 与 $\beta=1$.

零点存在定理

定理 3.4.3　*若函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则一定存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$.*

证　不失一般性，设 $f(a)<0,f(b)>0$，定义集合 V：

$$V=\{x\mid f(x)<0,x\in[a,b]\}.$$

显然，集合 V 有界、非空，所以必有上确界. 令

$$\xi=\sup V,$$

现证 $\xi\in(a,b)$，且 $f(\xi)=0$.

由 $f(x)$的连续性及 $f(a)<0$，$\exists\delta_1>0,\forall x\in[a,a+\delta_1)$：$f(x)<0$；再由 $f(b)>0$，$\exists\delta_2>0,\forall x\in(b-\delta_2,b]$：$f(x)>0$. 于是可知

$$a+\delta_1\leqslant\xi\leqslant b-\delta_2,$$

即 $\xi\in(a,b)$.

取$\{x_n\}\in V$，$x_n\to\xi(n\to\infty)$，因 $f(x_n)<0$，可以得到

$$f(\xi)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)\leqslant 0.$$

若 $f(\xi)<0$，由 $f(x)$在点 ξ 的连续性，$\exists\delta>0,\forall x\in O(\xi,\delta)$：

$$f(x)<0,$$

这就与 $\xi=\sup V$ 产生矛盾. 于是必然有

$$f(\xi)=0.$$

证毕

例 3.4.1　讨论多项式 $p(x)=2x^3-3x^2-3x+2$ 零点(亦称为"根")的位置.

解　通过简单的计算，可以得到

x	-2	0	1	3
$p(x)$	-20	2	-2	20

由此得知 $p(x)$的三个零点(或根)分别落在区间$(-2,0)$，$(0,1)$与$(1,3)$内. 事实上，$p(x)=2(x+1)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)(x-2)$，它的三个零点为 $x_1=-1$，$x_2=\dfrac{1}{2}$，$x_3=2$.

例 3.4.2 设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,且 $f([a,b])\subset[a,b]$,则存在 $\xi\in[a,b]$,使 $f(\xi)=\xi$.(这样的 ξ 称为$f(x)$的一个**不动点**.)

证 设 $g(x)=f(x)-x$,则 $g(x)$在$[a,b]$上连续,由 $f([a,b])\subset[a,b]$,可知 $g(a)\geqslant 0,g(b)\leqslant 0$.

若 $g(a)=0$,则有 $\xi=a$;若 $g(b)=0$,则有 $\xi=b$;若 $g(a)>0,g(b)<0$,则由定理 3.4.3,必存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $g(\xi)=0$,即 $f(\xi)=\xi$.

证毕

本例中闭区间$[a,b]$不能改为开区间.例如 $f(x)=\frac{x}{2}$在开区间$(0,1)$上连续,且 $f((0,1))\subset(0,1)$,但 $f(x)$在开区间$(0,1)$中没有不动点.

中间值定理

定理 3.4.4 若函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则它一定能取到最大值 $M=\max\{f(x)\mid x\in[a,b]\}$和最小值 $m=\min\{f(x)\mid x\in[a,b]\}$之间的任何一个值.

证 由最值定理,存在 $\xi,\eta\in[a,b]$,使得

$$f(\xi)=m,\ f(\eta)=M.$$

不妨设 $\xi<\eta$,对任何一个中间值 $C,m<C<M$,考察辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-C.$$

因为 $\varphi(x)$在闭区间$[\xi,\eta]$上连续,$\varphi(\xi)=f(\xi)-C<0,\varphi(\eta)=f(\eta)-C>0$,由零点存在定理,必有 $\zeta\in(\xi,\eta)$,使得

$$\varphi(\zeta)=0,\text{即 } f(\zeta)=C.$$

证毕

推论 若函数在闭区间$[a,b]$连续,m 是最小值,M 是最大值,则 $f(x)$的值域是闭区间

$$R_f=[m,M].$$

在定理 3.2.2 中,我们利用确界存在定理证明了:$[a,b]$上严格单调增加的连续函数的值域是闭区间$[f(a),f(b)]$.显然这一结论包含在上述定理与推论中.

一致连续概念

函数 $f(x)$在某个区间上连续,是指 $f(x)$在该区间上的每一点连续.而 $f(x)$在一点 x_0 的连续,可以表述为:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x(|x-x_0|<\delta):|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

需要强调的是,这里的 δ 的选取与两个因素有关:它依赖于 ε 的大小是不言而喻的,同时它还依赖于与所讨论的点 x_0.也就是说,即使对同一个 ε,在不同的 x_0 处,使$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 的 x 的允许取值范围可以大相径庭,所以

准确地说，δ 应表述为 $\delta=(x_0,\varepsilon)$.

这样就产生一个问题：对任意给定的 $\varepsilon>0$，能否找到一个只与 ε 有关，而对区间上一切点都适用的 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，只要 x',x'' 满足 $|x'-x''|<\delta$，就能保证不等式 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ 成立？

这一问题的答案是不一定的：它不仅与所讨论的函数 $f(x)$ 有关，也与所讨论的区间有关. 对给定的 ε，若将 x_0 处允许的最大的 $\delta(x_0,\varepsilon)$ 记为 $\delta^*(x_0,\varepsilon)$，则显然，存在上述统一的 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ 等价于对于区间一切点 x_0，$\delta^*(x_0,\varepsilon)$ 有非零下确界. 但实际上，对 $\delta^*(x_0,\varepsilon)$ 在区间上取下确界，得到的结果可能是 $\inf\limits_{x_0}\delta^*(x_0,\varepsilon)=0$（见例 3.4.4）.

下面我们就这一关于函数在某区间上整体性质的问题作严格的叙述. 下文中提到的区间 X 表示任意一种有限或无限的区间，如闭区间 $[a,b]$，开区间 (a,b)、$(-\infty,b)$、$(-\infty,+\infty)$，半开半闭区间 $[a,b)$、$(-\infty,b]$、$[a,+\infty)$ 等等.

定义 3.4.1　*设函数 $f(x)$ 在区间 X 上定义，若对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，只要 $x',x''\in X$ 满足 $|x'-x''|<\delta$，就成立 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$，则称函数 $f(x)$ 在区间 X 上*一致连续.

在上面定义中，若固定 $x''=x_0\in X$，就得到 $f(x)$ 在点 x_0 的连续性. 由于 x_0 可以是 X 中的任意一点，于是得到

$$f(x)\text{ 在 }X\text{ 上一致连续}\Rightarrow f(x)\text{ 在 }X\text{ 上连续}.$$

至于反向的命题，就不一定成立. 下面先看几个例子.

例 3.4.3　$f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且一致连续.

证　由不等式

$$|\sin x'-\sin x''|=2\left|\cos\frac{x'+x''}{2}\sin\frac{x'-x''}{2}\right|\leqslant|x'-x''|,$$

对于任意给定的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，则对于任意两点 $x',x''\in(-\infty,+\infty)$，只要 $|x'-x''|<\delta$，就一定成立

$$|\sin x'-\sin x''|\leqslant|x'-x''|<\delta=\varepsilon.$$

由定义，$\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是一致连续的.

证毕

例 3.4.4　$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 连续，但非一致连续.

证　对于任意给定的 ε，$0<\varepsilon<1$，我们通过精确地解出 $\delta(x_0,\varepsilon)$，来说明不存在适用于整个区间 $(0,1)$ 的 $\delta(\varepsilon)>0$.

对任何 $x,x_0\in(0,1)$，关系式 $\left|\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x_0}\right|<\varepsilon$ 即 $\dfrac{1}{x_0}-\varepsilon<\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{x_0}+\varepsilon$ 等价

于

$$\frac{x_0}{1+x_0\varepsilon}<x<\frac{x_0}{1-x_0\varepsilon},$$

或写成

$$\frac{-x_0^2\varepsilon}{1+x_0\varepsilon}<x-x_0<\frac{x_0^2\varepsilon}{1-x_0\varepsilon},$$

由此得到

$$\delta(x_0,\varepsilon)=\min\left\{\frac{x_0^2\varepsilon}{1+x_0\varepsilon},\frac{x_0^2\varepsilon}{1-x_0\varepsilon}\right\}=\frac{x_0^2\varepsilon}{1+x_0\varepsilon}.$$

显然,这就是 $\delta^*(x_0,\varepsilon)$.

于是当 $x_0\to0$ 时,$\delta^*(x_0,\varepsilon)=\delta(x_0,\varepsilon)\to0$. 换言之,我们找不到对区间 $(0,1)$ 中一切点都适用的 $\delta(\varepsilon)>0$,因此 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上非一致连续.

证毕

需要指出,对于大部分函数,要精确解出 $\delta^*(x_0,\varepsilon)$ 往往非常困难,因而这种方法对于判断某一函数在某一区间上是否一致连续是不实用的. 下面给出的定理为判断非一致连续性提供了很便利的方法.

定理3.4.5 设函数 $f(x)$ 在区间 X 上定义,则 $f(x)$ 在 X 上一致连续的充分必要条件是:对任何点列 $\{x_n'\}$ $(x_n'\in X)$ 和 $\{x_n''\}$ $(x_n''\in X)$,只要满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$,就成立 $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n')-f(x_n''))=0$.

证 必要性:

函数 $f(x)$ 在 X 上的一致连续性可表述为:$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x',x''\in X$ $(|x'-x''|<\delta)$:$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$

对上述的 $\delta>0$,由 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$,可知 $\exists N,\forall n>N$:$|x_n'-x_n''|<\delta$,从而得到

$$|f(x_n')-f(x_n'')|<\varepsilon,$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n')-f(x_n''))=0$.

充分性:采用反证法.

函数 $f(x)$ 在 X 上的非一致连续性可表述为:$\exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0,,\exists x',x''\in X(|x'-x''|<\delta)$:$|f(x'_n)-f(x''_n)|\geqslant\varepsilon_0$.

取 $\delta_n=\dfrac{1}{n}$,$n=1,2,3,\cdots$,于是存在 $x_n',x_n''\in X$,满足

$$|x_n'-x_n''|<\frac{1}{n},|f(x_n')-f(x_n'')|\geqslant\varepsilon_0.$$

显然,$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$,但 $\{f(x_n')-f(x_n'')\}$ 不可能收敛于 0,这就产生矛盾.

证毕

对例 3.4.4,只要取 $x_n'=\frac{1}{2n}$, $x_n''=\frac{1}{n}$,就有 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$,但

$$\lim_{n\to\infty}(f(x_n')-f(x_n''))=\lim_{n\to\infty}(2n-n)=\infty,$$

由定理 3.4.5,即可知道 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 非一致连续.

但是若将区间 $(0,1)$ 换成 $[\eta,1)$, $\eta>0$,则 $f(x)=\frac{1}{x}$ 就在 $[\eta,1)$ 上一致连续.这是因为

$$\left|\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\right|=\frac{|x'-x''|}{x'x''}\leqslant\frac{|x'-x''|}{\eta^2},$$

对于任意给定的 $\varepsilon>0$,只要取 $\delta=\eta^2\varepsilon>0$ 即可.

例 3.4.5 $f(x)=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上非一致连续,但是在 $[0,A]$ 上一致连续(A 为任意有限正数).

证 取 $x_n'=\sqrt{n+1}$, $x_n''=\sqrt{n}$, $n=1,2,3,\cdots$,于是

$$\lim_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0,$$

但是 $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n')-f(x_n''))=1$,由定理 3.4.5 可知 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 非一致连续.

当区间限制在 $[0,A]$ 时,有

$$|x'^2-x''^2|=|(x'+x'')(x'-x'')|\leqslant 2A|x'-x''|,$$

对于任意给定的 $\varepsilon>0$,可以取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2A}>0$,对任意 $x',x''\in[0,A]$,只要满足 $|x'-x''|<\delta$,就成立 $|x'^2-x''^2|<\varepsilon$,即 $f(x)=x^2$ 在 $[0,A]$ 上一致连续.

证毕

通过上面几个例子可以知道,长度无限的区间,如 $[a,+\infty)$ 上的连续函数不一定一致连续;长度有限的开区间 (a,b) 上的连续函数也不一定一致连续.但是对于长度有限的闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数,我们有下面的著名定理:

定理 3.4.6(Cantor 定理) *若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则它在 $[a,b]$ 上一致连续.*

证 采用反证法.

假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非一致连续,由定理 3.4.5 的证明过程,可知存在 $\varepsilon_0>0$ 及两列点列 $\{x_n'\}$ 和 $\{x_n''\}$, $x_n',x_n''\in[a,b]$,满足

$$|x_n'-x_n''|<\frac{1}{n},\text{且}|f(x_n')-f(x_n'')|\geqslant\varepsilon_0,n=1,2,3,\cdots.$$

因为$\{x_n'\}$有界，由 Bolzano－Weierstrass 定理，存在收敛子列$\{x_{n_k}'\}$：

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}' = \xi, \xi \in [a,b].$$

在点列$\{x_n''\}$中取子列$\{x_{n_k}''\}$，其下标与$\{x_{n_k}'\}$下标相同，则由

$$|x_{n_k}' - x_{n_k}''| < \frac{1}{n_k}, k = 1,2,3,\cdots,$$

又得到

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}'' = \lim_{k\to\infty}[x_{n_k}' + (x_{n_k}'' - x_{n_k}')] = \lim_{k\to\infty}x_{n_k}' = \xi.$$

由于函数 $f(x)$在点 ξ 连续，因而有

$$\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k}') = \lim_{k\to\infty}f(x_{n_k}'') = f(\xi),$$

于是得到：

$$\lim_{k\to\infty}(f(x_{n_k}') - f(x_{n_k}'')) = 0,$$

但这与$|f(x_n') - f(x_n'')| \geqslant \varepsilon_0$ 产生矛盾.

从而推翻假设，得到 $f(x)$在$[a,b]$上的一致连续性结论.

证毕

我们已经知道，有限开区间(a,b)上的连续函数 $f(x)$不一定一致连续. 那么要具备怎样的条件，才能保证它在(a,b)上一致连续呢？下面给出函数本身应具有的特征.

定理 3.4.7 *函数 $f(x)$在有限开区间(a,b)连续，则 $f(x)$在(a,b)上一致连续的充分必要条件是：$f(a+)$与 $f(b-)$存在.*

证 充分性：

设 $f(a+)=A, f(b-)=B$，定义函数 $\tilde{f}(x)$：

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} A, & x = a; \\ f(x), & a < x < b; \\ B, & x = b, \end{cases}$$

则 $\tilde{f}(x)$是闭区间$[a,b]$上的连续函数.

由 Cantor 定理，$\tilde{f}(x)$在$[a,b]$上一致连续. 显然，对于一数连续的函数，当定义域缩小时，其一致连续性仍然保持. 于是函数 $\tilde{f}(x)$在开区间(a,b)上也是一致连续的，这就说明函数 $f(x)$在(a,b)上一致连续.

必要性：设函数 $f(x)$在开区间(a,b)上一致连续，则$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall x', x''\in(a,b)(|x'-x''|<\delta)$：

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

在区间(a,b)上任意选取数列$\{x_n\}$，$x_n\in(a,b)$且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$. 因数列$\{x_n\}$是基本数列，对于上述 $\delta>0, \exists N, \forall n,m>N$：$|x_n - x_m|<\delta$，从而

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon.$$

这说明了函数值数列$\{f(x_n)\}$也是基本数列，因而必定收敛.

由定理 3.1.5′,可知 $f(a+)=\lim\limits_{x\to a+}f(x)$存在.

同理可以证明 $f(b-)=\lim\limits_{x\to b-}f(x)$存在.

证毕

定理 3.4.7 不适用于无限开区间的情况.例如:$f(x)=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$上是一致连续的,但 $f(-\infty)$与 $f(+\infty)$都不存在.请读者分析一下,在无限开区间的情况下,证明中哪一步不能通过.

最后我们指出两点:

1. 本节中给出的 5 个定理:有界性定理、最值定理、零点存在定理、中间值定理、Cantor 定理(即一致连续定理),是闭区间上连续函数最重要的分析性质,请读者务必牢记并熟练掌握.

2. 在证明这 5 个定理时,我们分别采用了确界存在定理、闭区间套定理、Bolzano－Weierstrass 定理和 Cauchy 收敛原理.事实上,由于实数系的 5 个基本定理是等价的,所以在理论上,可以采用从实数系的连续性到实数系的完备性中的任何一个定理,来证明上述的闭区间上连续函数的任何一个性质,只是证明的难度稍有差别罢了.

作为对这些重要内容的一种很好的复习和总结方式,建议读者能自行试着用各种不同的方法重新证明这几个性质(参见习题 4 和 5).

习　题

1. 证明:函数 $f(x)$在$[a,+\infty)$上连续,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$(有限数),则 $f(x)$在$[a,+\infty)$有界.

2. 证明:若函数 $f(x)$在开区间(a,b)上连续,且 $f(a+)$和 $f(b-)$存在,则它可取到介于 $f(a+)$和 $f(b-)$之间的一切中间值.

3. 证明:若闭区间$[a,b]$上的单调有界函数 $f(x)$能取到 $f(a)$和 $f(b)$之间的一切值,则 $f(x)$是$[a,b]$上的连续函数.

4. 应用 Bolzano－Weierstrass 定理证明闭区间上连续函数的有界性定理.

5. 应用闭区间套定理证明零点存在定理.

6. 按一致连续的定义论证:

(1)$\sin\dfrac{1}{x}$在$(0,1)$上不一致连续,但在$(a,1)(a>0)$上一致连续;

(2)$\sin x^2$ 在$(-\infty,+\infty)$上不一致连续,但在$[0,A]$上一致连续;

(3)$\sqrt{x}$在$[0,+\infty)$上一致连续;

(4)$\ln x$ 在$[1,+\infty)$上一致连续.

7.证明:对椭圆内的任意一点 P,存在椭圆过 P 的一条弦,使得 P 是该弦的中点.

(提示:用零点存在定理.)

8.设函数 $f(x)$在$[0,2]$上连续,且 $f(0)=f(2)$,证明:存在 $x,y\in[0,2]$, $y-x=1$,使得 $f(x)=f(y)$.

9.若函数 $f(x)$在有限开区间(a,b)上一致连续,则 $f(x)$在(a,b)上有界.

10.证明:

(1)某区间上两个一致连续函数之和必定一致连续;

(2)某区间上两个一致连续函数之积不一定一致连续.

11.证明:若函数 $f(x)$在$[a,+\infty)$上连续,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}=A$(有限数),则 $f(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续.

第四章　微　　分

§1　微分和导数

微分概念的导出背景

人们通常所说的"微积分"实际上包含了微分和积分两个部分，这一章我们先来谈谈微分.

当一个函数的自变量有微小的改变时，它的因变量一般说来也会有一个相应的改变. 微分的原始思想在于去寻找一种方法，当因变量的改变也是很微小的时候，能够简便而又比较精确地估计出这个改变量.

我们先来看一个简单的例子.

维持物体围绕地球作永不着地(理论上)的飞行所需要的最低速度称为第一宇宙速度. 在中学里，利用计算向心加速度的办法已经求出这个速度约为7.9km/s，现在我们改用另一种思路去推导它.

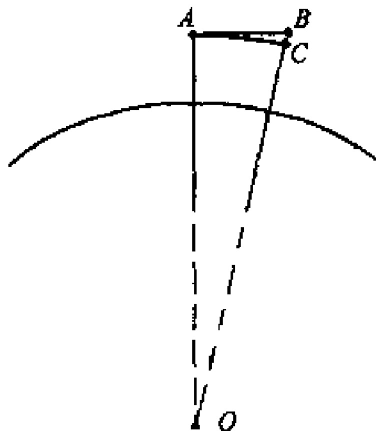


图 4.1.1

设卫星当前时刻在地球表面附近的 A 点沿着水平方向飞行，假如没有外力影响的话，那么它在一秒钟后本应到达 B 点. 但事实上它要受到地球的引力，因而实际到达的并非是 B 点而是 C 点，$BC=4.9\text{m}$ 是自由落体在重力加速度的作用下，第一秒中所走过的距离.

容易看出，若 C 点与地心 O 的距离与 A 点到 O 的距离是相等的，那么由运动的独立性原理，就可以推断出卫星在沿地球的一个同心圆轨道运行，也就是作环绕地球的飞行了. 因此，卫星应具有的最小飞行速度应为满足下述条件的直线段 AB 的长度：$\triangle AOB$ 是直角三角形，OA 和 OC 可近似地取为地球

的平均半径 6 371km,也就是 6 371 000m,而 BC=4.9m. 于是由勾股定理

$$AB^2 = (6\,371\,000 + 4.9)^2 - (6\,371\,000)^2.$$

显然,就这样按上式去计算 AB^2 是不可取的——这将导致两个 $O(10^{13})$ 量级的数直接相减,工作量较大,并且在字长较短的计算机上还可能产生较大的误差.

利用乘法公式

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b),$$

可将上式改写为

$$\begin{aligned} AB^2 &= (6\,371\,000 + 4.9 + 6\,371\,000)(6\,371\,000 + 4.9 - 6\,371\,000) \\ &= 2 \times 6\,371\,000 \times 4.9 + 4.9^2, \end{aligned}$$

由于 $4.9 \ll 6\,371\,000$,因此 4.9^2 这一项与 $2\times 6\,371\,000\times 4.9$ 这一项相比可以忽略不计,于是可以把计算简化为

$$AB^2 \approx 2 \times 6\,371\,000 \times 4.9,$$

由此算出

$$AB \approx 7.9\text{km}.$$

这就是说,卫星的速度至少要达到 7.9km/s 才能维持其围绕地球的飞行,此即所要求的第一宇宙速度.

上面所计算的 AB^2,实际上就是函数 $y = x^2$ 在 $x = 6\,371\,000$ 处,自变量出现了一个微小的改变量 4.9 之后,函数值的相应改变量. 然而在计算过程中,我们并没有完全精确地去算

$$AB^2 = 2 \times 6\,371\,000 \times 4.9 + 4.9^2,$$

而是抛弃了最后那一项对整个计算结果而言可以忽略的量,得到了具有足够精度的计算值. 这样的思想方法和处理过程,恰恰就是微分概念的应用.

微分的定义

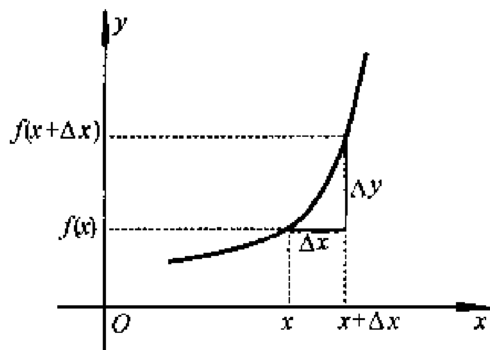


图 4.1.2

下面我们来考察一般情况. 设 $y = f(x)$ 是一个给定的函数,在点 x 附近

有定义.若 $f(x)$ 的自变量在 x 处产生了某个增量 Δx,变成了 $x+\Delta x$(增量 Δx 可正可负,但不为零),那么它的函数值也相应地产生了一个增量

$$\Delta y(x) = f(x+\Delta x) - f(x),$$

这里的增量 Δx 和 $\Delta y(x)$ 分别称为自变量和因变量的**差分**(在不会发生混淆的场合,或者是无需特别指明自变量的时候,我们一般就将 $\Delta y(x)$ 简单地记为 Δy).

定义 4.1.1 对函数 $y=f(x)$ 定义域中的一点 x,若存在一个只与 x 有关、而与 Δx 无关的数 $g(x)$,使得当 $\Delta x\to 0$ 时恒成立关系式

$$\Delta y = g(x)\Delta x + o(\Delta x),$$

则称 $f(x)$ 在 x 处的微分存在,或称 $f(x)$ 在 x 处**可微**.

由定义 4.1.1 知道,若 $f(x)$ 在 x 处是可微的,那么当 $\Delta x\to 0$ 时 Δy 也是无穷小量,且当 $g(x)\neq 0$ 时,成立等价关系

$$\Delta y \sim g(x)\Delta x.$$

"$g(x)\Delta x$"这一项也被称为 Δy 的**线性主要部分**.很明显,当 $|\Delta x|$ 充分小的时候,干脆就用"$g(x)\Delta x$"这一项来代替因变量的增量 Δy,所产生的偏差将是微乎其微的.

于是,当 $f(x)$ 在 x 处可微且 $\Delta x\to 0$ 时,我们将 Δx 称为**自变量的微分**(它总是存在的),记作 $\mathrm{d}x$,而将 Δy 的线性主要部分 $g(x)\mathrm{d}x$(即 $g(x)\Delta x$)称为**因变量的微分**,记作 $\mathrm{d}y$,这样就有了以下的微分关系式

$$\mathrm{d}y = g(x)\mathrm{d}x.$$

例 4.1.1 设 $y=f(x)=x^2$,则对于任意一点 $x\in(-\infty,\infty)$ 所产生的增量 Δx,有

$$\begin{aligned}\Delta y &= (x+\Delta x)^2 - x^2\\ &= 2x\Delta x + \Delta x^2,\end{aligned}$$

由定义,函数 $y=x^2$ 在 x 处是可微的,它的微分为

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}(x^2) = 2x\mathrm{d}x,$$

这正是我们前面用来求出第一宇宙速度所用的近似式.

这里提醒注意以下几点:

(1)微分 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y$ 应理解为是差分 $\Delta x,\Delta y$ 趋于 0 时的情况,因而是一个动态的概念,而差分只是一个静态的概念.

(2)"可微"是逐点定义的,所以它是一个局部的性质,这与"连续"是局部性质是类似的.对于某些函数,确实存在着一些不可微的点.

例 4.1.2 对函数 $y=f(x)=\sqrt[3]{x^2}$,在 $x=0$ 处,有

$$\Delta y = f(\Delta x) - f(0)$$

$$= \sqrt[3]{\Delta x^2},$$

当 $\Delta x \to 0$ 时,$\sqrt[3]{\Delta x^2}$趋向于 0 的阶比 Δx 的阶还要低,因而 Δy 决不可能表示成 Δx 的线性项与高阶项的和.由定义,它在 $x=0$ 处是不可微的.

若对任意点 $x \in (a,b)$,$f(x)$都是可微的,则称 $f(x)$在开区间(a,b)上可微.如例 4.1.1 中的函数 $y=x^2$ 在$(-\infty,\infty)$可微,而例 4.1.2 中的函数 $\sqrt[3]{x^2}$虽然不是$(-\infty,\infty)$上的可微函数,但它在$(-\infty,0)$和$(0,\infty)$上却都是可微的(留作习题).

(3)若 $f(x)$在 x 处是可微的,那么当$\Delta x \to 0$时定有 $\Delta y \to 0$,于是 $f(x)$在 x 处是连续的,即**可微必定连续**.

但要注意其逆不真,例 4.1.2 中的 $y=\sqrt[3]{x^2}$在 $x=0$ 处显然连续,但我们已经知道它在这一点处不可微.

(4)当 $f(x)$可微时,它的微分值 $\mathrm{d}y$ 和差分值 Δy 只相差 Δx(即 $\mathrm{d}x$)的一个高阶无穷小量.尽管这个高阶无穷小量对于求 Δy 来说,所作的贡献实在是太微不足道了,但真要精确地把它算出来,却往往是十分复杂的,工作量也非常之大.因此,若能够有一个较为简便的导出 $g(x)$的法则,那么当$|\Delta x|$充分小的时候,用微分 $\mathrm{d}y=g(x)\mathrm{d}x$ 来代替差分就不失为一个有效的近似计算方法——事实上,很多实际问题也正是这么算的.

下面我们就来研究 $g(x)$.

微分和导数

若 $f(x)$在 x 处可微,则由关系式

$$\Delta y = g(x)\Delta x + o(\Delta x)$$

以及 $g(x)$与 Δx 无关,即知 $g(x)$是当 $\Delta x \to 0$ 时,因变量的差分与自变量的差分之比$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$(称为差商)的极限值.

定义 4.1.2 *若函数 $y=f(x)$在其定义域中的一点 x 处极限*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

*存在,则称 $f(x)$在 x 处是**可导的**,这个极限值称为 $f(x)$在 x 处的**导数**,记为 $f'(x)$或$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.*

从定义 4.1.2 看出,导数与微分类似,也是逐点定义的,所以"可导"亦是一个局部的性质.但若将一个函数 $f(x)$的定义域中的所有可导的点看成一个集合,则这个集合中的每一点与其相应的导数值 $f'(x)$建立了一种对应关系即函数关系,因此我们将 $f'(x)$称为 $f(x)$的**导函数**,一般就简称为导数.

由上面的讨论可以知道,若 $f(x)$在 x 处可微,则它必定在 x 处可导,而

前面所述的函数 $g(x)$ 不是别的，正是它在这一点的导数 $f'(x)$. 于是，差分的关系式和微分关系式分别成为

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$$

和

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x.$$

因此，导数也可以看成是函数在可微的情况下，因变量的微分与自变量的微分之比，所以导数又被称为"微商". 这样，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 既可以看成是一个完整的记号，也可以看成是微分之间的一种除法运算——这种观点有助于更深刻地理解微分和导数的本质及其相互关系，也有利于实际的应用.

反过来，$f(x)$ 在 x 处可导也足以保证它在 x 处可微. 由定义 4.1.2，这时存在极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x),$$

即

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)\right] = 0.$$

由无穷小量的定义，有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = o(1),$$

也就是

$$\Delta y - f'(x)\Delta x = o(1)\Delta x = o(\Delta x),$$

由定义 4.1.1，$f(x)$ 在 x 处是可微的.

上述结果可以表述为以下定理：

定理 4.1.1 *函数 $y = f(x)$ 在 x 处可微的充分必要条件是它在 x 处可导.*

定理4.1.1 告诉我们，对一元函数来说，任一点的可微性与可导性实际上是一回事，因而，微分与导数总是形影相随，是密切难分的"孪生兄弟".

习 题

1. 半径为 1cm 的铁球表面要镀一层厚度为 0.01cm 的铜，试用求微分的方法算出，每只球需要用铜多少克？（铜的密度为 $8.9\mathrm{g/cm^3}$.）

2. 用定义证明，函数 $y = \sqrt[3]{x^2}$ 在它的整个定义域中，除了 $x = 0$ 这一点之外都是可微的.

§2 导数的意义和性质

产生导数的实际背景

从数学的发展历史来看,导数是伴随着微分的诞生而顺理成章地产生的,也就是说,人们先是有了微分的概念,随后才发现,对于处理微分问题来说,像

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

这么一种特定形式的极限,即导数,是一个有力的工具.

说导数是处理微分问题的有力工具,是因为一方面,从微分形式

$$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$$

来看,任一点处的微分事实上都必须通过这一点的导数来表达和计算;另一方面,在比较复杂的情况下(比如以后会学到的高阶的微分和导数以及多元函数的微分和导数等),无论是形式地思考还是实际地处理问题,由导数人手都要比由微分入手更容易和简洁一些.以后,人们进一步认识到,导数有它本身的意义,在数学研究及其实际应用方面都扮演着重要的角色.

微积分的发明人之一 Newton 最早用导数研究的,是如何确定力学中运动质点的瞬时速度问题.

设一个运动质点在 t 时刻的位移可以用函数 $s=s(t)$ 来描述,那么如何来求出它在这一时刻的速度呢?

因为它在 $[t,t+\Delta t]$ 中走过的位移为 $\Delta s=s(t+\Delta t)-s(t)$,所以当 Δt 很小的时候,它在 t 时刻的瞬时速度可以近似地用它在 $[t,t+\Delta t]$ 中的平均速度

$$\bar{v}(t)=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$$

来代替.但是,对于任意给定的 $\Delta t>0$,这么算出的都只是平均速度而不是瞬时速度,真正的瞬时速度显然是当 $\Delta t\to 0$ 时 $\bar{v}(t)$ 的极限值,即

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}.$$

由于在任一给定时刻,运动的速度总是一个有限的定值,因此上述极限必定存在,于是

$$v(t)=s'(t)$$

也即运动质点的速度是它的位移函数的导数.

我们可以将"速度"这个概念加以推广——凡是牵涉到某个量的变化快慢的,诸如物理学中的光、热、磁电的各种传导率、化学中的反应速率乃至经济学中的资金流动比率、人口学中的人口增长速率等等,统统都可以看成是广义的"速度",因而都可以用导数来表达.换句话说,导数实际上是因变量关于自变

量的变化率.

比如,设函数 $p=p(t)$表示某个地区在 t 时刻的人口数目,那么在 $t+\Delta t$ 时刻的人口数目就是 $p(t+\Delta t)$ 了,因此这个地区在从 t 到 $t+\Delta t$ 的时段中,增加的人口数应为

$$\Delta p = p(t+\Delta t) - p(t).$$

将单位时间中的人口增长数称为人口的增长速率,于是在$[t, t+\Delta t]$时段中,该地区的人口平均增长速率为

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p(t+\Delta t)-p(t)}{\Delta t},$$

当 $\Delta t \to 0$ 时,便求得了该地区在 t 时刻的人口增长速率为

$$p'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta p}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p(t+\Delta t)-p(t)}{\Delta t},$$

即人口增长速率是人口数量函数的导数.

导数的几何意义

导数研究的另一重大动力来自于数学本身——如何求出一条给定曲线在任意点处的切线?

这个问题的起源可以追溯到古希腊时代对圆锥曲线的切线的研究.到了 17 世纪前叶,在法国数学家 Descartes 和 Fermat 分别独立完成了解析几何的发明之后,它便转化成了如何确定给定的曲线方程 $y=f(x)$在任意点处的切线斜率的问题. Descartes 和 Fermat 本人以及英国的数学和物理学家 Barrow (Newton 的老师)都对这一问题进行过深入的研究并取得一定成果,而最终对此找到了一套系统可行且有效的一般分析方法的,是微积分的另一位发明人、德国数学家 Leibniz.

我们首先来定义什么是切线.

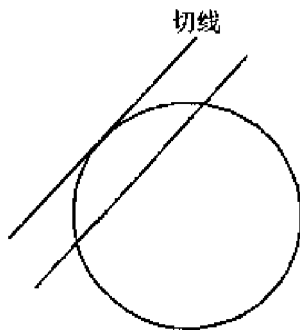


图 4.2.1

在中学的解析几何里,我们学过圆和椭圆的切线(图 4.2.1).那时的定义

是,"若一条直线与圆(椭圆)只相交于一点,那么称这条直线为该圆(椭圆)的切线".但是要将这个定义运用到一般的曲线上去是不行的,例如,对任意常数 a,直线 $x=a$ 与抛物线 $y=x^2$ 只有一个交点(图 4.2.2),但它显然不是切线.

设 $y=f(x)$ 是平面上的一条光滑的连续曲线,$(x,f(x))$ 是曲线上的一个定点,而 $(x+\Delta x,f(x+\Delta x))$ 是曲线上的一个动点(一般假定它就在 $(x,f(x))$ 的附近).显然,过 $(x,f(x))$ 和 $(x+\Delta x,f(x+\Delta x))$ 两点可以唯一确定曲线的一条过 $(x,f(x))$ 的割线,并且,当点 $(x+\Delta x,f(x+\Delta x))$ 在曲线上变动时将引起割线位置的不断变化.曲线的切线的严格定义应该是这样的:**如果在点 $(x+\Delta x,f(x+\Delta x))$ 沿着曲线无限趋近于点 $(x,f(x))$(即 $\Delta x\to 0$)时,这些变化的割线存在着唯一的极限位置,处于这个极限位置的直线就被称为 $f(x)$ 在 x 处的切线**(图 4.2.3).

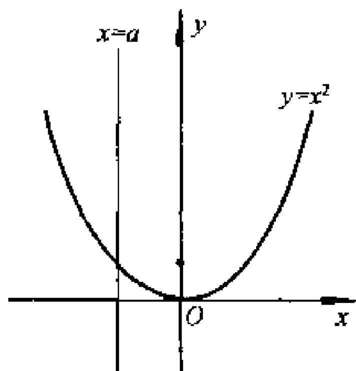


图 4.2.2

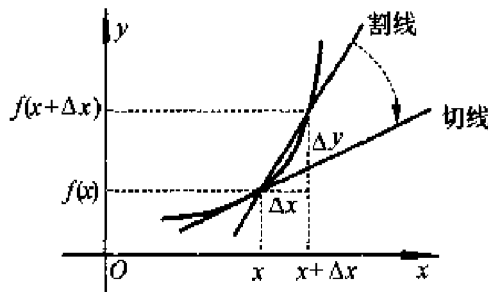


图 4.2.3

设过 $(x,f(x))$ 的切线已经作出,我们来求它的斜率.从图 4.2.3 中可以看出,割线的斜率为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

随着 Δx 越来越接近于 0,$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 也就越来越接近切线的斜率,但是,只要 Δx 是个不为 0 的常数,$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 就只是割线的斜率而非切线的斜率.因此,要获得切线的斜率,就必须在 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 中令 $\Delta x\to 0$,由此得到,过 $(x,f(x))$ 的切线斜率为极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

的值,也即 $f(x)$ 在 x 处的导数值 $f'(x)$——这就是导数的几何意义.

Leibniz 巨大贡献之一,就是发现了函数的切线斜率与它的导数之间的联系,同时得到了计算导数的一般法则.从这个意义上来说,对任意一个能够写

出表达式的函数，求其相应的曲线在任一点上（只要在该点上切线存在）的切线方程的问题已经迎刃而解了.

过点$(x,f(x))$且与$f(x)$在该处的切线垂直的直线称为$f(x)$在该处的**法线**. 由于法线的斜率与切线的斜率互为负倒数，因此，求法线方程的问题也一并解决了.

例 4.2.1 求抛物线 $y^2=2px(p>0)$上任一点(x_0,y_0)处的切线斜率.

解 设(x_0,y_0)属于上半平面（属于下半平面时是类似的），将方程改写成

$$y=f(x)=\sqrt{2px}\quad(x\geqslant 0),$$

则它在 $x=x_0$ 处的切线斜率应为

$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{2p(x_0+\Delta x)}-\sqrt{2px_0}}{\Delta x}\\&=\sqrt{2p}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0})\cdot\Delta x}\\&=\sqrt{2p}\,\frac{1}{2\sqrt{x_0}},\end{aligned}$$

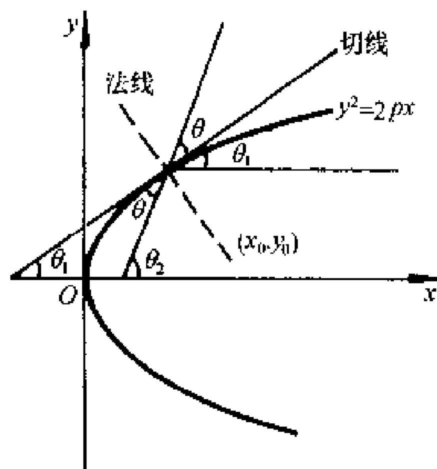


图 4.2.4

由此很容易求得它在任一点处的切线方程.

从这个结论出发可以得到抛物线的一个重要的光学性质.

记(x_0,y_0)处的切线与 x 轴的夹角为θ_1，由于(x_0,y_0) 在抛物线上，即满足

$$y_0=\sqrt{2px_0},$$

因此该切线的斜率可以写成

$$\tan\theta_1=\sqrt{2p}\,\frac{1}{2\sqrt{x_0}}=\frac{p}{\sqrt{2px_0}}=\frac{p}{y_0},$$

再记(x_0,y_0)与抛物线的焦点$(\frac{p}{2},0)$的连线与x轴的夹角为θ_2,则有

$$\tan\theta_2=\frac{y_0}{x_0-\frac{p}{2}},$$

设它与过该点的切线的夹角为θ,则有

$$\begin{aligned}\tan\theta&=\frac{\tan\theta_2-\tan\theta_1}{1+\tan\theta_2\cdot\tan\theta_1}\\&=\frac{\dfrac{y_0}{x_0-\frac{p}{2}}-\dfrac{p}{y_0}}{1+\dfrac{y_0}{x_0-\frac{p}{2}}\cdot\dfrac{p}{y_0}}\\&=\frac{p}{y_0}\cdot\frac{\dfrac{y_0^2}{p}-(x_0-\frac{p}{2})}{(x_0-\frac{p}{2})+p}\\&=\frac{p}{y_0}=\tan\theta_1,\end{aligned}$$

因此θ恰好等于切线与x轴的夹角.

根据光的反射定律,入射角(入射光线与反射面的法线的夹角)等于反射角(反射光线与反射面的法线的夹角).于是,任一束从抛物线的焦点处出发,入射角为$\frac{\pi}{2}-\theta$的光线,经抛物线上一点(x_0,y_0),以反射角$\frac{\pi}{2}-\theta=\frac{\pi}{2}-\theta_1$反射后,反射光线与$x$轴是同向的.也就是说,放在焦点处的点光源发出的光经抛物线(严格来讲应是抛物面)反射后成为一束平行光射出.由于光路是可逆的,因此反过来,若有一束与抛物线的对称轴平行的光线射入抛物线,则经过反射后它们将会聚于抛物线的焦点.探照灯、伞形太阳灶、抛物面天线等都是上述性质实际运用的例子.

例 4.2.2 求椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad(a>b>0)$上任一点$(x_0,y_0)$处的切线方程.

解 设(x_0,y_0)属于上半平面(属于下半平面时是类似的),将此区域中的椭圆方程改写成

$$y = f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \quad (-a < x < a),$$

则它在 $x - x_0$ 处的切线斜率应为

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\
&= \frac{b}{a} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{a^2 - (x_0 + \Delta x)^2} - \sqrt{a^2 - x_0^2}}{\Delta x} \\
&= \frac{b}{a} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^2 - (x_0 + \Delta x)^2}{(\sqrt{a^2 - (x_0 + \Delta x)^2} + \sqrt{a^2 - x_0^2}) \cdot \Delta x} \\
&= \frac{b}{a} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2x_0 \cdot \Delta x - (\Delta x)^2}{(\sqrt{a^2 - (x_0 + \Delta x)^2} + \sqrt{a^2 - x_0^2}) \cdot \Delta x} \\
&= \frac{b}{a} \frac{-x_0}{\sqrt{a^2 - x_0^2}}.
\end{aligned}$$

于是它在 $x = x_0$ 处的切线方程为

$$y - y_0 = \frac{b}{a} \frac{-x_0}{\sqrt{a^2 - x_0^2}}(x - x_0),$$

注意到(x_0, y_0)在椭圆上,即满足

$$y_0 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_0^2},$$

两边整理后便得到切线方程

$$\frac{x_0 \cdot x}{a^2} + \frac{y_0 \cdot y}{b^2} = 1,$$

这正是我们在平面解析几何中已知的结论.

用与例 4.2.1 类似的方法可以证明椭圆的一个光学性质:从椭圆的一个焦点发出的任一束光线,经椭圆反射后,反射光必定经过它的另一个焦点(图 4.2.5)(留作习题).

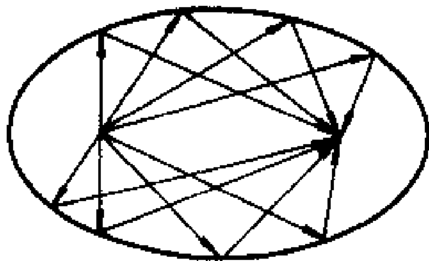


图 4.2.5

利用导数的几何意义以及导数和微分的关系很容易给出微分的几何意义：它是用底边为 $\mathrm{d}x$、斜率为 $f'(x)$ 的直角三角形的高 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$ 来近似代替由底边为 $\mathrm{d}x$ 和曲线 $f(x)$ 相应的一段所决定的曲边直角三角形的"高" Δy（图 4.2.6），其误差是 $\mathrm{d}x$ 的高阶无穷小量.

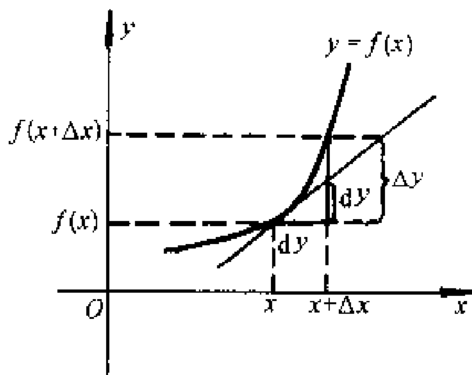


图 4.2.6

单侧导数

由于

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

由极限存在的定义，函数 $f(x)$ 在 x 处可导的充分必要条件是相应的左右极限

$$f'_-(x)=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

和

$$f'_+(x)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

存在并且相等，我们把它们分别称为 $f(x)$ 在 x 处的**左导数**和**右导数**. 换句话说，若 $f(x)$ 在 x 处的左右导数中至少有一个不存在，或是左右导数都存在但不相等的话，$f(x)$ 在 x 处就是不可导的.

例 4.2.3 考察函数 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处的可导情况.

解 当 $x<0$，$f(x)=|x|=-x$，所以 y 在 $x=0$ 处的左导数为

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1;$$

而当 $x>0$ 时，$f(x)=|x|=x$，所以 y 在 $x=0$ 处的右导数为

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

因此 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处的左右导数都存在但不相等，由定义，它在 $x=0$

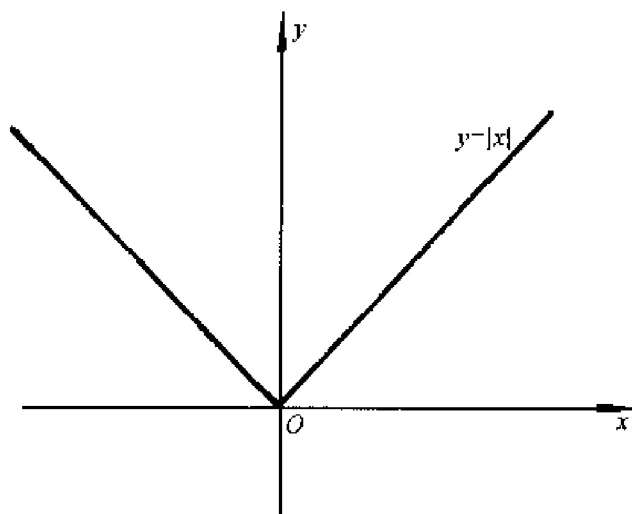


图 4.2.7

处不可导.

例 4.2.4 考察函数

$$y=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0, \\ 0, & x\leqslant 0 \end{cases}$$

在 $x=0$ 处的可导情况.

解 当 $\Delta x\leqslant 0$ 时, $f(\Delta x)=0$, 于是显然有

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=0,$$

而当 $\Delta x>0$ 时,

$$\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{\Delta x\cdot\sin\dfrac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=\sin\frac{1}{\Delta x},$$

当 $\Delta x\to 0+$ 时, 上式的极限不存在, 即函数在 $x=0$ 处的右导数不存在, 由定义, 它在这一点不可导.

需要指出的是, 尽管单侧极限发散到无穷大也是极限不存在的一种形式, 如例 4.2.2 中, 当 $x=\pm a$ 时, 相应的左右导数值分别趋于 $\mp\infty$, 但它不同于例 4.2.4 情况. 事实上, 前者在 $x=\pm a$ 处的切线是存在的, 只是切线的倾角是 $\frac{\pi}{2}$ 而已; 而后者在 $x=0$ 处的右侧根本就没有切线存在. 因此, 在讨论问题时应注意区分这两种不同的情况.

习 题

1. 证明：

(1)一个变力在$[0,t]$时间中做的功为 $W(t)(0<t\leqslant T)$，设 $W(t)$可导，记相应的功率(单位时间内做的功)为 $N(t)$，则 $N(t)=W'(t)$.

(2)一个物体在$[0,t]$时间中转过的角度为 $\theta(t)(0<t\leqslant T)$，设 $\theta(t)$可导，记相应的角速度(单位时间内转过的角度)为 $\omega(t)$，则 $\omega(t)=\theta'(t)$.

2. 设 $f'(x_0)$存在，求下列各式的值：

(1)$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$;

(2)$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$;

(3)$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$.

3. (1)用定义求抛物线 $y=2x^2+3x-1$ 的导函数；

(2)求该抛物线上过点$(-1,-2)$处的切线方程；

(3)求该抛物线上过点$(-2,1)$处的法线方程；

(4)问该抛物线上是否有点(a,b)，过该点的切线与抛物线顶点与焦点的连线平行？

4. 证明：从椭圆的一个焦点发出的任一束光线，经椭圆反射后，反射光必定经过它的另一个焦点(图 4.2.5).

5. 证明：双曲线 $xy=a^2$ 上任一点处的切线与两坐标轴构成的直角三角形的面积恒为 $2a^2$.

6. 求函数在不可导点处的左导数和右导数.

(1)$y=|\sin x|$; (2)$y=\sqrt{1-\cos x}$;

(3)$y=\mathrm{e}^{-|x|}$; (4)$y=|\ln(x+1)|$.

7. 讨论下列函数在 $x=0$ 处是否可导：

(1)$y=\begin{cases}x^{1+a}\sin\dfrac{1}{x},(a>0) & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$ (2)$y=\begin{cases}x^2, & x>0,\\ ax+b, & x\leqslant b;\end{cases}$

(3)$y=\begin{cases}x\mathrm{e}^x, & x>0,\\ ax^2, & x\leqslant 0;\end{cases}$ (4)$y=\begin{cases}\mathrm{e}^{\frac{a}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

8. 设所给的函数可导，证明：

(1)奇函数的导函数是偶函数；偶函数的导函数是奇函数；

(2)周期函数的导函数仍是周期函数.

9. 设 $f(x)$在 $x=0$ 处可导,在什么情况下 $|f(x)|$在 $x=0$ 处也可导?

10. 设 $f(x)$在有限区间(a,b)内可导,

(1)若 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$,那么能否断定也有 $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)=\infty$?

(2)若 $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)=\infty$,那么能否断定也有 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$?

§3 导数四则运算和反函数求导法则

从定义出发求导函数

计算一个函数的导函数的运算称为对这个函数求导.

一些简单函数可以直接通过导数的定义(即差商的极限形式)来求导,当然也可以直接使用微分的定义(即差分的等价无穷小量关系)来求导,下面我们来分别看几个例子.

显然,常数函数 $y=C$ 的导数恒等于零.

例 4.3.1 求 $y=\sin x$ 的导函数.

解 因为

$$\sin(x+\Delta x)-\sin x = 2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2},$$

当 $\Delta x\to 0$ 时,由 $\cos x$ 的连续性,

$$\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x+o(1),$$

而由 $x\to 0$ 时的等价关系

$$\sin x\sim x,$$

可知此时有

$$\sin\frac{\Delta x}{2}\sim\frac{\Delta x}{2}.$$

所以

$$\sin(x+\Delta x)-\sin x=\cos x\cdot\Delta x+o(\Delta x),$$

由定义,即得

$$(\sin x)'=\cos x.$$

同理可得

$$(\cos x)'=-\sin x.$$

例 4.3.2 求 $y=\ln x$ 的导函数.

解 当 $\Delta x\to 0$ 时,因为

$$\begin{aligned}&\ln(x+\Delta x)-\ln x\\&=\ln\frac{x+\Delta x}{x}\end{aligned}$$

$$=\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\sim\frac{1}{x}\Delta x,$$

最后一个式子利用了 $x\to 0$ 时的等价关系

$$\ln(1+x)\sim x.$$

所以,由定义,即有

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}.$$

以上两个例子都是直接从微分的定义出发的,下一个例子我们改从导数的定义出发来做.

例 4.3.3 求 $y=e^x$ 的导函数.

解 因为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x}=e^x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x},$$

利用当 $\Delta x\to 0$ 时的等价关系式

$$e^{\Delta x}-1\sim\Delta x,$$

便有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x}=e^x,$$

即

$$(e^x)'=e^x.$$

事实上,利用 $\Delta x\to 0$ 时的等价关系

$$a^{\Delta x}-1\sim\Delta x\cdot\ln a\quad(a>0,a\neq 1),$$

容易导出

$$(a^x)'=(\ln a)a^x.$$

也就是讲,当将 a 取为 e 的时候,$y=e^x$ 的导函数恰为它的本身——这就是高等数学中要把指数函数和对数函数的底取成 e 的缘故.以后我们会知道,若一个函数的导函数等于它本身,那么这个函数与 $y=e^x$ 至多相差一个常数因子,即它必为

$$y=Ce^x$$

的形式.

例 4.3.4 求幂函数 $y=x^a(a\neq 0)$的导函数.

解 对任意常数 a,当 $x\to 0$ 时都成立等价关系

$$(1+x)^a-1\sim ax.$$

当 $x>0,\Delta x\to 0$ 时,有

$$\frac{(x+\Delta x)^a-x^a}{\Delta x}$$

$$= \frac{x^a\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^a - 1\right]}{x \cdot \frac{\Delta x}{x}}$$

$$= x^{a-1}\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^a - 1}{\frac{\Delta x}{x}}$$

$$\to a x^{a-1},$$

于是得到

$$(x^a)' = a x^{a-1}.$$

读者可自行讨论幂函数 $y=x^a$ 在 $x=0$ 和 $x<0$ 时的导数存在情况(假定 $x\leqslant 0$ 在 $y=x^a$ 的定义域中,见习题 2).

除了少数几个最简单的函数之外,可以直接用定义方便地求出导数的函数实在是微乎其微,因而就有必要对林林总总的函数全体导出一系列的求导运算法则,主要包括四则运算法则、反函数求导法则和复合函数求导法则.本节中我们先讨论前两个问题.

求导的四则运算法则

定理 4.3.1 设 $f(x)$和 $g(x)$都是可导的,则对任意常数 c_1 和 c_2,它们的线性组合 $c_1f(x)+c_2g(x)$也可导,且满足如下的线性运算关系

$$[c_1f(x)+c_2g(x)]' = c_1f'(x)+c_2g'(x).$$

证 对任意给定的 x,由于 $f(x)$和 $g(x)$可导,则有

$$f(x+\Delta x)-f(x) = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$$

和

$$g(x+\Delta x)-g(x) = g'(x)\Delta x + o(\Delta x),$$

两式分别乘上 c_1 和 c_2 后相加,整理后便有

$$[c_1f(x+\Delta x)+c_2g(x+\Delta x)]-[c_1f(x)+c_2g(x)]$$
$$=[c_1f'(x)+c_2g'(x)]\Delta x + o(\Delta x),$$

由微分的定义,$c_1f(x)+c_2g(x)$可微且

$$\mathrm{d}[c_1f(x)+c_2g(x)] = [c_1f'(x)+c_2g'(x)]\mathrm{d}x$$

或者等价地

$$[c_1f(x)+c_2g(x)]' = c_1f'(x)+c_2g'(x).$$

证毕

由于 $f'(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}[f(x)]$和 $g'(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}[g(x)]$,因此这个结论也可以用微分的形式表达为

$$\mathrm{d}[c_1f(x)+c_2g(x)] = c_1\mathrm{d}[f(x)]+c_2\mathrm{d}[g(x)].$$

例 4.3.5 求 $y=\log_a x+3\sqrt{x}$的导函数($a>0, a\neq 1$).

解 因为 $\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}$,由定理4.3.1和前面得到的对数函数和幂函数的导数公式,即有

$$
\begin{aligned}
&(\log_a x+3\sqrt{x})' \\
=&\frac{1}{\ln a}(\ln x)'+3(\sqrt{x})' \\
=&\frac{1}{x\ln a}+\frac{3}{2\sqrt{x}}.
\end{aligned}
$$

定理 4.3.2 设 $f(x)$和 $g(x)$都是可导的,则它们的积函数也可导,且满足

$$[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x),$$

或者用微分的形式表达为

$$\mathrm{d}[f(x)g(x)]=g(x)\mathrm{d}[f(x)]+f(x)\mathrm{d}[g(x)].$$

证 记 $y=f(x)g(x)$,则对任意给定的 x,有

$$
\begin{aligned}
[f(x)g(x)]' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x+\Delta x)g(x)}{\Delta x}+\right. \\
&\qquad \left.\frac{f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x)}{\Delta x}\right] \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}f(x+\Delta x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}+ \\
&\qquad g(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.
\end{aligned}
$$

由于 $f(x)$和 $g(x)$可导,当 $\Delta x\to 0$ 时有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x),\qquad \lim_{\Delta x\to 0}f(x+\Delta x)=f(x)$$

和

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=g'(x),$$

代入后即有定理结论.

证毕

例 4.3.6 求 $y=3^x\cos x$ 的导函数.

解 由定理4.3.2,

$$\begin{aligned}&(3^x\cos x)'\\&=(3^x)'\cos x+3^x(\cos x)'\\&=\ln 3\cdot(3^x)\cdot\cos x-3^x\sin x\\&=3^x(\ln 3\cdot\cos x-\sin x).\end{aligned}$$

例 4.3.7　求 $y=\dfrac{\sin x}{x}$的导函数.

解　由定理 4.3.2 和例 4.3.4,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sin x}{x}\right)'&=(\sin x)'\frac{1}{x}+\sin x\left(\frac{1}{x}\right)'\\&=\frac{1}{x}\cos x-\frac{1}{x^2}\sin x\\&=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}.\end{aligned}$$

定理 4.3.3　设 $g(x)$可导,且 $g(x)\neq 0$,则它的倒数也可导,且满足

$$\left[\frac{1}{g(x)}\right]'=-\frac{g'(x)}{[g(x)]^2},$$

相应的微分表达形式为

$$\mathrm{d}\left[\frac{1}{g(x)}\right]=-\frac{1}{[g(x)]^2}\mathrm{d}[g(x)].$$

证　记 $y=\dfrac{1}{g(x)}$,则对任意给定的 x,有

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{g(x)}\right]'&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{1}{g(x+\Delta x)}-\dfrac{1}{g(x)}}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x)-g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)\cdot g(x)\cdot\Delta x}\\&=\frac{-1}{g(x)}\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right)\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{g(x+\Delta x)}\right).\end{aligned}$$

由于 $g(x)$可导,因此当 $\Delta x\to 0$ 时有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=g'(x),\qquad \lim_{\Delta x\to 0}g(x+\Delta x)=g(x),$$

代入后即知定理结论成立.

证毕

例 4.3.8　求 $y=\sec x$ 的导函数.

解　因为 $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$,于是

$$
\begin{aligned}
(\sec x)' &= \left(\frac{1}{\cos x}\right)' \\
&= \frac{-(\cos x)'}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\sin x}{\cos^2 x} \\
&= \tan x \sec x.
\end{aligned}
$$

同理可得

$$(\csc x)' = -\cot x \csc x.$$

结合定理4.3.2和定理4.3.3,即有如下推论:

推论 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是可导的且 $g(x) \neq 0$,则它们的商函数也可导,且满足

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2},$$

这一结论的微分形式为

$$\mathrm{d}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\mathrm{d}[f(x)] - f(x)\mathrm{d}[g(x)]}{[g(x)]^2}.$$

例4.3.9 求 $y = \tan x$ 的导函数.

解 因为 $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$,由上述结论

$$
\begin{aligned}
(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' \\
&= \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \sec^2 x.
\end{aligned}
$$

同理可得

$$(\cot x)' = -\csc^2 x.$$

反函数求导法则

定理4.3.4(反函数求导定理) 若函数 $y = f(x)$ 在 (a,b) 上连续、严格单调、可导并且 $f'(x) \neq 0$,记 $\alpha = \min(f(a+), f(b-))$,$\beta = \max(f(a+), f(b-))$,则它的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 在 (α,β) 上可导且有

$$[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{f'(x)}.$$

证 因为函数 $y = f(x)$ 在 (a,b) 上连续且严格单调,由反函数连续定理,它的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 在 (α,β) 上存在且连续.

对任意定点 $x\in(a,b)$，由于 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上可微，且 $f'(x)\neq 0$，因而

$$\Delta y \sim f'(x)\Delta x.$$

因此可将上式改写为

$$\Delta x \sim \frac{1}{f'(x)}\Delta y,$$

由定义，这就意味着 $x=f^{-1}(y)$ 在 y 处可导且它的导数

$$[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{f'(x)}.$$

证毕

例 4.3.10 求 $y=\arctan x$ 和 $y=\arcsin x$ 的导函数.

解 容易验证 $x=\tan y$ 满足定理 4.3.4 的所有条件，将 $y=\arctan x$ 看成它的反函数，于是有

$$(\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

类似地，将 $y=\arcsin x$ 看成 $x=\sin y$ 的反函数，便可得到

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

读者不难由同样途径得到

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

和

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

例 4.3.11 求双曲函数及反双曲函数的导函数.

解 由于

$$(e^{-x})' = \left(\frac{1}{e^x}\right)' = \frac{-(e^x)'}{(e^x)^2} = -\frac{e^x}{e^{2x}} = -e^{-x},$$

于是

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x.$$

同理可得

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x.$$

由于 $\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ 和 $\operatorname{cth} x = (\operatorname{th} x)^{-1} = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$，利用定理 4.3.3 的推论，可以求得

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{sech}^2 x$$

和

$$(\operatorname{cth} x)' = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} = \operatorname{csch}^2 x.$$

反双曲函数的导函数可按反三角函数类似导出,如

$$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{(\operatorname{sh} y)'} = \frac{1}{\operatorname{ch} y} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

这里利用了双曲函数的关系 $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.

作为习题,请读者自行导出其它反双曲函数的导函数

$$(\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

和

$$(\operatorname{arth} x)' = (\operatorname{arcoth} x)' = \frac{1}{1-x^2}.$$

将双曲函数(及其反函数)的导数与三角函数(及其反函数)的相应结果加以比较的话,就可以发现,不仅双曲函数本身间的关系与三角函数有类似之处,而且它们(乃至它们的反函数)的导函数也有颇为相像的相互关系.

下面我们列出基本初等函数的导数和微分公式:

$$(C)' = 0 \qquad \mathrm{d}(C) = 0 \cdot \mathrm{d}x = 0$$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \qquad \mathrm{d}(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}\mathrm{d}x$$

$$(\sin x)' = \cos x \qquad \mathrm{d}(\sin x) = \cos x\,\mathrm{d}x$$

$$(\cos x)' = -\sin x \qquad \mathrm{d}(\cos x) = -\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x \qquad \mathrm{d}(\tan x) = \sec^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x \qquad \mathrm{d}(\cot x) = -\csc^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$(\sec x)' = \tan x \sec x \qquad \mathrm{d}(\sec x) = \tan x \sec x\,\mathrm{d}x$$

$$(\csc x)' = -\cot x \csc x \qquad \mathrm{d}(\csc x) = -\cot x \csc x\,\mathrm{d}x$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \mathrm{d}(\arccos x) = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \mathrm{d}(\arccos x) = \frac{-\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad \mathrm{d}(\arctan x) = \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \qquad \mathrm{d}(\operatorname{arccot} x) = \frac{-\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

$$(a^x)' = \ln a \cdot a^x \qquad \mathrm{d}(a^x) = \ln a \cdot a^x\mathrm{d}x$$

特别地 $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$　　　特别地 $\mathrm{d}(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

$(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$ $\qquad$ $d(\log_a x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{dx}{x}$

特别地$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $\qquad$ 特别地 $d(\ln x) = \frac{dx}{x}$

$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$ $\qquad$ $d(\operatorname{sh} x) = \operatorname{ch} x dx$

$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$ $\qquad$ $d(\operatorname{ch} x) = \operatorname{sh} x dx$

$(\operatorname{th} x)' = \operatorname{sech}^2 x$ $\qquad$ $d(\operatorname{th} x) = \operatorname{sech}^2 x dx$

$(\operatorname{cth} x)' = \operatorname{csch}^2 x$ $\qquad$ $d(\operatorname{cth} x) = \operatorname{csch}^2 x dx$

$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $\qquad$ $d(\operatorname{arsh} x) = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

$(\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ $\qquad$ $d(\operatorname{arch} x) = \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

$(\operatorname{arth} x)' = (\operatorname{arcoth} x)' = \frac{1}{1-x^2}$ $\qquad$ $d(\operatorname{arth} x) = d(\operatorname{arcoth} x) = \frac{dx}{1-x^2}$

从表中可以看出,所有基本初等函数的导函数都仍然是基本初等函数的有限次四则运算和复合,所以,在这些函数的定义域内,至多除去有限个点,它们不仅可导而且导函数连续.(这有限个点属于这些函数本身的定义域而不属于它们的导函数的定义域,如 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 在整个$(-\infty,+\infty)$上连续,但其导函数

$$y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

在 $x=0$ 处无定义,所以,它的导数存在并连续的范围仅限于$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.)

定理 4.3.1 和定理 4.3.2 的结论可以推广到多个函数的情况:

(1)**多个函数线性组合的导函数:**

$$\left[\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x)\right]' = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i'(x).$$

(2)**多个函数乘积的导函数:**

$$\left[\prod_{i=1}^{n} f_i(x)\right]' = \sum_{j=1}^{n} \left\{ f_j'(x) \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} f_i(x) \right\}.$$

请读者利用数学归纳法自行证明这两个公式,下面我们分别举一个例子.

例 4.3.12 求 n 次多项式 $y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 的导函数.

解 利用逐项求导,便有

$$\begin{aligned} y' &= (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0)' \\ &= (a_n x^n)' + (a_{n-1}x^{n-1})' + \cdots + (a_1 x)' + (a_0)' \end{aligned}$$

$$= a_n n x^{n-1} + a_{n-1}(n-1)x^{n-2} + \cdots + a_1,$$

也就是说,n 次多项式的导函数是 $n-1$ 次多项式.

例 4.3.13 求函数 $y=[e^x(x^2+3x-1)\arcsin x]$的导函数.

解 由多个函数乘积的导数公式

$$\begin{aligned}
&[e^x(x^2+3x-1)\arcsin x]' \\
&=(e^x)'(x^2+3x-1)\arcsin x + e^x(x^2+3x-1)'\arcsin x \\
&\quad + e^x(x^2+3x-1)(\arcsin x)' \\
&=e^x(x^2+3x-1)\arcsin x + e^x(2x+3)\arcsin x + e^x\frac{x^2+3x-1}{\sqrt{1-x^2}} \\
&=e^x\left[(x^2+5x+2)\arcsin x + \frac{x^2+3x-1}{\sqrt{1-x^2}}\right].
\end{aligned}$$

习 题

1. 用定义证明$(\cos x)' = -\sin x$.

2. 讨论 $y=x^a$ 在$x=0$ 和 $x<0$ 时的导数存在情况(假定 $x\leqslant 0$ 在 $y=x^a$ 的定义域中).

3. 证明:

(1)$(\csc x)' = -\cot x\csc x$;　(2)$(\cot x)' = -\csc^2 x$

(3)$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;　(4)$(\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;

(5)$(\operatorname{arch} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$;　(6)$(\operatorname{arth} x)' = (\operatorname{arcoth} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$.

4. 求下列函数的导函数:

(1)$f(x)=3\sin x+\ln x-\sqrt{x}$;　(2)$f(x)=x\cos x+x^2+3$;

(3)$f(x)=(x^2-7x-5)\sin x$;　(4)$f(x)=x^2(3\tan x+2\sec x)$;

(5)$f(x)=e^x\sin x-4\cos x+\dfrac{3}{\sqrt{x}}$;　(6)$f(x)=\dfrac{2\sin x+x-2^x}{\sqrt{x}+1}$;

(7)$f(x)=\dfrac{1}{x+\cos x}$;　(8)$f(x)=\dfrac{x\sin x-2\ln x}{\sqrt{x}+1}$;

(9)$f(x)=\dfrac{x^3+\cot x}{\ln x}$;　(10)$f(x)=\dfrac{x\sin x+\cos x}{x\sin x-\cos x}$;

(11)$f(x)=(e^x+\log_3 x)\arcsin x$;　(12)$f(x)=(\csc x-3\ln x)x^2\operatorname{sh} x$;

(13)$f(x)=\dfrac{x+\sec x}{x-\csc x}$;　(14)$f(x)=\dfrac{x\operatorname{arsh} x-\operatorname{arch} x}{\operatorname{arccot} x}$;

(15) $f(x)=\dfrac{x+\sin x}{\arctan x}$;　　　(16) $f(x)=\dfrac{\arccos x(x^2-\operatorname{ch} x)}{\operatorname{arth} x}$.

5. 求曲线 $y=\ln x$ 在$(e,1)$处的切线方程和法线方程.

6. 当 a 取何值时,直线 $y=x$ 能与曲线 $y=\log_a x$ 相切,切点在哪里?

7. 求曲线 $y=x^n(n\in\mathbf{N}^+)$上过点$(1,1)$的切线与轴的交点的横坐标 x_n,并求出极限$\lim\limits_{n\to\infty}y(x_n)$.

8. 对于抛物线 $y=ax^2+bx+c$,设集合

$S_1=\{(x,y)\mid$过(x,y)可以作该抛物线的两条切线$\}$;

$S_2=\{(x,y)\mid$过(x,y)只可以作该抛物线的一条切线$\}$;

$S_3=\{(x,y)\mid$过(x,y)不能作该抛物线的切线$\}$,

分别求出这三个集合中的元素所满足的条件.

9. (1) 设 $f(x)$在 $x=x_0$ 处可导,$g(x)$在 $x=x_0$ 处不可导,证明 $c_1f(x)+c_2g(x)$在 $x=x_0$ 处也不可导($c_2\neq 0$).

(2) 设 $f(x)$与 $g(x)$在 $x=x_0$ 处都不可导,能否断定 $c_1f(x)+c_2g(x)$在 $x=x_0$处一定可导或一定不可导?

10. 在上题的条件下,讨论 $f(x)g(x)$在 $x=x_0$ 处的可导情况.

§4 复合函数求导法则及其应用

复合函数求导法则

对于复合函数的求导,我们有如下的结论.

定理 4.4.1(复合函数求导法则) 设函数 $u=g(x)$在 $x=x_0$ 可导,而函数 $y=f(u)$在 $u=u_0=g(x_0)$处可导,则复合函数 $y=f(g(x))$在 $x=x_0$ 可导,且有

$$[f(g(x))]'_{x=x_0}=f'(u_0)g'(x_0)=f'(g(x_0))g'(x_0).$$

证 因为 $y=f(u)$在 u_0 处可导也即可微,由微分的定义,对任意一个充分小的增量 $\Delta u\neq 0$,都有

$$f(u_0+\Delta u)-f(u_0)=f'(u_0)\Delta u+o(\Delta u).$$

显然,上式对 $\Delta u=0$ 也成立.

令 $\Delta u=g(x_0+\Delta x)-g(x_0)$,两边同除以增量 $\Delta x\neq 0$,则有

$$\frac{f(g(x_0+\Delta x))-f(g(x_0))}{\Delta x}=\frac{f'(u_0)\Delta u}{\Delta x}+o\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right),$$

令 $\Delta x\to 0$,由于函数 $u=g(x)$在 $x=x_0$ 可导,因此$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}=g'(x_0)=$常数,从而$\lim\limits_{\Delta x\to 0}o\left(\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\right)=0$,于是

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(g(x_0+\Delta x))-f(g(x_0))}{\Delta x}\\ &= f'(u_0)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}o\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)\\ &= f'(u_0)g'(x_0).\end{aligned}$$

证毕

复合函数的求导规则可以写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$

我们一般称它为**链式法则**.

由导数与微分的关系,复合函数的微分公式为

$$\mathrm{d}[f(g(x))]=f'(u)g'(x)\mathrm{d}x.$$

例 4.4.1 求幂函数 $y=x^a$ $(a\neq 0)$的导函数.

解 在例 4.3.4 我们已由定义求出了$(x^a)'=ax^{a-1}$,现在我们改用复合函数的求导公式再来做一次.

利用对数恒等式,把 $y=x^a=\mathrm{e}^{a\ln x}$看成是由

$$\begin{cases}y=\mathrm{e}^u,\\ u=a\ln x\end{cases}$$

复合而成的函数,则由链式法则

$$\begin{aligned}(x^a)' &= (\mathrm{e}^u)'\cdot(a\ln x)'\\ &= (\mathrm{e}^u)\big|_{u=a\ln x}\cdot\frac{a}{x}=x^a\cdot\frac{a}{x}\\ &= ax^{a-1}.\end{aligned}$$

例 4.4.2 求 $y=\mathrm{e}^{\cos x}$的导函数.

解 把 $y=\mathrm{e}^{\cos x}$看成是由

$$\begin{cases}y=\mathrm{e}^u,\\ u=\cos x\end{cases}$$

复合而成的函数,则由链式法则

$$\begin{aligned}(\mathrm{e}^{\cos x})' &= (\mathrm{e}^u)'\cdot(\cos x)'\\ &= (\mathrm{e}^u)\big|_{u=\cos x}\cdot(-\sin x)\\ &= -\mathrm{e}^{\cos x}\cdot\sin x.\end{aligned}$$

类似地,若取 $u=-x$,便可得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{-x}) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(\mathrm{e}^u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\\ &= (\mathrm{e}^u\big|_{u=-x})\cdot\frac{\mathrm{d}(-x)}{\mathrm{d}x}=-\mathrm{e}^{-x}.\end{aligned}$$

这是例 4.3.11 中求双曲函数的导函数时所得的结论.

在运算熟练之后,就可以默记 u 后直接求导,而不必写出 u 关于 x 的表达式,如

$$(\sqrt{1+x^2})' = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot (1+x^2)' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

关于复合函数的求导,我们指出以下几点:

(1)无论在理论分析还是实际解决问题中,纯粹的单式函数都是极为少见的,即便如最简单的正弦波

$$y = A\sin(\omega t + \varphi)$$

也是复合函数.因此,复合函数的链式求导法则是最常用的求导工具之一.

(2)上述的链式法则可以推广到多重复合函数的情况:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_1(f_2(f_3(\cdots f_n(x)))\cdots)) = \frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}f_2} \cdot \frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}f_3} \cdots \frac{\mathrm{d}f_{n-1}}{\mathrm{d}f_n} \cdot \frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}x}.$$

读者可用数学归纳法自行证明.

例 4.4.3 求函数 $y = \mathrm{e}^{\sqrt{1+\cos x}}$ 的导函数.

解 将 $y = y(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{1+\cos x}}$ 看成是由

$$\begin{cases} y = f(u) = \mathrm{e}^u, \\ u = g(v) = \sqrt{v}, \\ v = h(x) = 1 + \cos x \end{cases}$$

复合而成的函数 $y(x) = f(g(h(x)))$,运用上面的公式,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}v} \cdot \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} \\ &= \mathrm{e}^u \cdot \frac{1}{2\sqrt{v}} \cdot (-\sin x) \\ &= -\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{1+\cos x}}\sin x}{2\sqrt{1+\cos x}}. \end{aligned}$$

(3)到目前为止我们所得到的全部的求导和求微分的运算规则(包括函数的四则运算、反函数、复合函数的求导和求微分公式)可以列表如下:

	导数运算法则	微分运算法则
线性组合	$(c_1f + c_2g)' = c_1f' + c_2g'$	$\mathrm{d}(c_1f + c_2g) = c_1\mathrm{d}f + c_2\mathrm{d}g$
乘法	$(f \cdot g)' = f'g + fg'$	$\mathrm{d}(f \cdot g) = g\mathrm{d}f + f\mathrm{d}g$
除法	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$	$\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\mathrm{d}f - f\mathrm{d}g}{g^2}$
反函数	$[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{f'(x)}$	$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{f'(x)} = [f^{-1}(y)]'\mathrm{d}y$

复合函数 $[f(g(x))]'=f'(u)g'(x)$ $\quad$ $\mathrm{d}[f(g(x))]=f'(u)g'(x)\mathrm{d}x$

由于初等函数是由基本初等函数经有限次四则运算和复合的产物，有了§3中的基本初等函数的导函数表再加上这张表，初等函数的求导和求微分问题已经彻底解决了.

(4)有时为了便于处理，我们还故意将原本的单式函数

$$y=f(x)$$

再作用一个函数 h，成为复合函数

$$z=h(y)=h(f(x))$$

后再去求导.

当函数 h 取为对数函数时，这个方法叫**对数求导法**，主要用于形如

$$y=f(x)=u(x)^{v(x)}$$

的所谓**幂指函数**. 计算时，先两边取对数，令

$$z(x)=\ln y=v(x)\ln u(x),$$

再分别求导. 一方面，

$$z'(x)=[v(x)\ln u(x)]'=v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)},$$

另一方面，将 $z(x)=\ln y$ 看作复合函数

$$\begin{cases}z=\ln y,\\ y=f(x),\end{cases}$$

则有

$$z'(x)=\frac{y'}{y}.$$

综合两式，就得到

$$\begin{aligned}y'&=y\left[v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right]\\&=u(x)^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right].\end{aligned}$$

读者应掌握这个方法的思想并会实际应用，而不必死记上面的公式.

例 4.4.4 求函数 $y=(\sin x)^{\cos x}$ 的导函数.

解 两边取对数，

$$\ln y=\cos x\ln\sin x,$$

再分别求导

$$(\ln y)'=(\cos x)'\ln\sin x+\cos x\frac{(\sin x)'}{\sin x}$$

也即

$$\frac{y'}{y}=-\sin x\ln\sin x+\cos x\frac{\cos x}{\sin x},$$

于是求得

$$y'=(\sin x)^{\cos x}\left(\frac{\cos^2 x}{\sin x}-\sin x\ln\sin x\right).$$

一阶微分的形式不变性

复合函数的微分公式为

$$\mathrm{d}[f(g(x))]=f'(u)g'(x)\mathrm{d}x,$$

由于 $\mathrm{d}u=g'(x)\mathrm{d}x$，代入上式就得到它的等价表示形式

$$\mathrm{d}[f(u)]=f'(u)\mathrm{d}u,$$

这里 $u=g(x)$是中间变量，x 才是真正的自变量. 但我们发现，它与以 u 为自变量的函数 $y=f(u)$的微分式

$$\mathrm{d}[f(u)]=f'(u)\mathrm{d}u$$

一模一样. 换句话说，不论 u 是自变量还是中间变量，函数 $y=f(u)$的微分形式是相同的，这被称为“**一阶微分的形式不变性**”.

这是一阶微分的一个非常重要的性质，有了这个“形式不变性”作保证，我们拿到一个函数 $y=f(u)$之后，就可以按 u 是自变量去求得它的微分 $f'(u)\mathrm{d}u$，而无须顾忌此时 u 究竟真的是自变量，还是一个随自变量 x 变化的中间变量.

下面我们利用这个性质来求隐函数的导数和微分.

从第一章中已经知道，在满足一定的条件下(我们将在学习多元函数的微分学时再来详细探讨这些条件)，方程

$$F(x,y)=0$$

决定了一个 y 关于 x 的函数 $y=y(x)$，我们称它为隐函数. 有些隐函数可以通过某种方法解出 y 关于 x 的变化规律，化成显函数 $y=f(x)$形式(称为**隐函数的显化**)，如椭圆的标准方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

确定了上下平面的两个显函数

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\quad(-a\leqslant x\leqslant a).$$

但是更多的是隐函数不能或很难被显化的情况，如高次的二元代数方程

$$F(x,y)=y^5+ax^2y^4+bxy^2+cxy+d=0,$$

尽管由代数基本定理，对任意实数 x，至少存在一个实数 y 使得 $F(x,y)=0$，即 $F(x,y)=0$ 至少决定了一个 y 关于 x 的隐函数，但由 Galois 理论，一般不能或很难找到它的显函数形式.

虽然许多隐函数的显式形式找不到或找起来很困难,但我们仍可以求它的导数和微分.

例 4.4.5 求由方程 $e^{xy}+x^2y-1=0$ 确定的隐函数 $y=y(x)$的导函数 $y'(x)$.

解一 将方程

$$e^{xy}+x^2y-1=0$$

的两边关于 x 求导,注意到 y 是 x 的函数,由复合函数的求导法则

$$\begin{aligned}&(e^{xy}+x^2y-1)'\\&=(e^{xy})(xy)'+(x^2y)'\\&=(c^{xy})(y+xy')+(2xy+x^2y')\\&=0,\end{aligned}$$

解出

$$y'=-\frac{c^{xy}y+2xy}{e^{xy}x+x^2}=-\frac{(e^{xy}+2x)y}{(e^{xy}+x)x}.$$

但我们更常用的是采取对等式两边同时求微分.

解二 方程

$$e^{xy}=x^2y-1=0$$

两边求微分,尽管 y 是 x 的函数,但在求微分的过程中,可以利用一阶微分的形式不变性,把 y 视为自变量,因此有

$$\begin{aligned}d(e^{xy})&=e^{xy}d(xy)=e^{xy}(xdy+ydx),\\d(x^2y)&=2xydx+x^2dy,\end{aligned}$$

代入整理后得到

$$(e^{xy}+x)xdy+(e^{xy}+2x)ydx=0,$$

即

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{(e^{xy}+2x)y}{(e^{xy}+x)x}.$$

对方程两边同时求导或求微分的办法,无论对于显函数、可显化的隐函数抑或不可显化的隐函数都能有效地使用,可以说是最重要的一种方法.要提醒注意的是,在用求导的方法时要将 y 看作是 x 的函数,从而利用复合函数的求导法则;而用微分的方法时却必须在形式上把 y 视为自变量,利用一阶微分的形式不变性.

这样求出的导函数中大多仍然含有隐函数 y,但就具体使用而言,这一般不仅无妨于事,相反还能使得结果更为简洁.

例 4.4.6 求由方程 $\sin y^2=\cos\sqrt{x}$ 确定的隐函数 $y=y(x)$的导函数 $y'(x)$.

解　对方程

$$\sin y^2 = \cos\sqrt{x}$$

的两边求微分,

$$\mathrm{d}(\sin y^2) = \mathrm{d}(\cos\sqrt{x}).$$

因为

$$\mathrm{d}(\cos\sqrt{x}) = -\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x, \qquad \mathrm{d}(\sin y^2) = \cos y^2 \cdot 2y\mathrm{d}y,$$

所以

$$2y(\cos y^2)\mathrm{d}y = -\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x,$$

即得到 y 的导数

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\sin\sqrt{x}}{4\sqrt{x}y(\cos y^2)}.$$

读者可对此例中的隐函数的显式形式

$$y = \pm\sqrt{\arcsin(\cos\sqrt{x})}$$

直接求导函数 $y'(x)$,并将运算过程加以比较.

例 4.4.7　求由方程 $\mathrm{e}^{x+y} - xy - \mathrm{e} = 0$ 确定的隐函数 $y = y(x)$ 在 $x = 0$ 处的切线方程.

解　容易看出,由 $\mathrm{e}^{x+y} - xy - \mathrm{e} = 0$ 确定的隐函数 y 在 $x = 0$ 处的函数值为 $y(0) = 1$.

将方程

$$\mathrm{e}^{x+y} - xy - \mathrm{e} = 0$$

的两边关于 x 求导,由例 4.4.5 同样的过程,得到

$$y' = \frac{y - \mathrm{e}^{x+y}}{\mathrm{e}^{x+y} - x}.$$

将 $x = 0$ 和 $y = 1$ 代入 y' 的表达式,即得

$$y'(0) = \frac{1 - \mathrm{e}}{\mathrm{e}},$$

于是得到 $y = y(x)$ 在 $x = 0$ 处的切线方程为

$$y = \left(\frac{1 - \mathrm{e}}{\mathrm{e}}\right)x + 1.$$

参数形式的函数的求导公式

复合函数的求导法则给出了一个相当一般的求导方法,许多求导公式都可以看成是它的特例.

例如,可以将 $y=\frac{1}{g(x)}$ 看成是由

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{u}, \\ u = g(x) \end{cases}$$

复合而成的函数,则由复合函数的求导公式,

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \left(\frac{1}{u}\right)' \cdot g'(x) = -\frac{g'(x)}{u^2} = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2},$$

这就是前面得到的函数的倒数的求导公式.

再比如,假定 $y=f(x)$ 满足反函数求导定理的条件,将它的反函数记为 $x=f^{-1}(y)$,则成立

$$x = f^{-1}(f(x)).$$

对这个式子两边求导,右边利用链式法则,即有

$$1 = (x)' = [f^{-1}(f(x))]' = [f^{-1}(y)]' \cdot f'(x),$$

或者写成

$$[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{f'(x)},$$

这正是反函数求导定理的结论.因此,反函数求导公式也可以看成是复合函数求导法则的特殊情况.

作为一个实际应用的例子,下面我们用它来导出参数形式的函数的导数公式.

设自变量 x 和因变量 y 的函数关系由参数形式

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \qquad t \text{ 是参数}, t_0 \leqslant t \leqslant t_1$$

确定.这里,参数 t 的函数 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 都在 (t_0,t_1) 上可微,$\varphi(t)$ 在 (t_0,t_1) 上严格单调且 $\varphi'(t)\neq 0$.

由反函数求导法则(定理 4.3.4),$x=\varphi(t)$ 在 (t_0,t_1) 上有反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$ 存在,且成立

$$(\varphi^{-1}(x))' = \frac{1}{\varphi'(t)},$$

这样,y 关于 x 的函数关系可以写成

$$y = \psi(t) = \psi(\varphi^{-1}(x)),$$

由复合函数求导法则,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} \\ &= \frac{\mathrm{d}(\psi(t))}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}(\varphi^{-1}(x))}{\mathrm{d}x} \end{aligned}$$

$$= \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

这就是参数形式的函数的导数公式.

也可以直接从微分定义出发,将

$$\begin{cases} \mathrm{d}y = \psi'(t)\mathrm{d}t, \\ \mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t \end{cases}$$

两边分别相除,即得到与上面同样的结果.

例 4.4.8　求由参数方程

$$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

确定的函数 $y = f(x)$ 的导函数 y'.

解　这是位于上半平面与 x 轴相切的单位圆沿 x 轴无滑动地滚动一周时,圆周上的一点的运动轨迹,也就是摆线(即旋轮线)的方程(见图 1.2.6 和图 7.4.7).

由参数形式的函数的求导公式,即得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{(1 - \cos t)'}{(t - \sin t)'} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \cot\frac{t}{2}.$$

例 4.4.9　设抛射体运动在 $t = 0$ 时刻的水平速度和垂直速度分别等于 v_1 和 v_2,问在什么时刻该物体的飞行倾角恰与地面平行?

解　将抛射体运动按水平分量和垂直分量写开,即得参数方程

$$\begin{cases} x = v_1 t, \\ y = v_2 t - \frac{1}{2}gt^2, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{2v_2}{g}.$$

于是,由导数的几何意义,物体在任一时刻 t 的飞行倾角 θ 应为

$$\begin{aligned} \theta &= \arctan\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_{x = v_1 t} \\ &= \arctan\frac{\left(v_2 t - \frac{1}{2}gt^2\right)'}{(v_1 t)'} \\ &= \arctan\frac{v_2 - gt}{v_1}. \end{aligned}$$

显然,要使飞行倾角与地面平行,即 $\theta = 0$,只要 $\frac{v_2 - gt}{v_1} = 0$,即解得

$$t = \frac{v_2}{g},$$

这是我们在高中力学中熟知的结果.

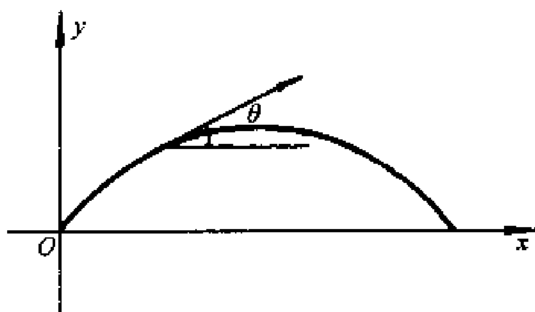


图 4.4.1

最后指出，显式表示、隐式表示和参数表示是表达函数的三种重要形式，各有不同的适用场合，有很多函数只能用其中的某一种来表达.即使有些函数能够用它们中的任何一种来表达，运算的难易和繁简程度也可以大相径庭，因此必须全面地掌握相应的求导公式，根据实际情况选择使用.

举一个简单的例子，如果想求出椭圆上某一点的导数，既可以从它的显函数形式

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\quad(-a\leqslant x\leqslant a)$$

入手，得到

$$y'=\pm\frac{b}{a}\frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\mp\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\left(=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}\right);$$

也可以通过它的参数方程

$$\begin{cases}x=a\cos t,\\y=b\sin t,\end{cases}\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi,$$

由参数形式的函数的求导公式，得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(b\sin t)'}{(a\cos t)'}=\frac{b\cos t}{-a\sin t}\left(=-\frac{b^2(a\cos t)}{a^2(b\sin t)}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}\right);$$

但最简洁的是从它的标准方程即隐函数

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

入手，利用一阶微分的形式不变性，由

$$\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{a^2}\right)+\mathrm{d}\left(\frac{y^2}{b^2}\right)=\frac{2x}{a^2}\mathrm{d}x+\frac{2y}{b^2}\mathrm{d}y=0$$

就直接得出

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}.$$

习 题

1. 求下列函数的导数:

(1) $y=(2x^2-x+1)^2$;

(2) $y=e^{2x}\sin 3x$;

(3) $y=\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$;

(4) $y=\sqrt{\frac{\ln x}{x}}$;

(5) $y=\sin x^3$;

(6) $y=\cos\sqrt{x}$;

(7) $y=\sqrt{x+1}-\ln(x+\sqrt{1+x})$;

(8) $y=\arcsin(e^{-x^2})$;

(9) $y=\ln\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)$;

(10) $y=\frac{1}{(2x^2+\sin x)^2}$;

(11) $y=\frac{1+\ln^2 x}{x\sqrt{1-x^2}}$;

(12) $y=\frac{x}{\sqrt{1+\csc x^2}}$;

(13) $y=\frac{2}{\sqrt[3]{2x^2-1}}+\frac{3}{\sqrt[4]{3x^3+1}}$;

(14) $y=e^{-\sin^2 x}$;

(15) $y=x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$;

(16) $y=\arccos\frac{x-\cos x^2}{\operatorname{th} x}$.

2. 求下列函数的导数:

(1) $y=\ln\sin x$;

(2) $y=\ln(\csc x-\cot x)$;

(3) $y=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}\right)$;

(4) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$;

(5) $y=\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\ln(x+\sqrt{x^2-a^2}))$.

3. 设 $f(x)$ 可导,求下列函数的导数:

(1) $f(\sqrt[3]{x^2})$;

(2) $f\left(\frac{1}{\ln x}\right)$;

(3) $\sqrt{f(x)}$;

(4) $\arctan f(x)$;

(5) $f(f(e^{x^2}))$;

(6) $\sin(f(\sin x))$;

(7) $f\left(\frac{1}{f(x)}\right)$;

(8) $\frac{1}{f(f(x))}$.

4. 用对数求导法求下列函数的导数:

(1) $y=x^x$;

(2) $y=(x^3+\sin x)^{\frac{1}{x}}$;

(3) $\cos^x x$;

(4) $y=\ln^x(2x+1)$;

(5) $y=x\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^3}}$;

(6) $y=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)$;

(7) $y=(\sqrt{x^2+a^2}-x)^m$; (8) $y=\sin x^{\sqrt{x}}$.

5. 求$\frac{dy}{dx}$:

(1) $y=x+\arctan y$; (2) $y+xe^y=1$;

(3) $\sqrt{x-\cos y}=\sin y-x$; (4) $xy-\ln(y+1)=0$;

(5) $e^{x^2+y}-xy^2=0$; (6) $\tan(x+y)-xy=0$;

(7) $2y\sin x+x\ln y=0$; (8) $x^3+y^3-3axy=0$.

6. 对下列参数形式的函数求$\frac{dy}{dx}$:

(1) $\begin{cases}x=at^2,\\ y=bt^3;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=1-t^2,\\ y=t-t^3;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x=t^2\sin t,\\ y=t^2\cos t;\end{cases}$ (4) $\begin{cases}x=ae^{-t},\\ y=be^t;\end{cases}$

(5) $\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t;\end{cases}$ (6) $\begin{cases}x=\operatorname{sh} at,\\ y=\operatorname{ch} bt;\end{cases}$

(7) $\begin{cases}x=\dfrac{t+1}{t},\\ y=\dfrac{t-1}{t};\end{cases}$ (8) $\begin{cases}x=\sqrt{1+t},\\ y=\sqrt{1-t};\end{cases}$

(9) $\begin{cases}x=e^{-2t}\cos^2 t,\\ y=e^{-2t}\sin^2 t;\end{cases}$ (10) $\begin{cases}x=\ln(1+t^2),\\ y=t-\arctan t.\end{cases}$

7. 设 $f(x)$满足反函数求导定理条件,将下列函数的导数用 $f'(x)$的复合函数形式表达出来:

(1) $f^{-1}(\arcsin x)$; (2) $f^{-1}(e^{f(x)})$;

(3) $f^{-1}\left(\frac{1}{f(x)}\right)$; (4) $f\left(\frac{1}{f^{-1}(x)}\right)$;

(5) $f^{-1}(f^{-1}(x))$; (6) $\frac{1}{f^{-1}(f^{-1}(x))}$.

8. 设函数 $u=g(x)$在 $x=x_0$ 处连续,$y=f(u)$在 $u=u_0=g(x_0)$处连续.请举例说明,在以下情况中,复合函数 $y=f(g(x))$在 $x=x_0$ 处并非一定不可导:

(1) $u=g(x)$在 x_0 处可导,而 $y=f(u)$在 u_0 处不可导;

(2) $u=g(x)$在 x_0 处不可导,而 $y=f(u)$在 u_0 处可导;

(3) $u=g(x)$在 x_0 处不可导,$y=f(u)$在 u_0 处也不可导.

9. 设 $f(u),g(u),h(u)$可微且 $h(u)>0$,$u=\varphi(x)$也是可微函数,利用一阶微分的形式不变性求下列复合函数的微分:

(1) $f(u)g(u)h(u)$; (2) $\dfrac{f(u)g(u)}{h(u)}$;

(3) $h(u)^{g(u)}$; (4) $\ln_{h(u)}g(u)$;

(5) $\arctan\left[\dfrac{f(u)}{h(u)}\right]$; (6) $\dfrac{1}{\sqrt{f^2(u)+h^2(u)}}$.

§5 高阶导数和高阶微分

高阶导数的实际背景及定义

一个函数的导数仍然是一个函数,因此若有必要的话,可以对它继续进行求导.事实上,大量实际问题的研究中都会遇到这类情况.

Newton 在研究质点沿直线运动的运动规律时发现,一个受力质点的速度的改变量 $\Delta v = v(t_2) - v(t_1)$ 与所受的力 F 及受力的时间 $\Delta t = t_2 - t_1$ 成正比,而与它的质量 m 成反比.在定义了合适的单位之后,其比例系数可以取为 1,即

$$F\Delta t = m\Delta v,$$

这是熟悉的冲量定律.

将上式改写成

$$F = m\frac{\Delta v}{\Delta t},$$

对于匀变速运动来讲,相同时间中的速度改变量 $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ 是常数,记为 a,就得到了著名的 Newton 第二运动定律

$$F = ma.$$

在一般的变速运动中,加速度 a 并非是常值,而是随时间变化而变化的函数 $a(t)$.通过与§2 类似的讨论就可以知道,它在 t 时刻的瞬时加速度应为当 $\Delta t \to 0$ 时,它的平均加速度 $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ 的极限值,即

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = v'(t),$$

也就是说,加速度函数 $a(t)$ 是速度函数 $v(t)$ 的导函数.而从前面已经知道,$v(t)$ 是位移函数 $s(t)$ 的导函数,那么 $a(t)$ 就成了 $s(t)$ 的导函数的导函数,我们将它称为 $s(t)$ 的二阶导数.

(与此同时,Leibniz 也引进并运用二阶导数来研究曲线的曲率问题,我们将在其它课程中展开这个问题.)

设 $y = f(x)$ 可导,且它的导数 $f'(x)$ 仍是个可导函数,则 $f'(x)$ 的导数

$$[f'(x)]' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$$

被称为 $f(x)$ 的**二阶导数**，记为

$$f''(x) \text{ 或} \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2},$$

这时我们称 $f(x)$ 是**二阶可导函数**（简称 $f(x)$**二阶可导**）或者说 $f(x)$ 的**二阶导数存在**.

若 $f''(x)$ 仍是个可导函数，则它的导数称为 $f(x)$ 的三阶导数，记为

$$f'''(x) \text{ 或} \frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3},$$

并称 $f(x)$**三阶可导**或者 $f(x)$ 的**三阶导数存在**.

以此类推，我们可以定义一般的 n 阶导数（$n \geqslant 2$ 时称为高阶导数）：

定义 4.5.1　设函数 $f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数 $f^{(n-1)}(x)\left(\text{或}\frac{\mathrm{d}x^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right)(n=1,2,\cdots)$ 仍是个可导函数，则称它的导数

$$[f^{(n-1)}(x)]' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right)$$

为 $f(x)$ 的 **n 阶导数**，记为

$$f^{(n)}(x)\ \left(\text{或}\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\right),$$

并称 $f(x)$ 是 **n 阶可导函数**（简称 $f(x)$**n 阶可导**）或者 $f(x)$ 的 **n 阶导数存在**.

显然，若 $f(x)$ 的 n 阶导数存在，则它的低于 n 阶的导数都存在.

利用上述记号，加速度函数可以写成

$$a(t) = s''(t) = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2},$$

Newton 第二运动定律可以写成

$$F = m\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\quad\left(\text{通常写成 } F = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\text{ 形式}\right).$$

可见，高阶导数与一阶导数一样，也完全来自于研究实际问题的需要.

由高阶导数的定义，只要按求导法则对 $f(x)$ 逐次求导，就能得到它的任意阶的导函数. 作为例子，我们先来求几个常用的基本初等函数的高阶导数.

例 4.5.1　求 $y = \mathrm{e}^x$ 的 n 阶导函数.

解　由

$$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x,$$

显然有

$$(\mathrm{c}^x)' = (\mathrm{c}^x)'' = (\mathrm{e}^x)''' = \cdots = (\mathrm{e}^x)^{(n)} = \mathrm{e}^x,$$

顺便可以得到

$$(a^x)^{(n)} = (\ln a)^n a^x.$$

例4.5.2 求 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 的 n 阶导函数.

解 因为

$$(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

利用复合函数的求导法则

$$(\sin x)'' = \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right),$$

这样以此类推,用数学归纳法容易证明

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

同理,$y=\cos x$ 的 n 阶导数为

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right).$$

例4.5.3 求幂函数 $y=x^m$(m 是正整数)的 n 阶导函数.

解 由幂函数的导函数形式,有

$$\begin{aligned}
&(x^m)' = mx^{m-1},\\
&(x^m)'' = m(m-1)x^{m-2},\\
&(x^m)''' = m(m-1)(m-2)x^{m-3},\\
&\cdots\cdots,
\end{aligned}$$

因此,不难得到它的 n 阶导函数的一般形式为

$$(x^m)^{(n)} = \begin{cases} m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}, & n \leqslant m,\\ 0, & n > m, \end{cases}$$

特别地

$$(x^m)^{(m)} = m!.$$

例 4.5.4 求 $y=\ln x$ 的 n 阶导函数.

解 因为

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} = x^{-1},$$

于是

$$\begin{aligned}
&(\ln x)'' = (x^{-1})' = -x^{-2},\\
&(\ln x)''' = (-x^{-2})' = 2x^{-3},\\
&(\ln x)^{(4)} = (2x^{-3})' = -3\cdot 2x^{-4},\\
&\cdots\cdots,
\end{aligned}$$

依此类推就可以导出它的一般规律

$$(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2x^{-n}$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}.$$

我们还附带地得到了

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (\ln x)^{(n+1)} = (-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}.$$

高阶导数的运算法则

对于两个函数的线性组合和乘积的高阶导数有如下运算法则:

定理 4.5.1 设 $f(x)$和 $g(x)$都是 n 次可导的,则对任意常数 c_1 和 c_2,它们的线性组合 $c_1f(x)+c_2g(x)$也 n 次可导,且满足如下的线性运算关系

$$[c_1f(x)+c_2g(x)]^{(n)} = c_1f^{(n)}(x)+c_2g^{(n)}(x).$$

这个结论可以推广到多个函数线性组合的情况:

$$\left[\sum_{i=1}^{n}c_if_i(x)\right]^{(n)} = \sum_{i=1}^{n}c_if_i^{(n)}(x),$$

证明从略.

定理 4.5.2(Leibniz 公式) 设 $f(x)$和 $g(x)$都是 n 次可导函数,则它们的积函数也 n 次可导,且成立公式

$$[f(x)g(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}C_n^kf^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x),$$

这里 $C_n^k=\dfrac{n!}{k!\ (n-k)!}$是组合系数.

证 用数学归纳法.

当 $n=1$ 时,上式为

$$\begin{aligned}[f(x)g(x)]' &= C_1^0f'(x)g(x)+C_1^1f(x)g'(x)\\ &= f'(x)g(x)+f(x)g'(x).\end{aligned}$$

这正是§3 中的结论.

设当 $n=m$ 时 Leibniz 公式成立,即有

$$[f(x)g(x)]^{(m)} = \sum_{k=0}^{m}C_m^kf^{(m-k)}(x)g^{(k)}(x),$$

则当 $n=m+1$ 时,利用归纳法假设

$$\begin{aligned}[f(x)g(x)]^{(m+1)} &= \{[f(x)\cdot g(x)]^{(m)}\}'\\
&= \sum_{k=0}^{m}C_m^k[f^{(m-k)}(x)g^{(k)}(x)]'\\
&= \sum_{k=0}^{m}C_m^k\{[f^{(m-k)}(x)]'g^{(k)}(x)+f^{(m-k)}(x)[g^{(k)}(x)]'\}\\
&= \sum_{k=0}^{m}C_m^kf^{(m-k+1)}(x)g^{(k)}(x)+\sum_{k=0}^{m}C_m^kf^{(m-k)}(x)g^{(k+1)}(x).\end{aligned}$$

将右边的第一项改写成

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{m}\mathrm{C}_m^k f^{(m+1-k)}(x)g^{(k)}(x)\\&=f^{(m+1)}(x)g^{(0)}(x)+\sum_{k=1}^{m}\mathrm{C}_m^k f^{(m+1-k)}(x)g^{(k)}(x),\end{aligned}$$

而将右边的第二项改写成

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{m}\mathrm{C}_m^j f^{(m-j)}(x)g^{(j+1)}(x)\\&=\sum_{k=1}^{m+1}\mathrm{C}_m^{k-1} f^{(m+1-k)}(x)g^{(k)}(x)\qquad(令\ k=j+1)\\&=\sum_{k=1}^{m}\mathrm{C}_m^{k-1} f^{(m+1-k)}(x)g^{(k)}(x)+f^{(0)}(x)g^{(m+1)}(x).\end{aligned}$$

两式合并后利用组合恒等式

$$\mathrm{C}_m^{k-1}+\mathrm{C}_m^k=\mathrm{C}_{m+1}^k$$

和

$$\mathrm{C}_{m+1}^0=\mathrm{C}_{m+1}^{m+1}=1,$$

便有

$$[f(x)g(x)]^{(m+1)}=\sum_{k=0}^{m+1}\mathrm{C}_{m+1}^k f^{(m+1-k)}(x)g^{(k)}(x),$$

即公式对 $n=m+1$ 也成立.

所以,定理结论对任意正整数成立.

证毕

请读者将 Leibniz 公式和二项式展开公式

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k a^{n-k}b^k$$

的形式加以比较.

例 4.5.5 求函数 $y=(3x^2-2)\sin 2x$ 的 100 阶导数.

解 由幂函数的高阶函数的表达式,

$$\begin{aligned}&(3x^2-2)'=6x,\\&(3x^2-2)''=6,\\&(3x^2-2)^{(n)}=0\quad(n\geqslant 3),\end{aligned}$$

因此 Leibniz 公式中的和式中,只有三项不为零.而由例 4.5.2 容易知道

$$(\sin 2x)^{(n)}=2^n\sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right),$$

于是

$$
\begin{aligned}
y^{(100)} &= \sum_{k=0}^{100} C_{100}^{k}(\sin 2x)^{(n-k)}(3x^2-2)^{(k)} \\
&= (\sin 2x)^{(100)}(3x^2-2) + C_{100}^{1}(\sin 2x)^{(99)}(3x^2-2)' \\
&\quad + C_{100}^{2}(\sin 2x)^{(98)}(3x^2-2)'' \\
&= 2^{100}(3x^2-2)\sin 2x - 100\cdot 2^{99}\cdot(6x)\cos 2x \\
&\quad - 4\,950\cdot 2^{98}\cdot 6\cdot\sin 2x \\
&= 2^{98}[(12x^2-29\,708)\sin 2x - 1\,200x\cos 2x].
\end{aligned}
$$

两个函数之商的 n 阶导数 $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]^{(n)}$ 可以先改写为乘积型 $\left[f(x)\cdot\dfrac{1}{g(x)}\right]^{(n)}$,再用 Leibniz 公式来算.

复合函数、隐函数和参数形式的函数的高阶导数十分复杂,比如对复合函数 $y=f(g(x))$,即

$$
\begin{cases} y = f(u), \\ u = g(x), \end{cases}
$$

其求导的链式法则为

$$
\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx},
$$

由乘积的求导公式,关于的二阶导数为

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{du}\right)\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{du}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right).
\end{aligned}
$$

这里,第二项中的 $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{du}{dx}\right)=\dfrac{d^2u}{dx^2}$ 当然是没有问题的,但要注意,第一项中的 $\dfrac{dy}{du}$ 仍然是 u 的函数,即仍然是 x 的复合函数,因此 $\dfrac{dy}{du}$ 关于的导数仍然必须遵循链式法则,即

$$
\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{du}\right) = \frac{d}{du}\left(\frac{dy}{du}\right)\cdot\frac{du}{dx} = \frac{d^2y}{du^2}\cdot\frac{du}{dx},
$$

代入前式,得到

$$
\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{du^2}\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{du}\cdot\frac{d^2u}{dx^2}.
$$

初学者很容易从

$$
y'(x) = f'(u)g'(x)
$$

想当然地得出

$$y''(x)=[f'(u)g'(x)]'=f''(u)g'(x)+f'(u)g''(x)$$

的错误结论,请多加注意.

y 关于 x 的三阶以上的导数的表达式就更加复杂了,很难用一个一般性的公式来表达.而且容易看出,即便能够求出它们的 n 阶导数的一般形式,也无多大的现实意义.实际上,只要很好地掌握了求复合函数、隐函数和参数形式的一阶导数的方法,再加上耐心和仔细,就不难求出它们的高阶导数.

下面各举一个求二阶导数的例子.

例 4.5.6 求复合函数 $y=e^{\sin x}$ 的二阶导数.

解 把 $y=e^{\sin x}$ 看成是由

$$\begin{cases} y=e^u, \\ u=\sin x \end{cases}$$

复合而成的函数,代入公式

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d^2y}{du^2}\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\frac{dy}{du}\cdot\frac{d^2u}{dx^2},$$

便有

$$\begin{aligned}(e^{\sin x})''&=(e^u)''\cdot\cos^2x+(e^u)'(-\sin x)\\&=e^{\sin x}(\cos^2x-\sin x).\end{aligned}$$

但更直截了当的做法是对

$$(e^{\sin x})'=e^{\sin x}\cdot\cos x$$

再求一次导数,就有

$$\begin{aligned}(e^{\sin x})''&=(e^{\sin x}\cdot\cos x)'\\&=(e^{\sin x})'\cos x+e^{\sin x}(\cos x)'\\&=e^{\sin x}(\cos^2x-\sin x).\end{aligned}$$

这样做,不必去记什么公式,也不容易出错.

例 4.5.7 求由方程 $e^{xy}+x^2y-1=0$ 确定的隐函数 $y=y(x)$ 的二阶导数 $y''(x)$.

解 在例 4.4.5 中,我们由复合函数的求导法则,通过对方程

$$e^{xy}+x^2y-1=0$$

的两边关于 x 求导,已经求得

$$(e^{xy})(y+xy')+(2xy+x^2y')=0,$$

对上式的两边再次关于 x 求导,并注意到 y 和 y' 都是 x 的函数,便有

$$\begin{aligned}&[e^{xy}(y+xy')+(2xy+x^2y')]'\\&=(e^{xy})'(y+xy')+(e^{xy})(y+xy')'+(2xy+x^2y')'\\&=(e^{xy})(y+xy')^2+(e^{xy})(y'+y'+xy'')+(2y+4xy'+x^2y'')\end{aligned}$$

$$=0,$$

整理后有

$$y''=-\frac{(e^{xy})[(y+xy')^2+2y']+(2y+4xy')}{x(e^{xy}+x)},$$

其中 y' 由

$$y'=-\frac{(e^{xy}+2x)y}{(e^{xy}+x)x}$$

给出,就得到了隐函数 $y(x)$ 的二阶导数.

对参数形式的函数

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}\quad t\text{ 是参数},t_0\leqslant t\leqslant t_1,$$

已知其关于 x 的导函数为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

因此 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 实际上是函数

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\equiv\xi(t)\end{cases}$$

关于 x 的导数.对它再使用参数形式的函数的求导公式

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\xi'(t)}{\varphi'(t)},$$

就得到了

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

在实际计算时,读者应抓住本质对所给的函数逐次求导,同样不必死记公式.另外,要特别注意,

$$\frac{d^2y}{dx^2}\neq\frac{\psi''(t)}{\varphi''(t)},$$

这也是初学者易犯错误的地方.

例 4.5.8 求摆线

$$\begin{cases}x=t-\sin t,\\ y=1-\cos t,\end{cases}\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

在 $t=\pi$ 处的二阶导函数 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 的值.

解 由例4.4.8,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(1-\cos t)'}{(t-\sin t)'}=\frac{\sin t}{1-\cos t}=\cot\frac{t}{2}.$$

再对函数

$$\begin{cases}x=t-\sin t,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\cot\dfrac{t}{2},\end{cases}$$

求关于 x 的导数,得到

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\left(\cot\dfrac{t}{2}\right)'}{(t-\sin t)'}=\frac{-\dfrac{1}{2}\csc^2\dfrac{t}{2}}{1-\cos t}=-\frac{1}{4}\csc^4\frac{t}{2},$$

所以当 $t=\pi$ 时,$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$的值为$-\dfrac{1}{4}$.

高阶微分

现在我们来定义高阶微分.显然,函数 $y=f(x)$的微分

$$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$$

是一个函数.看上去,$\mathrm{d}y$ 依赖于两个变量:x 和 $\mathrm{d}x$,但我们考察微分时,实际上是考察不同的自变量 x 产生了同一个增量 $\mathrm{d}x$ 后,函数值的变化情况,换句话说,这里的 $\mathrm{d}x$ 视作常数.

这样,$f(x)$的微分 $\mathrm{d}y$ 就是x 的函数,因而当它可微时,可以再对它作微分运算.我们称它的**微分**

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}y)=\mathrm{d}^2y$$

为 y 的二阶微分;同样,当 d^2y 可微时,称它的**微分**

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}^2y)=\mathrm{d}^3y$$

为 y 的三阶微分……以此类推,一般地,当 y 的$n-1$ 阶微分 $\mathrm{d}^{n-1}y$ 可微时,称它的微分

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}^{n-1}y)=\mathrm{d}^ny$$

为 y 的n 阶微分.

下面我们来求 y 的n 阶**微分**的表达式.对 $y=f(x)$的一阶**微分**

$$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$$

的两边求微分,利用乘积的微分公式,则有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2y&=\mathrm{d}[f'(x)\mathrm{d}x]\\&=\mathrm{d}[f'(x)]\cdot\mathrm{d}x+f'(x)\cdot\mathrm{d}(\mathrm{d}x).\end{aligned}$$

在右边的第一项中,显然有

$$\mathrm{d}[f'(x)]=f''(x)\mathrm{d}x,$$

而在第二项中,由于 $\mathrm{d}x$ 是常数,即有

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}x)=0.$$

这样,就得到了 y 的二阶微分

$$\mathrm{d}^2y=f''(x)\mathrm{d}x^2.$$

用同样的方法,我们可以导出 y 的 n 阶微分的表达式

$$\mathrm{d}^ny=f^{(n)}(x)\mathrm{d}x^n \quad (n=2,3,\cdots),$$

这个公式建立了高阶导数与高阶微分之间的关系,即 **y 的 n 阶微分等于它的 n 阶导数乘上自变量的微分的 n 次方**,这也是我们用 $\dfrac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}$ 来记 $f^{(n)}(x)$ 的原因.(请读者区别记号 $\mathrm{d}(x^2)$、$\mathrm{d}x^2$ 和 d^2x:$\mathrm{d}(x^2)$ 表示对函数 $y=x^2$ 的微分,它等于 $2x\mathrm{d}x$;$\mathrm{d}x^2$ 表示自变量的微分的平方,即 $(\mathrm{d}x)^2$;而 d^2x 则表示自变量的两次微分 $\mathrm{d}(\mathrm{d}x)$,由上面所说的,它的值为零.)

但要注意的是,上述公式不能推广到中间变量的情况.

对于复合函数

$$\begin{cases} y=f(u), \\ u=g(x), \end{cases}$$

这里只有 x 才是自变量,u 只是中间变量.由一阶微分的形式不变性,y 的一阶微分公式既可以写成自变量的形式

$$\mathrm{d}y=[f(g(x))]'\mathrm{d}x(=f'(u)g'(x)\mathrm{d}x),$$

也可以写成中间变量的形式

$$\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u.$$

那么,y 的二阶微分公式

$$\mathrm{d}^2y=[f(g(x))]''\mathrm{d}x^2,$$

是否也可以依样画葫芦地写成中间变量的形式

$$\mathrm{d}^2y=f''(u)\mathrm{d}u^2$$

呢? 回答是否定的,让我们先来看一个简单的例子.

例 4.5.9 求函数 $y=\mathrm{e}^{\sin x}$ 的二阶微分.

解 在例 4.5.6 中已经解出

$$y''=\mathrm{e}^{\sin x}(\cos^2x-\sin x),$$

所以

$$\mathrm{d}^2y=y''\mathrm{d}x^2=\mathrm{e}^{\sin x}(\cos^2x-\sin x)\mathrm{d}x^2.$$

但若把 $y=\mathrm{e}^{\sin x}$ 看成是由

$$\begin{cases} y=\mathrm{e}^u, \\ u=\sin x \end{cases}$$

复合而成的函数,则

$$f''(u)=(\mathrm{e}^u)''=\mathrm{e}^u,$$

$$\mathrm{d}u^2 = [\mathrm{d}(\sin x)]^2 = \cos^2 x\,\mathrm{d}x^2,$$

因此

$$f''(u)\mathrm{d}u^2 = \mathrm{e}^u\cos^2 x\,\mathrm{d}x^2 = \mathrm{e}^{\sin x}\cos^2 x\,\mathrm{d}x^2$$
$$\neq \mathrm{e}^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x)\mathrm{d}x^2,$$

即

$$f''(u)\mathrm{d}u^2 \neq \mathrm{d}^2 y.$$

事实上,对 $\mathrm{d}y = f'(u)\mathrm{d}u$ 两边求微分时,可知 $\mathrm{d}^2 y$ 应为

$$\mathrm{d}^2 y = \mathrm{d}[f'(u)]\cdot\mathrm{d}u + f'(u)\cdot\mathrm{d}(\mathrm{d}u)$$
$$= f''(u)\mathrm{d}u^2 + f'(u)\mathrm{d}^2 u,$$

这时由于 u 是中间变量而非自变量,$\mathrm{d}^2 u$ 一般不会等于零,若不小心舍弃了后一项就会造成计算的错误.

在例4.5.9的计算中,只要加上一项

$$f'(u)\mathrm{d}^2 u = \mathrm{e}^u\mathrm{d}^2(\sin x) = \mathrm{e}^{\sin x}(\sin x)''\mathrm{d}x^2 = -\mathrm{e}^{\sin x}\sin x\,\mathrm{d}x^2,$$

答案就正确了.

作为一个练习,请读者自行推导用中间变量 u 表示的 y 的三阶微分 $\mathrm{d}^3 y$.

总而言之,关于自变量和中间变量的微分形式的不变性只是对一阶微分成立,而对于高阶微分来讲,这一性质已经不复存在了.因此在求高阶微分的时候,一定要仔细分清楚自变量和中间变量,区别对待,否则将会导致谬误.

习　　题

1. 求下列函数的高阶导数:

(1) $y = x^3 + 2x^2 - x + 1$,求 y''';　　(2) $y = x^4\ln x$,求 y'';

(3) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x}}$,求 y'';　　(4) $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$,求 y'';

(5) $y = \sin x^3$,求 y''、y''';　　(6) $y = x^3\cos\sqrt{x}$,求 y''、y''';

(7) $y = x^2\mathrm{e}^{3x}$,求 y''';　　(8) $y = \mathrm{e}^{-x^2}\arcsin x$,求 y'';

(9) $y = x^3\cos 2x$,求 $y^{(80)}$;　　(10) $y = (2x^2+1)\mathrm{sh}\,x$,求 $y^{(99)}$.

2. 求下列函数的 n 阶导数 $y^{(n)}$:

(1) $y = \sin^2\omega x$;　　(2) $y = 2^x\ln x$;

(3) $y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$;　　(4) $y = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$;

(5) $y = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$;　　(6) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

3. 设 $f(x)$ 任意次可导,求

(1) $[f(x^2)]'''$;　　(2) $\left[f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]'''$;

(3)$[f(\ln x)]''$； (4)$[\ln f(x)]''$；

(5)$[f(e^{-x})]'''$； (6)$[f(\arctan x)]''$.

4. 用 Leibniz 公式计算 $y^{(n)}(0)$：

(1)$y=\arctan x$ （提示：$y'(1+x^2)=1$）；

(2)$y=\arcsin x$ （提示：$xy'=(1-x^2)y''$）.

5. 求$\frac{d^2y}{dx^2}$：

(1)$e^{x^2+y}-x^2y=0$； (2)$\tan(x+y)-xy=0$；

(3)$2y\sin x+x\ln y=0$； (4)$x^3+y^3-3axy=0$.

6. 对下列参数形式的函数求$\frac{d^2y}{dx^2}$：

(1)$\begin{cases}x=at^2,\\ y=bt^3;\end{cases}$ (2)$\begin{cases}x=at\cos t,\\ y=at\sin t;\end{cases}$

(3)$\begin{cases}x=t(1-\sin t),\\ y=t\cos t;\end{cases}$ (4)$\begin{cases}x=ae^{-t},\\ y=be^{t};\end{cases}$

(5)$\begin{cases}x=\sqrt{1+t},\\ y=\sqrt{1-t};\end{cases}$ (6)$\begin{cases}x=\sin at,\\ y=\cos bt.\end{cases}$

7. 利用反函数的求导公式$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'}$，证明

(1)$\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{y''}{(y')^3}$； (2)$\frac{d^3x}{dy^3}=\frac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}$.

8. 求下列函数的高阶微分：

(1)$y=\sqrt[3]{x-\tan x}$，求 d^2y； (2)$y=x^4e^{-x}$，求 d^4y；

(3)$y=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$，求 d^2y； (4)$y=\frac{\sec x}{\sqrt{x^2-1}}$，求 d^2y；

(5)$y=x\sin 3x$，求 d^3y； (6)$y=\cos^3\sqrt{x}$，求 d^3y；

(7)$y=x^x$，求 d^2y； (8)$y=\mathrm{sh}(\arccos x)$，求 d^2y；

(9)$y=x^n\cos 2x$，求 d^ny； (10)$y=\frac{\ln x}{x}$，求 d^ny.

9. 求 $d^2(e^x)$：

(1)x 是自变量； (2)$x=\varphi(t)$是中间变量.

10. 设 $f(u)$，$g(u)$任意次可微且 $g(u)>0$，

(1)当 $u=\tan x$ 时，求 d^2f；

(2)当 $u=\sqrt{v}$，$v=\ln x$ 时，求 d^2g；

(3)$d^2[f(u)g(u)]$； (4)$d^2[\ln g(u)]$；

(5)$d^2\left[\frac{f(u)}{g(u)}\right]$； (6)$d^2[g(u)^{f(u)}]$.

第五章　微分中值定理及其应用

§1 微分中值定理

微分中值定理一般称为"Lagrange 中值定理",是微分学中最重要的结论之一.在本章的其余部分可以看到,它是研究函数特性的一个有力工具.不仅如此,在本课程的如积分学、级数理论等后续章节里,以及以数学分析为基础的许多其它课程中,它也是研究问题的重要手段,经常发挥着举足轻重的作用.在本节中,我们将以它为核心,介绍微分学中与其有联系的几个基本定理.

极值与 Fermat 引理

前面已经说过,Newton 在研究物体运动和 Leibniz 在研究曲线的几何性质的过程中,分别独立地发现了微分和导数.但事实上,微分的思想可追溯到 Fermat 对极值的研究.

定义 5.1.1　设 $f(x)$在(a,b)有定义,若存在(a,b)中的某一点 x_0 的一个邻域 $O(x_0,\delta)\subset(a,b)$,使得$\forall x\in O(x_0,\delta)$,都有

$$f(x)\leqslant f(x_0),$$

则称 x_0 是 $f(x)$在(a,b)中的一个**极大值点**,$f(x_0)$称为相应的**极大值**(图 5.1.1).

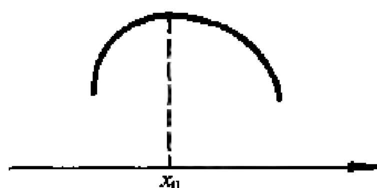


图 5.1.1

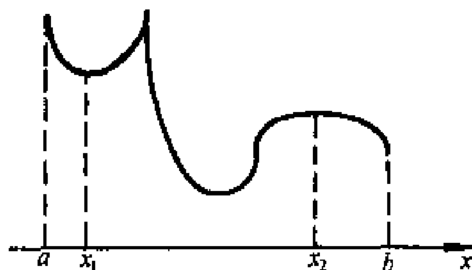


图 5.1.2

完全类似地可以定义 $f(x)$的**极小值点**和**极小值**.(在不需要区分极大和极小的时候,我们将其统称为**极值点**和**极值**.)

从以上的定义可以知道:

1. 所谓"极大"和"极小"只是指在 x_0 附近的一个局部范围中的函数值的大小关系,因面是一个局部性质.

2. 在同一个区间内,$f(x)$的一个极小值完全有可能大于某些(甚至全部的)极大值.(图 5.1.2 中的 x_1 是极小值点,x_2 是极大值点.)

3. $f(x)$在同一个区间中极值点可以有无数个. 如在(0,1)中考虑函数

$$f(x)=\sin\frac{1}{x},$$

则 $x=\frac{2}{(2n+1)\pi}(n=0,1,2,\cdots)$都是 $f(x)$的极值点,当 n 为偶数时为极大值点,而当 n 为奇数时为极小值点.

4. 对极值点的定义并不牵涉到函数的其它性质,如连续、可微等. 比如,读者容易证明,对于 Riemann 函数

$$R(x)=\begin{cases}\frac{1}{p}, & \text{当 } x=\frac{q}{p} \text{ 为(0,1) 上的既约分数},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为(0,1) 上的无理数},\end{cases}$$

(0,1)中的每个有理点都是它的极大值点,每个无理点都是它的极小值点,而我们已经知道,Riemann 函数在每个有理点都不连续,在每个无理点都连续.

著名天文学家 Kepler 在研究行星运动时已经观测到,行星运行到它的椭圆轨道长轴的端点附近时,切向加速度会趋近于零. Fermat 将这一事实上升到理论,分析了一个函数的增量在极值点附近的变化情况,进而得到了寻找函数极值的一种方法. 他的理论经后人完善,可以严格地表述为如下的定理.

定理 5.1.1(Fermat 引理) 设 x_0 是 $f(x)$的一个极值点,且 $f(x)$在 x_0 处导数存在,则

$$f'(x_0)=0.$$

证 不妨设 x_0 是 $f(x)$的极大值点.

因为 $f(x)$在 x_0 可微,所以

$$f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=f'(x_0).$$

由极大值点的定义,在 x_0 的某个邻域 $O(x_0,\delta)$上 $f(x)$有定义,且满足

$$f(x)\leqslant f(x_0),$$

于是

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant 0$$

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant 0$$

因此

$$0\geqslant f'_+(x_0)=f'(x_0)=f'_-(x_0)\geqslant 0,$$

即

$$f'(x_0)=0.$$

同理可证 x_0 为极小值点的情况.

证毕

Fermat 引理的几何意义非常明确:若曲线 $y=f(x)$在其极值点处可微,或者说在该点存在唯一切线,那么这条切线必定平行于 x 轴.

容易看出,当 $f(x)$可微时,条件“$f'(x_0)=0$”只是 $f(x)$存在极值点的必要条件,而并非是充分条件,这只要考虑函数 $f(x)=x^3$ 在 $x_0=0$ 处的情况就可以了.

Rolle 定理

由 Fermat 引理能够推出如下的 Rolle 定理,在某种意义上,它可以看成可微函数存在极值点的一个充分条件.

定理 5.1.2(Rolle 定理) *设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$连续,在开区间(a,b)可微,且 $f(a)=f(b)$,则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得*

$$f'(\xi)=0.$$

证 由闭区间上连续函数的性质,存在 $\xi,\eta\in[a,b]$,满足

$$f(\xi)=M$$

和

$$f(\eta)=m,$$

M 和 m 分别是$f(x)$在$[a,b]$上的最大值和最小值.现分两种情况:

(1)$M=m$.此时 $f(x)$在$[a,b]$上恒为常数,结论显然成立.

(2)$M>m$.这时 M 和 m 中至少有一个与 $f(a)$(也即 $f(b)$)不相同,不妨设

$$M=f(\xi)>f(a)=f(b),$$

因此 $\xi\in(a,b)$显然是极大值点,由 Fermat 引理

$$f'(\xi)=0.$$

证毕

Rolle 定理的几何意义也很清楚;满足定理条件的函数一定在某一点存在一条与 x 轴平行,也即与曲线的两个端点的连线平行的切线(图 5.1.3).

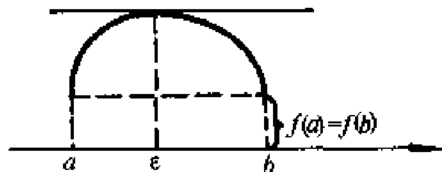


图 5.1.3

定理的条件是充分的.可以举出例子,即使定理的三个条件都不满足,函数仍然可以存在水平的切线(留作习题),但是,三个条件中的任意一个不满

足，都可能导致定理结论不成立. 如以下三个函数：

$$f_1(x)=\begin{cases}x, & x\in[0,1),\\ 0, & x=1;\end{cases}$$
$$f_2(x)=|1-2x|,\quad x\in[0,1];$$
$$f_3(x)=x,\quad x\in[0,1],$$

容易验证，$f_1(x)$在闭区间$[0,1]$不连续，$f_2(x)$在开区间$(0,1)$不可微，而$f_3(x)$不满足$f_3(a)=f_3(b)$，尽管它们都分别满足其它两个条件，但它们在$(0,1)$中都不存在水平切线.

实际中，Rolle 定理多被用来讨论一个函数及其导数在某个范围中的实零点问题.

例 5.1.1 如下定义的函数：

$$p_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n,\quad n=0,1,2,\cdots$$

被称为 **n 次 Legendre 多项式**，证明 $p_n(x)$在$(-1,1)$上恰有 n 个不同的实根.

证 由高阶导数的 Leibniz 公式，容易知道，函数

$$q_{2n-m}(x)\equiv\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}(x^2-1)^n,\quad m=0,1,2,\cdots,n-1$$

中都含有(x^2-1)因子，也就是说，当 $m<n$ 时，$q_{2n-m}(x)$都有实根 -1 和 1.

当 $m=0$ 时，$q_{2n}(x)=(x^2-1)^n$，因此 -1 和 1 是它仅有的两个相异的根. 由 Rolle 定理，$q_{2n-1}(x)=q'_{2n}(x)$在$(-1,1)$中必有一个根，我们将它记为 x_11.

这样，$q_{2n-1}(x)$在$[-1,1]$上就至少有三个相异的根：-1、x_{11}和 1. 再由 Rolle 定理，$q_{2n-2}(x)=q'_{2n-1}(x)$在$(-1,x_{11})$和$(x_{11},1)$中至少各有一个根，我们将它们分别记为 x_{21}和 x_{22}，则 $q_{2n-2}(x)$在$[-1,1]$上就至少有了四个相异的根：$-1,x_{21},x_{22}$和 1.

反复使用 Rolle 定理，运用数学归纳法可以证明，$q_{2n-m}(x)$在$[-1,1]$上至少有 $m+2$ 个相异的根 $-1,x_{m1},x_{m2},\cdots,x_{mn}$和 $1(m=0,1,2,\cdots,n-1)$.

令 $m=n=1$，即知 $q_{n+1}(x)$在$[-1,1]$上至少有 $n+1$ 个相异的根，最后再用一次 Rolle 定理，便知 $q_n(x)$在$(-1,1)$中至少有 n 个根.

由于 $q_n(x)$是 n 次多项式，它在$(-1,1)$中至多只能有 n 个根，因此，$q_n(x)$在$(-1,1)$中恰有 n 个根.

因为 $p_n(x)$与 $q_n(x)$只相差一个系数，所以以上结论对于 $p_n(x)$也是成立的.

证毕

以后我们会看到,Legendre 多项式在很多场合都扮演着举足轻重的角色.

Lagrange 中值定理

我们再来分析一下 Rolle 定理的三个条件.对于讨论 $f(x)$在(a,b)中的某些点上的切线性质来说,要求 $f(x)$在$[a,b]$上连续且在(a,b)上可微看来是必不可少的.那么在保留这两个条件的前提下,若第三个条件即 $f(a)=f(b)$不成立,将会得出什么样的结果呢?

我们从几何上来直观地看一下(图 5.1.4).从几何上讲,$f(a)=f(b)$只表示曲线 $y=f(x)$在$[a,b]$上的那一段的两个端点与 x 轴的距离相等.因此,若 $f(a)\neq f(b)$,我们保持原点不动,适当旋转坐标轴,建立新的坐标系 $Ox'y'$,使新的 x'轴平行于$(a,f(a))$和$(b,f(b))$的连线.在新的坐标系下,这段曲线一般也仍满足 Rolle 定理的全部条件,因此,存在着一点 $x'=\eta$,曲线在该点处的切线平行于 x'轴,也即与$(a,f(a))$和$(b,f(b))$的连线平行.

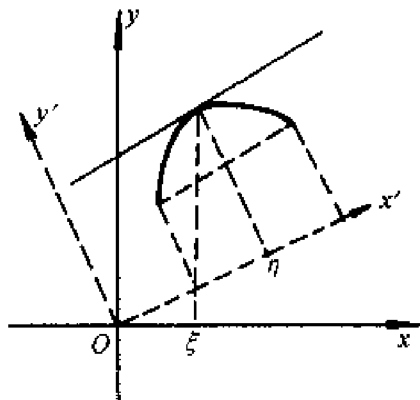


图 5.1.4

设这一切点在原坐标系中的自变量的值为 $x=\xi$,因为两条直线的平行性质与坐标系的选取无关,所以回到原坐标系来看,曲线在 $x=\xi$ 处的切线仍然与$(a,f(a))$和$(b,f(b))$的连线平行,或者说,曲线在 $x=\xi$ 处的切线的斜率 $f'(\xi)$与$(a,f(a))$和$(b,f(b))$的连线的斜率

$$\tan\theta=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

相等,这正是著名的 Lagrange 中值定理的结论,下面我们从分析上来严格地叙述和证明它.

定理 5.1.3(Lagrange 中值定理) *设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,在开区间(a,b)上可微,则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得*

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

证 作辅助函数

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \quad x \in [a,b],$$

由于函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$连续,在开区间(a,b)可微,因此函数 $\varphi(x)$也在闭区间$[a,b]$连续,在开区间(a,b)可微,并且有

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0.$$

于是由 Rolle 定理,至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $\varphi'(\xi)=0$.对 $\varphi(x)$的表达式求导并令 $\varphi'(\xi)=0$,整理后便得到

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

证毕

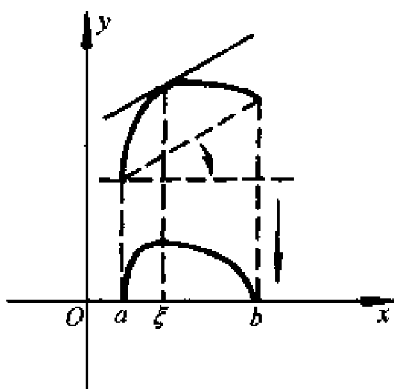


图 5.1.5

由于$(a,f(a))$和$(b,f(b))$的连线的方程为

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a),$$

因此很容易理解辅助函数 $\varphi(x)$的几何意义,它与我们前面所讲的建立新的坐标系的思想有着异曲同工之妙,其区别仅在于,前面讲的是保持曲线不动,通过坐标系的运动(以原点为中心的旋转)使曲线的端点连线与坐标轴平行;面这里的证明是采取了坐标系不动,让曲线作变动(平移、旋转、压缩等)来达到同一目的.

作辅助函数是证明数学命题的重要方法之一.就证明 Lagrange 中值定理来讲,作出满足 Rolle 定理条件的辅助函数的途径有很多,比如,设函数$\psi(x)$ $(x\in[a,b])$表示曲线上的三个点$(a,f(a))$、$(b,f(b))$和$(x,f(x))$所构成的三角形的面积,则显然有

$$\psi(a) = \psi(b) = 0.$$

同时,容易证明,$\psi(x)$亦是一个在$[a,b]$连续,在(a,b)可微的函数,因此

$\psi(x)$满足 Rolle 定理所有条件，由此同样可导出 Lagrange 中值定理.(具体过程留作习题.)

Lagrange 中值定理的结论

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},\quad \xi\in(a,b)$$

一般称为 **Lagrange 公式**.

由于 $\xi\in(a,b)$，因而总可以找到某个 $\theta\in(0,1)$，使

$$\xi=a+\theta(b-a),$$

所以 Lagrange 公式也可以写成

$$f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a),\quad \theta\in(0,1),$$

若记 a 为 x，$b-a$ 为 Δx，则上式又可以表示为

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x,\quad \theta\in(0,1),$$

这是 Lagrange 公式最常用的两种形式.(最后一种形式即为

$$\Delta y=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x,$$

它给出了自变量、因变量的差分和函数的导数值的精确关系，请读者将它与公式

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+o(\Delta x)$$

加以比较.)

与 Rolle 定理相仿，Lagrange 中值定理的任一个条件不满足时，定理结论就有可能不成立；但是在定理的所有条件都不满足的情况下，定理结论仍然可以成立.作为习题，请读者自行构造出两方面的相应例子.

用 Lagrange 中值定理讨论函数性质

由 Lagrange 中值定理可以得出几个重要的推论.

推论 1 若 $f(x)$在(a,b)可微且有 $f'(x)\equiv 0$，则 $f(x)$在(a,b)上恒为常数.

证 对(a,b)中的任意两点 x_1 和 x_2，不妨设 $x_1<x_2$，在$[x_1,x_2]$中用 Lagrange 中值定理，即知存在 $\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$，使得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1),$$

由条件 $f'(\xi)=0$，便有

$$f(x_1)=f(x_2),$$

由 x_1 和 x_2 的任意性，就得到

$$f(x)=C,\qquad \forall x\in(a,b).$$

证毕

读者不难将这个结论推广到闭区间的情况.

由推论 1 还可以引伸出：若 $f(x)$和 $g(x)$均在(a,b)可微，且 $f'(x)=$

$g'(x)$,则 $f(x)$和 $g(x)$在(a,b)中至多相差一个常数,即

$$f(x)=g(x)+C.$$

推论 1 说的是在(a,b)中导数为零时的情况,下面来看看导数在(a,b)中保号时,函数所具有的性质.

推论 2(一阶导数与单调性的关系) 设函数 $f(x)$在$[a,b]$连续,在(a,b)可微,且在(a,b)中有 $f'(x)\geqslant 0$,则 $f(x)$在$[a,b]$单调增加.

特别地,若此时在(a,b)中有 $f'(x)>0$,则 $f(x)$在$[a,b]$严格单调增加.

证 对$[a,b]$中的任意两点 $x_1<x_2$,在$[x_1,x_2]$中用 Lagrange 中值定理,即知存在 $\xi\in(x_1,x_2)$,使得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1),$$

由于 $x_2-x_1>0$,因此 $f(x_2)-f(x_1)$与 $f'(\xi)$同号.所以,当 $f'(\xi)\geqslant 0$ 或 $f'(\xi)>0$ 时,相应地分别有 $f(x_2)-f(x_1)\geqslant 0$ 或 $f(x_2)-f(x_1)>0$,由 x_1、x_2 在$[a,b]$中的任意性,即知 $f(x)$在$[a,b]$单调增加或严格单调增加.

证毕

对推论 2 作几点说明:

1. 若将推论 2 后半部分的条件减弱为"在(a,b)中除了有限个点有 $f'(x)=0$ 之外,都有 $f'(x)>0$"时,结论依然成立.

2. 用与证明 Fermat 引理类似的方法,可以证明推论 2 的前半部分的逆命题:"设 $f(x)$在$[a,b]$上单调增加,若 $f(x)$在(a,b)可微,则 $f'(x)\geqslant 0$".即在可微的条件下,$f(x)$**单调增加的充分必要条件是** $f'(x)\geqslant 0$.(但要注意的是,很容易举出例子说明,$f'(x)>0$ 只是 $f(x)$严格单调增加的充分条件而非必要条件.)

3. 类似地可以得出 $f'(x)\leqslant 0$(或 $f'(x)<0$)与 $f(x)$在$[a,b]$单调减少(或严格单调减少)的关系.

上述结论作为习题留给读者自证.

在给出推论 3 之前我们先引出函数凸性的概念.

让我们回忆一下函数 $y=e^x$ 和 $y=\ln x$ 的图象.这两个函数在第一象限都是严格单调增加的,它们的图象都是凸出来的,但 $y=e^x$ 凸出的方向朝下,而 $y=\ln x$ 凸出的方向朝上.推而广之,若函数 $f(x)$在$[a,b]$的图象类似于 $y=e^x$ 形状,我们就称 $f(x)$在$[a,b]$是凸的;若图象类似于 $y=\ln x$ 这种形状,则称 $f(x)$在$[a,b]$是凹的.比如 $y=\sin x$ 在$[0,\pi]$上是凹的,而在$[\pi,2\pi]$上则是凸的;$y=x^a$ 在第一象限当 $a>1$ 时是凸的,当 $0<a<1$ 时则是凹的,如此等等.

那么如何来严格定义函数的凸性呢?以凸函数为例,仔细观察函数图象就会发现,在$[a,b]$中任意取不同两点 x_1 和 x_2,过$(x_1,f(x_1))$和

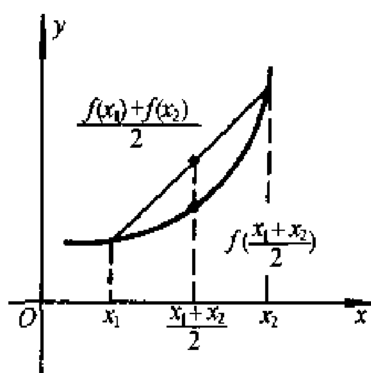


图 5.1.6

$(x_2,f(x_2))$的直线段的中点$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right)$总是在曲线上相应点$\left(\frac{x_1+x_2}{2},f(\frac{x_1+x_2}{2})\right)$的上方.

定义 5.1.2 设函数 $f(x)$在$[a,b]$定义,若对$[a,b]$中的任意不同的两点 x_1 和 x_2,都有

$$f(\frac{x_1+x_2}{2})\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

则称 $f(x)$在$[a,b]$是**凸**的.

若不等号严格成立,则称 $f(x)$在$[a,b]$是**严格凸**的.

类似地可以给出**凹**和**严格凹**的定义.

推论 3(二阶导数与凸性的关系) 设函数 $f(x)$在$[a,b]$连续,在(a,b)二阶可导,则 $f(x)$在$[a,b]$是凸的充分必要条件是$\forall x\in(a,b)$有 $f''(x)\geqslant 0$.

特别地,若此时在(a,b)中有 $f''(x)>0$,则 $f(x)$在$[a,b]$是严格凸的.

证 必要性.因为 $f(x)$在$[a,b]$是凸的,由定义可推出,$\forall x\in(a,b)$和$\Delta x>0$,若 $x+\Delta x$ 和$x-\Delta x$ 都属于(a,b),则有

$$f(x+\Delta x)-f(x)\geqslant f(x)-f(x-\Delta x).$$

$\forall x_1,x_2\in(a,b)$,不妨设 $x_1<x_2$,令 $\Delta x_n=\frac{x_2-x_1}{n}$,反复利用上式,就得到

$$\begin{aligned}f(x_2)-f(x_2-\Delta x_n)&\geqslant f(x_2-\Delta x_n)-f(x_2-2\Delta x_n)\\&\geqslant f(x_2-2\Delta x_n)-f(x_2-3\Delta x_n)\\&\geqslant\cdots\\&\geqslant f(x_2-(n-1)\Delta x_n)-f(x_2-n\Delta x_n)\\&=f(x_1+\Delta x_n)-f(x_1),\end{aligned}$$

因此有

$$\frac{f(x_2+(-\Delta x_n))-f(x_2)}{(-\Delta x_n)} \geqslant \frac{f(x_1+\Delta x_n)-f(x_1)}{\Delta x_n}.$$

令 $n\to\infty$ 即 $\Delta x_n\to 0$,由于 $f(x)$在 x_1 和 x_2 可微,便得到

$$f'(x_2) \geqslant f'(x_1),$$

即 $f'(x)$在$[a,b]$单调增加.

由 $f(x)$在(a,b)二阶可导即 $f'(x)$在(a,b)可微以及推论 2,便知

$$f''(x) \geqslant 0, \qquad \forall x \in (a,b).$$

充分性.对$[a,b]$中的任意两点 $x_1<x_2$ 和它们的中点 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$,在$[x_1,x_0]$和$[x_0,x_2]$中分别用 Lagrange 中值定理,即有 $\eta_1\in(x_1,x_0)$和 $\eta_2\in(x_0,x_2)$,使得

$$f(x_0)-f(x_1)=f'(\eta_1)\cdot d,$$
$$f(x_2)-f(x_0)=f'(\eta_2)\cdot d.$$

这里 $d=x_2-x_0=x_0-x_1$ 是区间$[x_1,x_2]$长度的一半.

将两式相减,有

$$f(x_2)+f(x_1)-2f(x_0)=[f'(\eta_2)-f'(\eta_1)]\cdot d.$$

因为 $f(x)$在(a,b)二阶可导,在区间$[\eta_1,\eta_2]\subset(a,b)$中对 $f'(x)$再用 Lagrange 中值定理,即知存在 $\xi\in(\eta_1,\eta_2)$,使得

$$[f'(\eta_2)-f'(\eta_1)]=f''(\xi)(\eta_2-\eta_1).$$

代入上式,利用在(a,b)中 $f''(x)\geqslant 0$(或 $f''(x)>0$)条件,整理后就有

$$\begin{aligned}&\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\\&=\frac{1}{2}[f'(\eta_2)-f'(\eta_1)]\cdot d\\&=\frac{1}{2}f''(\xi)(\eta_2-\eta_1)\cdot d\\&\geqslant 0 \quad (\text{或} >0),\end{aligned}$$

由定义,$f(x)$在$[a,b]$是凸的(或严格凸的).

证毕

类似地可以得出,如果 $f''(x)\leqslant 0$(或 $f''(x)<0$),则 $f(x)$在$[a,b]$是凹的(或严格凹的).

现在我们可以对函数 $y=e^x$ 和$y=\ln x$ 当$n\to+\infty$时函数值趋于无穷大的速率大相径庭有一点粗略的领会了:这两个函数当 $x>0$ 时都是严格单调增加,但 $y=e^x$ 是严格凸的,由推论 3,它的一阶导数也是严格单调增加的,因而函数值增加的速度随着 x 的增加而越来越快;而 $y=\ln x$ 却是严格凹的,

因此它的一阶导数是严格单调减少的，所以尽管它的函数值仍保持严格单调增加的趋势，但速度却随着 x 的增加而越来越慢了.

Lagrange 中值定理及以上几个推论都有很重要的实用意义，我们来看几个例子.

例 5.1.2　证明不等式

$$|\arctan a - \arctan b| \leqslant |a - b|.$$

证　显然，$f(x)=\arctan x$ 在任意区间$[a,b]$上满足 Lagrange 中值定理条件，所以，存在 $\xi\in(a,b)$，满足

$$|\arctan a - \arctan b| = |f'(\xi)|\cdot|a - b| = \left|\frac{1}{1+\xi^2}\right|\cdot|a - b|,$$

即

$$|\arctan a - \arctan b| \leqslant |a - b|.$$

证毕

例 5.1.3　证明恒等式

$$\arctan\frac{1+x}{1-x} - \arctan x = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}, & x < 1, \\ -\dfrac{3\pi}{4}, & x > 0. \end{cases}$$

证　令 $f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}-\arctan x$，则当 $x\neq1$ 时，有

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)' - \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{1+\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\frac{2}{(1-x)^2} - \frac{1}{1+x^2} \\ &= 0, \end{aligned}$$

由推论 1，知在任何不含 $x=1$ 的区间，$\arctan\dfrac{1+x}{1-x}-\arctan x\equiv C$.

当 $x<1$ 时，令 $x=0$，即得到常数 $C=\dfrac{\pi}{4}$；当 $x>1$ 时，令 $x\to+\infty$，即得到常数 $C=-\dfrac{3\pi}{4}$，因此

$$\arctan\frac{1+x}{1-x} - \arctan x = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}, & x < 1, \\ -\dfrac{3\pi}{4}, & x > 1. \end{cases}$$

证毕

下面来看一个有趣的问题，它牵涉到两个最重要的无理数—— π 和 e.

例 5.1.4 判别 e^π 与 π^e 的大小关系.

我们考虑一般情况:设 a 和 b 是两个不同的正实数(不妨设 $a>b>0$),在什么条件下成立 $a^b>b^a$?

两边取对数后再整理,即知上式等价于

$$\frac{\ln a}{a}>\frac{\ln b}{a},$$

所以,判别 a^b 与 b^a 的大小关系可以通过确定函数 $\frac{\ln x}{x}$ 的单调情况来得到.

解 记 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$,则

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}\begin{cases}<0, & x>e,\\ >0, & 0<x<e,\end{cases}$$

由推论 2,$f(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 严格单调减少.因此

$$\frac{\ln e}{e}>\frac{\ln \pi}{\pi},$$

即可判别出

$$e^\pi>\pi^e.$$

对于比较复杂的问题,有时需要求导多次方能奏效.

例 5.1.5 证明不等式

$$\sin x>x-\frac{x^3}{6}\quad(x>0).$$

我们来分析一下.要证明 $x>0$ 时 $f(x)=\sin x-x+\frac{x^3}{6}>0$,由于 $f(0)=0$,因此只要能证明 $f(x)$ 在 $x>0$ 严格单调增加,或者说 $f'(x)>0$ 就可以了.

对 $f(x)$ 求导,得到

$$f'(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2},$$

一下子仍无法判断是否一定有 $f'(x)>0$,但注意到 $f'(0)=0$,因此只要能证明 $f'(x)$ 在 $x>0$ 严格单调增加,或者说 $f''(x)>0$ 就可以了.由于

$$f''(x)=x-\sin x,$$

而 $x-\sin x>0$ 是我们在极限论中已知的结果,把这个过程倒退回去,就能证得结论.

证 令 $f(x)=\sin x-x+\frac{x^3}{6}$,则当 $x>0$ 时,有

$$f''(x)=[f'(x)]'=x-\sin x>0,$$

所以 $f'(x)$ 在 $x\geqslant 0$ 严格单调增加,即当 $x>0$ 时,有

$$f'(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}>f'(0)=0.$$

由此可知 $f(x)$在 $x\geqslant 0$ 也是严格单调增加的,这样,当 $x>0$ 时,便成立

$$f(x)=\sin x-x+\frac{x^3}{6}>f(0)=0.$$

证毕

例 5.1.6　证明不等式

$$a\ln a+b\ln b>(a+b)[\ln(a+b)-\ln 2],\qquad \forall a,b>0.$$

证　令 $f(x)=x\ln x$,则

$$f'(x)=\ln x+1,$$

$$f''(x)=\frac{1}{x}>0,\quad \forall x>0,$$

由推论 3,$f(x)$在$(0,\infty)$上严格凸,因而$\forall a,b>0$,都成立

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}>f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

也即

$$\frac{a\ln a+b\ln b}{2}>\frac{a+b}{2}\ln\frac{a+b}{2},$$

这就是要证明的不等式.

证毕

Cauchy 中值定理

最后,我们给出一个形式更加一般的中值定理.

定理 5.1.4(Cauchy 中值定理)　设 $f(x)$和 $g(x)$都在闭区间$[a,b]$上连续,在开区间(a,b)上可微,且$\forall x\in(a,b)$,$g'(x)\neq 0$.则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

显然,当 $g(x)=x$ 时,上式即为 Lagrange 公式,所以 Lagrange 中值定理是 Cauchy 中值定理的特殊情况.

但若换一个角度看问题,将 $f(t)$和 $g(t)$看成是 xy 平面上的某条光滑的曲线$y=F(x)$的参数方程,即 $y=F(x)$可以表示为

$$\begin{cases}x=g(t),\\ y=f(t),\end{cases}\quad t\in[a,b],$$

设 $y=F(x)$在参数 $t\in(a,b)$时点点可微,则由 Lagrange 中值定理的几何意义,应存在一点 $x=\eta$,其切线斜率 $F'(\eta)$等于曲线两端连线的斜率 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.设 $x=\eta$ 对应于$t=\xi\in(a,b)$,则由参数形式的微分公式,有

$$F'(\eta)=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)},$$

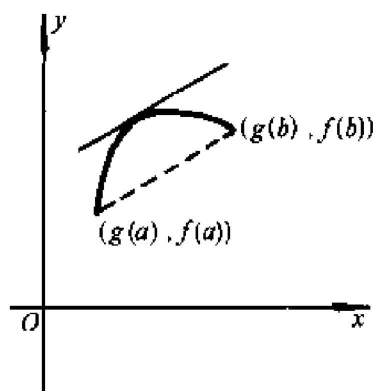


图 5.1.7

所以,Cauchy 中值定理也可以看成是 Lagrange 中值定理的参数表达形式.

可以采用与证明 Lagrange 中值定理相仿的方法来证明 Cauchy 中值定理,辅助函数的构造及其几何意义都是类似的(留作习题).

下面我们采用完全不同的思路来证明它.

证 由闭区间连续函数的性质,以及 $g(x)$在$[a,b]$连续,在(a,b)可微,且导数恒不为零,读者不难用反证法证明,$g(x)$在$[a,b]$严格单调(留作习题).不妨设 $g(x)$严格单调增加.

记 $g(a)=\alpha$, $g(b)=\beta$,由反函数存在定理和反函数导数存在定理,在$[\alpha,\beta]$上存在 $g(x)$的反函数 $g^{-1}(y)$, $g^{-1}(y)$在$[\alpha,\beta]$连续,在(α,β)可微,其导数

$$[g^{-1}(y)]'=\frac{1}{g'(x)},$$

并且 $g^{-1}(y)$在$[\alpha,\beta]$上也是严格单调增加的.

考虑$[\alpha,\beta]$上的复合函数 $F(y)=f(g^{-1}(y))$,由定理条件和以上讨论,即知 $F(y)$在$[\alpha,\beta]$上满足 Lagrange 中值定理条件,于是,存在 $\eta\in(a,b)$,使得

$$\begin{aligned}F'(\eta)&=\frac{F(\beta)-F(\alpha)}{\beta-\alpha}\\&=\frac{f(g^{-1}(\beta))-f(g^{-1}(\alpha))}{\beta-\alpha}\\&=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)},\end{aligned}$$

由 $g(x)$和 $g^{-1}(y)$的关系,在(a,b)中一定存在一点 ξ,满足 $g(\xi)=\eta$,于是

$$\begin{aligned}F'(\eta)&=\{f(g^{-1}(y))\}'_{y=\eta}\\&=\{f'(g^{-1}(y))\cdot[g^{-1}(y)]'\}_{y=\eta}\end{aligned}$$

$$= \left\{ f'(x) \cdot \frac{1}{g'(x)} \right\}_{x = g^{-1}(\eta) = \xi}$$

$$= \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

代入上式就得到了定理结论.

证毕

习　　题

1. 设 $f'_+(x_0)>0, f'_-(x_0)<0$,证明 x_0 是 $f(x)$的极小值点.

2. 举例说明,Rolle 定理的三个条件都不满足,函数仍然可以存在水平的切线.

3. 设函数 $f(x)$在$[a,b]$连续,在(a,b)可微,

(1)利用辅助函数

$$\psi(x) = \begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \end{vmatrix}$$

证明 Lagrange 中值定理;

(2)说明 $\psi(x)$的几何意义.

4. 举例说明:

(1)Lagrange 中值定理的任一个条件不满足时,定理结论就有可能不成立;

(2)Lagrange 中值定理的所有条件都不满足,定理结论仍然可以成立.

5. 设 $f(x)$在$[a,b]$上定义,且对任何实数 x_1 和 x_2,满足

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant (x_1 - x_2)^2,$$

证明 $f(x)$在$[a,b]$上恒为常数.

6. 用 Lagrange 公式证明不等式:

(1)$|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|$;

(2)$ny^{n-1}(x-y) < x^n - y^n < nx^{n-1}(x-y) \quad (n>1, x>y)$;

(3)$\dfrac{b-a}{b} < \ln\dfrac{b}{a} < \dfrac{b-a}{a} \quad (b>a>0)$;

(4)$e^x > 1 + x \quad (x>0)$.

7. 证明恒等式

(1)$\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}, \quad x \in [0,1]$;

(2)$3\arccos x - \arccos(3x - 4x^3) = \pi, \quad x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$;

(3)$2\arctan x+\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}=\pi,\quad x\in[1,+\infty)$.

8. 设函数 $f(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)可微，

(1)证明：若 $f(x)$在$[a,b]$上单调增加，则 $f'(x)\geqslant 0$.

(2)证明：若(a,b)中除有限个点有 $f'(x)=0$ 之外，都有 $f'(x)>0$，则 $f(x)$在$[a,b]$严格单调增加；同时举例说明，其逆命题不成立.

9. 证明不等式：

(1)$\dfrac{2}{\pi}x<\sin x<x,\quad x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$；　(2)$3-\dfrac{1}{x}<2\sqrt{x},\quad x>1$；

(3)$x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x,\quad x<0$；

(4)$\tan x+2\sin x>3x,\quad x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$；

(5)$\dfrac{1}{2^{p-1}}\leqslant x^p+(1-x)^p\leqslant 1,\quad x\in[0,1]\quad(p>1)$.

10. 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，$f(a)=f(b)=0$，且 $f'(a)\cdot f'(b)>0$，证明 $f(x)$在(a,b)至少存在一个零点.

11.(Darboux 定理)　设 $f(x)$在(a,b)可微，$x_1,x_2\in(a,b)$. 如果 $f'(x_1)f'(x_2)<0$，证明在 x_1 和 x_2 之间至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=0$.

12. 设 $f(x)$在$(a,+\infty)$可微，并且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$，证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

13. 设非线性函数 $f(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)可微，则在(a,b)至少存在一点 η，满足

$$|f'(\eta)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|,$$

并说明它的几何意义.

14. 证明不等式：

(1)$\dfrac{x^n+y^n}{2}\geqslant\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n,x,y>0,n>1$；　(2)$\dfrac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}},\quad x\neq y$.

15. 设函数 $f(x)$和 $g(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)可微，且 $\forall x\in(a,b)$，$g'(x)\neq 0$，利用辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)]$$

和

$$\psi(x)=\begin{vmatrix}g(x)&f(x)&1\\g(a)&f(a)&1\\g(b)&f(b)&1\end{vmatrix},$$

证明 Cauchy 中值定理，并说明 $\varphi(x)$和 $\psi(x)$的几何意义.

16. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可微，证明 (a,b) 内存在一点 ξ，使得

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} = (b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}.$$

17. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有 n 阶导数，且 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$，用 Cauchy 中值定理证明

$$\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} \quad (0<\theta<1).$$

§2 L'Hospital 法则

待定型极限和 L'Hospital 法则

在计算一个分式函数的极限时，常常会遇到分子分母同时趋向于零或无穷大(包括一个是无穷大量而另一个是无界变量)的情况，由于这时无法使用"商的极限等于极限的商"的法则，运算将遇到很大的困难.事实上，这时极限可能存在，也可能不存在.当极限存在时，极限的值也会有各种各样的可能，比如熟知的

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_n}, & n=m,\\ 0, & n<m,\\ \infty, & n>m\end{cases}$$

就是一个简单的例子.因而我们将这种类型的极限称为 $\frac{0}{0}$ **待定型**或 $\frac{\infty}{\infty}$ **待定型**，简称 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型.

待定型极限除了以上两种以外，还有 $0\cdot\infty$ 型、$\infty-\infty$ 型、∞^0 型、1^∞ 型、0^0 型等五种.但以后将会看到，后面的几种都可以化成前面两种类型，所以我们这里主要讨论如何求 $\frac{0}{0}$ 型和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限.

定理 5.2.1(L'Hospital 法则) *设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(a,a+d]$ 可导(d 是某个正常数)，且 $g'(x)\neq0$.若此时有*

$$\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a+}g(x)=0$$

或

$$\lim_{x\to a+}g(x)=\infty,$$

且 $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(可以是有限数或 ∞)，则成立

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

证 这里仅对 $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ 为有限数时来证明，当 A 为无穷大时的证明过程是类似的(留作习题).

先对 $\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\lim\limits_{x\to a+}g(x)=0$ 的情况进行证明.

由于函数在 $x=a$ 处的值与 $x\to a+$ 时的极限无关，因此可以补充定义

$$f(a)=g(a)=0$$

使得 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,a+d]$ 连续. 这样，经补充定义后的函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,a+d]$ 满足 Cauchy 中值定理的条件，因而 $\forall x\in(a,a+d)$，$\exists\xi\in(a,x)$，满足

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

当 $x\to a+$ 时显然有 $\xi\to a+$. 由于 $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，两端令 $x\to a+$，即有

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{\xi\to a+}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

下面对 $\lim\limits_{x\to a+}g(x)=\infty$ 时的情况加以证明.

记 x_0 是函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的公共的定义域中的任意一个常数，则当 $x\neq x_0$ 时，$\frac{f(x)}{g(x)}$ 可以改写为

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)}&=\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)}+\frac{f(x_0)}{g(x)}\\&=\frac{g(x)-g(x_0)}{g(x)}\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}+\frac{f(x_0)}{g(x)}\\&=\left[1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\right]\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}+\frac{f(x_0)}{g(x)}.\end{aligned}$$

于是，

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)}-A\right|&=\left|\left[1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\right]\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}+\frac{f(x_0)}{g(x)}-A\right|\\&\leqslant\left|1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\right|\cdot\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}-A\right|+\left|\frac{f(x_0)-Ag(x_0)}{g(x)}\right|.\end{aligned}$$

因为 $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$，所以 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\rho>0$，当 $0<x-a<\rho$ 时，

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-A\right|<\varepsilon.$$

取 $x_0=a+\frac{\rho}{2}$，由 Cauchy 中值定理，$\forall x\in(a,x_0)$，$\exists\xi\in(x,x_0)\subset(a,a+\rho)$ 满足

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

于是得到

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}-A\right|=\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-A\right|<\varepsilon.$$

又因为 $\lim\limits_{x\to a+}g(x)=\infty$,所以可以找到正数 $\delta<\frac{\rho}{2}$,当 $0<x-a<\delta$ 时,成立

$$\left|1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\right|<2,\qquad \left|\frac{f(x_0)-Ag(x_0)}{g(x)}\right|<\varepsilon.$$

综合上述,即知 $\forall\,\varepsilon>0,\exists\,\delta>0$,当 $0<x-a<\delta$ 时,

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-A\right|\leqslant\left|1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\right|\cdot\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}-A\right|+\left|\frac{f(x_0)-Ag(x_0)}{g(x)}\right|$$
$$<2\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon,$$

由定义,可得

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=A=\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

证毕

从定理的后半部分的证明过程可以知道,若当 $x\to a+$ 时 $g(x)\to\infty$,那么此时对 $f(x)$ 的变化趋势事实上没有任何要求.也就是说,这时无论 $f(x)$ 有无极限、有界无界,只要 $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在,L'Hospital 法则都将是有效的.所以尽管习惯上大家将它称作"$\frac{\infty}{\infty}$型",但实际上它的使用范围可以扩展为"$\frac{*}{\infty}$型"极限,"*"代表任意变化类型.

以上结论在 $x\to a-$,$x\to a$ 或是 $x\to\infty$(包括 $+\infty$ 和 $-\infty$)时也是成立的,请读者自证.

L'Hospital 法则给我们提供了求 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限的一条途径.

例 5.2.1　求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$.

解　这是 $\frac{0}{0}$ 型.

因为 $\frac{(1-\cos 2x)'}{(x^2)'}=\frac{2\sin x\cos x}{x}\to 2$(当 $x\to 0$ 时),由 L'Hospital 法则,就可以得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=2.$$

一般可以写成如下格式:

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos 2x)'}{(x^2)'}\\&=\lim_{x\to0}\frac{2\sin x\cos x}{x}\\&=2\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to0}\cos x\\&=2.\end{aligned}$$

这是个自变量趋于定值的例子,下面来看自变量趋于无穷大的情况,运算的步骤是完全相同的.

例 5.2.2 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\sin\dfrac{1}{x}}$.

解 由 L'Hospital 法则,

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\sin\dfrac{1}{x}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\dfrac{1}{1+x^2}}{\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}\\&=\frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\\&=1.\end{aligned}$$

若使用了 L'Hospital 法则之后,所得到的 $\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 仍是 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型,并且函数 $f'(x)$ 和 $g'(x)$ 依然满足定理 5.2.1 的条件,那么可以再次使用 L'Hospital法则,讨论 $\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f''(x)}{g''(x)}$ 的极限情况,依次类推,直到求出极限为止.

例 5.2.3 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\tan x}{x^3}$.

解 这是 $\dfrac{0}{0}$ 型,由 L'Hospital 法则,

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\tan x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-\sec^2x}{3x^2}\quad\left(\text{仍是}\frac{0}{0}\text{ 型,再用 L'Hospital 法则}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-2\sec^2x\tan x}{6x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos^3 x}\right)$$

$$= -\frac{1}{3}.$$

例 5.2.4 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^a}{e^{bx}}(a>0,b>0)$.

解 这是$\frac{\infty}{\infty}$型. 设$[a]^+=n$(记号$[x]^+$称为**向上取整**表示不小于 x 的最小整数),反复使用 L'Hospital 法则 n 次,即有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^a}{e^{bx}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{a\cdot x^{a-1}}{b\cdot e^{bx}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{a(a-1)\cdot x^{a-2}}{b^2\cdot e^{bx}}$$

$$= \cdots$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)}{x^{n-a}\cdot b^n\cdot e^{bx}}$$

$$= 0.$$

这说明当 $x\to+\infty$的时候,指数函数 $a^x(a>1)$与任何次数的幂函数 x^n 相比,都是更高阶的无穷大量. 同样我们可以导出,$\log_a^n x$ 与任何次数的幂函数 $x^d(d>0)$相比,都是更低阶的无穷大量.

· 可化为$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型的极限

前面已经指出,$0\cdot\infty$,型、$\infty-\infty$型、∞^0 型、1^∞型、0^0 型等类型的极限都可以化成$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型,下面对每一种类型举出一个例子.

(1)$0\cdot\infty$型可化成$\frac{1}{\infty}\cdot\infty$型,即$\frac{\infty}{\infty}$型.

例 5.2.5 求 $\lim\limits_{x\to 0+}x\ln x$.

解 这是 $0\cdot\infty$型,

$$\lim_{x\to 0+}x\ln x = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}.$$

由 L'Hospital 法则,

$$\text{上式} = \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0+}(-x)$$

$$= 0.$$

(2)$\infty-\infty$型可化成$\frac{1}{0}-\frac{1}{0}$型，再通分变成$\frac{0-0}{0}$型，即$\frac{0}{0}$型.

例 5.2.6 求 $\lim\limits_{x\to0+}\left(\cot x-\frac{1}{x}\right)$.

解 这是$\infty-\infty$型，先对它通分，

$$\lim_{x\to0+}\left(\cot x-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0+}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0+}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x},$$

现在它已被转变成$\frac{0}{0}$型了.

由 L'Hospital 法则，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0+}\left(\cot x-\frac{1}{x}\right)&=\lim_{x\to0+}\frac{(x\cos x-\sin x)'}{(x\sin x)'}\\&=\lim_{x\to0+}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{\sin x+x\cos x}\\&=\lim_{x\to0+}\frac{-x}{1+\frac{x}{\sin x}\cos x}\\&=0.\end{aligned}$$

(3)∞^0型、1^∞型、0^0型极限

$$\lim f(x)^{g(x)}$$

可以通过对数恒等式统一化成

$$\begin{aligned}&\lim e^{\ln f(x)^{g(x)}}\\&=\lim e^{g(x)\ln f(x)}\\&=e^{\lim g(x)\ln f(x)},\end{aligned}$$

这里的$\lim g(x)\ln f(x)$已成为$0\cdot\infty$型，于是便可用例 5.2.5 所示的方法来求出极限.

例 5.2.7 求 $\lim\limits_{x\to0+}\ln^x\frac{1}{x}$.

解 这是∞^0型，

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0+}\ln^x\frac{1}{x}\\&=\lim_{x\to0+}e^{x\ln\ln\frac{1}{x}}\\&=e^{\lim\limits_{x\to0+}x\ln\ln\frac{1}{x}}.\end{aligned}$$

由 L'Hospital 法则，

$$\lim_{x\to 0+} x\ln\ln\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0+}\frac{\left(\ln\ln\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}$$

$$= \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{\ln\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0+}\frac{x}{\ln\frac{1}{x}}$$

$$= 0,$$

于是

$$\lim_{x\to 0+}\ln^x\frac{1}{x} = e^{\lim\limits_{x\to 0+} x\ln\ln\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

例 5.2.8　求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+}(\sin x)^{\tan x}$.

解　这是 1^∞ 型,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+}(\sin x)^{\tan x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} e^{\tan x\ln\sin x}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+}\tan x\ln\sin x}$$

由 L'Hospital 法则

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+}\tan x\ln\sin x$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+}\frac{(\ln\sin x)'}{(\cot x)'}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+}\frac{\cos x}{\sin x(-\csc^2 x)}$$

$$= 0,$$

于是

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+}(\sin x)^{\tan x} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+}\tan x\ln\sin x} = e^0 = 1.$$

例 5.2.9　求 $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$.

解　这是 0^0 型.

$$\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x},$$

由例 5.2.5,

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x = 0,$$

于是

$$\lim_{x\to 0+} x^x = e^{\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x} = e^0 = 1.$$

最后,指出使用 L'Hospital 法则时要注意的两个问题.

第一,当 $\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f(x)}{g(x)}$不是$\dfrac{0}{0}$型或$\dfrac{\infty}{\infty}$型时,不能使用 L'Hospital 法则,否则可能会造成错误.

例 5.2.10 求$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+\sin x}{1-\cos x}$.

解 这不是$\dfrac{0}{0}$型,也不是$\dfrac{\infty}{\infty}$型,它的极限为

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{1-\cos x} = \frac{1+\sin\frac{\pi}{2}}{1-\cos\frac{\pi}{2}} = 2.$$

若不问情况地贸然使用 L'Hospital 法则,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{1-\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x} = 0,$$

就会得出不正确的结果. 因此,每次使用 L'Hospital 法则之前都必须对极限的类型加以检验.

第二,L'Hospital 法则只告诉我们,对于$\dfrac{0}{0}$型或$\dfrac{\infty}{\infty}$型,当$\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在时,它的值等于$\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f(x)}{g(x)}$. 那么这是否意味着,当$\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$不存在时,$\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f(x)}{g(x)}$也不存在呢? 请看下面的例子.

例 5.2.11 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{x}$.

解 这是$\dfrac{\infty}{\infty}$型,但我们并不能根据当 $x\to\infty$ 时$\dfrac{(x+\cos x)'}{x'}=1+\sin x$ 的极限不存在,就错误地得出$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\cos x}{x}$也不存在的结论——事实上,显然有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x} = 1.$$

因此,$\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$不存在并不表示$\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f(x)}{g(x)}$本身存在或是不存在,它仅

仅意味着，此时不能使用 L'Hospital 法则，而应改用其他方法来讨论 $\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

习 题

1. 对于

$$\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=+\infty \text{ 或 } -\infty$$

的情况证明 L'Hospital 法则.

2. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$； (2) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln(\sin x)}{(\pi-2x)^2}$； (4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln(\tan 7x)}{\ln(\tan 2x)}$； (6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan 3x}{\tan x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot} x}$； (8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sec x-\cos x}$；

(9) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$； (10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-1}{x^2}$；

(11) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\ln x}$； (12) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\sin\dfrac{1}{x}}$；

(13) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot 2x$； (14) $\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{\frac{1}{x^2}}$；

(15) $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi-x)\tan\dfrac{x}{2}$； (16) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$；

(17) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}$； (18) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$；

(19) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$； (20) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$.

3. 说明不能用 L'Hospital 法则求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$； (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x^2+1)\sin x}{\ln\left(1+\sin\dfrac{\pi}{2}x\right)}$； (4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2}x+e^{2x}}{x}$.

4. 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x}, & x\neq0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

其中 $g(0)=0, g'(0)=0, g''(0)=10$. 求 $f'(0)$.

5. 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}, & x>0,\\ e^{-\frac{1}{2}}, & x\leqslant0\end{cases}.$$

在 $x=0$ 处的连续性.

§3 插值多项式和 Taylor 公式

插值多项式和余项

本节中我们用中值定理去研究用一个多项式近似代替一个复杂的函数时所产生的一些问题,进而导出极为重要的 Taylor 公式.

多项式是一类比较简单的函数.在理论上,如果能用多项式近似地代替某些复杂的函数去研究后者的某些性态,无疑会带来很大的方便.而在实际计算中,由于多项式只涉及加、减、乘三种运算,且人们已设计出了不少针对多项式的高效快速的算法,因此用多项式作为复杂函数的近似去参加运算也将有效地节省运算量.

自然,作为“替身”的多项式应与原来的函数近似得较好.所谓的“较好”当然可以有不同的定义,比如以后将会学到著名的 Weierstrass 逼近定理:闭区间上的连续函数可以用代数多项式一致逼近.但对于应用来说,最常见的要求是使多项式与原来的函数在某些指定的点上有相同的函数值乃至若干阶导数值,这样的多项式称为原来函数的插值多项式,它的一般提法如下:

定义 5.3.1 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内的 $m+1$ 个互异点 $x_0,x_1,\cdots,x_m$ 上的函数值和若干阶导数值 $f^{(j)}(x_i)$ $(i=0,1,2,\cdots,m,j=0,1,\cdots,n_i-1)$ 是已知的,这里

$$\sum_{i=0}^{m}n_i=n+1.$$

若存在一个 n 次多项式 $p_n(x)$，满足如下的**插值条件**

$$p_n^{(j)}(x_i)=f^{(j)}(x_i)\quad(i=0,1,2,\cdots,m,\quad j=0,1,2,\cdots,n_i-1),$$

则称 $p_n(x)$ 是 $f(x)$ 关于**插值结点**(一般就简称结点)$x_0,x_1,\cdots,x_m$ 的 n 次**插值多项式**，而

$$r_n(x)=f(x)-p_n(x)$$

称为**插值余项**.

例如，若在 x_0、x_1、x_2、x_3 等 4 个点处(即 $m=3$)，已知 $f(x)$ 的函数值和若干阶导数值如下表：

	x_0	x_1	x_2	x_3	m_j
$j=0$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	4
$j=1$	$f'(x_0)$	—	$f'(x_2)$	$f'(x_3)$	3
$j=2$	$f''(x_0)$	—	$f''(x_2)$	$f''(x_3)$	3
$j=3$	—	—	$f'''(x_2)$	—	1
n_i	3	1	4	3	$n+1=11$

这里，n_i 表示在点 x_i 处所知道的值的个数，而 m_j 表示已知 j 阶导数值的点的个数(为了叙述问题方便，当 $\max(n_i)\leqslant j\leqslant n+1$ 时，我们认为 $m_j=0$). 显然

$$\sum_{j=0}^{n+1}m_j=\sum_{i=0}^{m}n_i=n+1.$$

如果能找到一个 10 次多项式 $p_{10}(x)$，在这 4 个点处相应的 11 个值与上表相同，那么按定义 5.3.1，它就是 $f(x)$ 的 10 次插值多项式.

注意定义 5.3.1 并没有要求知道 $f(x)$ 的表达式，对于处理实际问题而言，这一点具有特别重要的意义. 这是因为在实际问题中，人们往往只能通过实验或统计的办法获得要考察的量在某些离散点上的值或是变化情况(例如，在天文观测中，一般只能在若干个离散的时刻测定日月星辰的位置)，用数学的语言来说，只能知道未知函数在某个点集上的函数值或一定阶的导数值，这时，用插值多项式近似代替这些函数进行分析、研究和计算，便成了解决问题的有力手段之一(有时甚至是唯一的途径).

自然，我们马上要问，用这样的 $p_n(x)$ 近似代替 $f(x)$，精确程度有多高，或者说，插值余项 $r_n(x)=f(x)-p_n(x)$ 的大小可以控制在一个怎样的范围内？

利用 Rolle 定理，读者很容易自行证明下述结果：

引理　设函数 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导，在 $[a,b]$ 内的 l_0 个不同的点上有 $g(x)=0$，同时在这 l_0 个点中的 l_1 个点上有 $g'(x)=0$，则 $g'(x)$ 在 $[a,b]$ 内至少有 l_0+l_1-1 个不同的零点.

下面导出一个重要的理论结果.

定理 5.3.1（插值多项式余项定理） 设 $f^{(n)}(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，$f^{(n+1)}(x)$ 在 (a,b) 存在，则 $\forall x\in(a,b)$，上述插值问题有余项估计

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{m}(x-x_i)^{n_i},$$

这里 ξ 是介于 $x_{\min}=\min(x_0,x_1,\cdots,x_m,x)$ 和 $x_{\max}=\max(x_0,x_1,\cdots,x_m,x)$ 之间的一个数（一般依赖于 x）.

证 设 x 是 (a,b) 中任一给定值. 当 x 恰为某个插值结点时，余项估计式两端均为 0，结论已经成立.

设 $x\neq x_i, i=0,1,2,\cdots,m$，记 $n+1$ 次多项式

$$\omega_{n+1}(t)=\prod_{i=0}^{m}(t-x_i)^{n_i},$$

作辅助函数

$$\varphi(t)=f(t)-p_n(t)-\frac{\omega_{n+1}(t)}{\omega_{n+1}(x)}[f(x)-p_n(x)],$$

（请读者将它与 Lagrange 中值定理证明中的辅助函数的形式加以比较.）则 $\varphi(t)$ 在任意 x_i 处的 j 阶导数值 $(j=0,1,\cdots,n_i-1)$ 为

$$\varphi^{(j)}(x_i)=f^{(j)}(x_i)-p_n^{(j)}(x_i)-\frac{\omega_{n+1}^{(j)}(x_i)}{\omega_{n+1}(x)}[f(x)-p_n(x)]=0;$$

此外，还有

$$\varphi(x)=f(x)-p_n(x)-\frac{\omega_{n+1}(x)}{\omega_{n+1}(x)}[f(x)-p_n(x)]=0.$$

所以，使 $\varphi(t)=0$ 的点的个数为 m_0+1，而使得 $\varphi^{(j)}(t)=0$ 的点的个数为 $m_j, j=1,\cdots,n+1$.

由引理，在区间 $[x_{\min},x_{\max}]$ 内，$\varphi'(t)$ 至少有 m_0+m_1 个互异的零点；$\varphi''(t)$ 至少有 $m_0+m_1+m_2-1$ 个互异的零点……. 用数学归纳法容易证明，当 $j\leqslant n+1$ 时，在区间 $[x_{\min},x_{\max}]\subset(a,b)$ 内，$\varphi^{(j)}(t)$ 至少有 $\sum\limits_{l=0}^{j}m_l-j+1$ 个互异的零点.

当 $j=n+1$ 时，

$$\sum_{l=0}^{n+1}m_l-(n+1)+1=\sum_{l=0}^{n+1}m_l-n=(n+1)-n=1,$$

所以，至少应有 1 个点 $\xi\in(x_{\min},x_{\max})$（请读者自己考虑，为什么这一点必定属于开区间），使得

$$\varphi^{(n+1)}(\xi)=0.$$

因为 $p_n(t)$ 是 n 次多项式，所以 $p_n^{(n+1)}(t)=0$，而 $\omega_{n+1}(t)$ 是 $n+1$ 次的首一

多项式(最高项系数为 1 的多项式),因此 $\omega_{n+1}^{(n+1)}(t)=(n+1)!$,于是便得到

$$0=\varphi^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)-\frac{(n+1)!}{\omega_{n+1}(x)}[f(x)-p_n(x)],$$

也即

$$r_n(x)=f(x)-p_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{m}(x-x_i)^{n_i}.$$

证毕

定理 5.3.2　满足上述插值条件的插值多项式存在且唯一.

证　插值多项式的存在性可利用构造法证明,参见下面的例子,此处从略.

设 $p_n(x)$ 和 $q_n(x)$ 都是满足插值条件的 n 次多项式,考虑 $p_n(x)-q_n(x)$. 由插值条件,x_i 是它的 m_i 重根,将 n_i 重根作为 n_i 个根,则它共有 $\sum_{i=0}^{m}n_i=n+1$ 个根. 但 $p_n(x)-q_n(x)$ 是不超过 n 次的多项式,由代数学基本定理,$p_n(x)-q_n(x)$ 只能恒为零,即

$$p_n(x)\equiv q_n(x),$$

唯一性得证.

证毕

Lagrange 插值多项式和 Taylor 公式

常用的插值多项式有多种类型,我们这里只介绍最重要的两种.

一、$n_0=n_1=\cdots=n_m=1,\quad m=n$

这时,$n+1$ 个插值条件均为函数值而不包括导数值,即 $p_n(x)$ 满足

$$p_n(x_i)=f(x_i),\quad i=0,1,2,\cdots,n,$$

由定理 5.3.1,它的插值余项为

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i),\quad \xi\in(x_{\min},x_{\max}).$$

下面我们用基函数法来具体构造这个多项式:如果能够找到一组 n 次多项式 $q_k(x)$, $k=0,1,2,\cdots,n$,满足

$$q_k(x_i)=\delta_{ik},$$

(这里

$$\delta_{ik}=\begin{cases}0, & i\neq k,\\ 1, & i=k\end{cases}$$

称为 **Kronecker** 记号,)则容易验证,

$$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}f(x_k)q_k(x)$$

就是满足条件的插值多项式(由定理 5.3.2,它也是唯一的). 函数$\{q_k(x)\}_{k=0}^n$称为**基函数**.

利用上面已定义过的 $n+1$ 次多项式 $\omega_{n+1}(x)$以及插值条件,基函数$\{q_k(x)\}_{k=0}^n$可取为

$$q_k(x)=\frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k)\omega'_{n+1}(x_k)}=\frac{\prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq k}}^n(x-x_i)}{\prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq k}}^n(x_k-x_i)},\quad k=0,1,2,\cdots,n,$$

于是我们就得到了 $f(x)$的 n 次插值多项式

$$p_n(x)=\sum_{k=0}^n\left[f(x_k)\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^n\frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}\right].$$

这被称为 **Lagrange 插值多项式**,它在近似计算中有着重要的作用.

例 5.3.1 用 $f(x)=\sqrt{x}$的二次 Lagrange 插值多项式计算$\sqrt{1.15}$的近似值.

解 取 $x_0=1,x_1=1.21,x_2=1.44$ 为插值结点,则函数 $f(x)=\sqrt{x}$的相应的函数值为$f(x_0)=1,f(x_1)=1.1,f(x_2)=1.2$,于是,由 Lagrange 插值公式

$$\begin{aligned}&f(x)\approx p_2(x)\\&=1\cdot\frac{(x-1.21)(x-1.44)}{(1-1.21)(1-1.44)}+1.1\cdot\frac{(x-1)(x-1.44)}{(1.21-1)(1.21-1.44)}\\&\quad+1.2\cdot\frac{(x-1)(x-1.21)}{(1.44-1)(1.44-1.21)}\\&\approx-0.094\,108\,789x^2+0.684\,170\,901x+0.409\,937\,888,\end{aligned}$$

将 $x=1.15$ 代进去,便得到$\sqrt{1.15}$的近似值

$$\sqrt{1.15}\approx p_2(1.15)=1.072\,275\,51,$$

它与准确值的差的绝对值(称为**绝对误差**)约为 1.0×10^{-4},而由插值余项估计公式,其误差约为

$$|r_n(1.15)|=\left|\frac{1}{16}\frac{(x-1)(x-1.1)(x-1.2)}{\xi^2\sqrt{\xi}}\right|\leqslant2.77\times10^{-4},$$

可见其与理论结果非常吻合.

二、$n_0=n+1,\quad m=0$

这时,插值结点只剩下了一个 x_0,而 $n+1$ 个插值条件成了这一点上的各阶导数值,即 $p_n(x)$满足

$$p_n^{(j)}(x_0)=f^{(j)}(x_0),\quad j=0,1,2,\cdots,n.$$

考虑 k 次多项式

$$q_k(x)=\frac{(x-x_0)^k}{k!},\qquad k=0,1,2,\cdots,n,$$

则显然有

$$q_k^{(j)}(x_0)=\delta_{jk},$$

于是它们构成了一组基函数,作

$$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}f^{(k)}(x_0)q_k(x),$$

易知 $p_n(x)$就是满足条件的插值多项式.

将上述表达式代入 $f(x)=p_n(x)+r_n(x)$,并利用定理 5.3.1 结果,便得到了如下的极其重要的结论.

定理 5.3.3(带 Lagrange 余项的 Taylor 公式) 设 $f(x)$在 x_0 的某个邻域有 $n+1$ 阶导数存在,则对于该邻域中的任一点 x,成立

$$\begin{aligned}f(x)&=p_n(x)+r_n(x)\\&=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3\\&\quad+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x),\end{aligned}$$

余项 $r_n(x)$满足

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\xi\text{ 在 }x\text{ 和 }x_0\text{ 之间}.$$

上述公式称为 $f(x)$在 $x=x_0$ 处的 **Taylor 公式**,它的前 $n+1$ 项组成的多项式 $p_n(x)$称为 $f(x)$的 n 次 **Taylor 多项式**,余项形式

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

(ξ 在 x 和 x_0 之间)称为 **Lagrange 余项**.

特别地,当 $n=0$ 时,上式成为

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0),$$

ξ 在 x 和 x_0 之间,这恰为 Lagrange 中值定理的结果.所以,Taylor 公式可以看成是 Lagrange 中值定理的推广.

除了上述的 Lagrange 形式之外,Taylor 公式的余项还有其它多种表示方式.

定理 5.3.4(带 Peano 余项的 Taylor 公式) 设 $f(x)$在 x_0 有 n 阶导数,则存在 x_0 的一个邻域,对于该邻域中的任一点,成立

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x),$$

余项 $r_n(x)$满足

$$r_n(x)=o((x-x_0)^n).$$

这里的余项形式 $r_n(x)=o((x-x_0)^n)$称为 **Peano 余项**. 显然,当 $x\to x_0$ 时,满足 Lagrange 余项蕴涵着满足 Peano 余项,即前者的结论强于后者. 但采用 Peano 余项时,对 $f(x)$的要求也比采用 Lagrange 余项时稍弱一些.

定理的证明留给读者作为练习(习题 5).

实际使用时,我们经常将 Taylor 公式写成

$$f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x)\Delta x+\frac{f''(x)}{2!}\Delta x^2+\frac{f'''(x)}{3!}\Delta x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\Delta x^n+$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(x+\theta\Delta x)}{(n+1)!}\Delta x^{n+1},\quad \theta\in(0,1)\qquad(\text{带 Lagrange 余项})$$

或是

$$f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x)\Delta x+\frac{f''(x)}{2!}\Delta x^2+\frac{f'''(x)}{3!}\Delta x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\Delta x^n+$$

$$+o(\Delta x^n)\qquad\qquad(\text{带 Peano 余项})$$

的形式.

例 5.3.2 用 $f(x)=\sqrt{x}$的二次 Taylor 多项式计算$\sqrt{1.15}$的近似值,并将结果与例 5.3.1 相比较.

解 由于

$$f(x)=\sqrt{x},\qquad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},\qquad f''(x)=-\frac{1}{4x\sqrt{x}},$$

所以

$$f(1)=1,\qquad f'(1)=\frac{1}{2},\qquad f''(1)=-\frac{1}{4}.$$

代入 Taylor 公式并取 $n=2$,则得到

$$\sqrt{x}\approx p_2(x)=1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2$$

$$=-\frac{1}{8}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{3}{8},$$

于是可算出

$$\sqrt{1.15}\approx p_2(1.15)=1.072\ 187\ 5,$$

它与准确值$\sqrt{1.15}=1.072\ 380\ 53\cdots$相比,绝对误差约为 1.9×10^{-4},而此时的余项估计为

$$|r_n(1.15)|=\left|\frac{1}{16}\frac{0.15^3}{\xi^2\sqrt{\xi}}\right|\leqslant 2.1\times10^{-4},$$

与理论结果也吻合得很好.

下面对 n 次 Lagrange 插值多项式和 Taylor 多项式的性质作一简单比较.

在对函数的某些形态进行理论分析(尤其是在某个定点的附近)时,Taylor 公式大有用武之地,我们将在下面一节着重讨论与之有关的一些问题.今后,我们将会越来越深刻地认识到,Taylor 公式是最有力的数学工具之一,在数学的各个分支中得到广泛的使用,其作用和影响是 Lagrange 插值多项式所不可同日而语的.

但是,从近似计算角度来说,Taylor 多项式的效果往往是局部的.因此其一般仅对 x_0 附近的 x 有较高的精度,计算效果随着 x 远离 x_0 急剧变坏;而用 Lagrange 插值多项式计算时,对 x 的要求一般比 Taylor 多项式要"宽容"些.例如对于 $\sqrt{1.5}$,用例 5.3.1 中的 Lagrange 插值多项式算得的近似值约为 1.224 450,用例 5.3.2 中的 Taylor 多项式算得的近似值约为 1.242 187 5,而精确值是

$$\sqrt{1.5} = 1.224\,744\cdots.$$

此外,除了一些非常简单的函数之外,求 $f(x)$ 的高阶导数是一件令人望而生畏的工作,要得到 $f(x)$ 的各阶导数的统一表达式大多是可望而不可及的事.尽管现在已有了一些如 TAYLOR、GRADIENT 等符号的计算软件以及 MATHEMATICA 等计算机数学系统,可以自动完成大部分常见函数求任意阶导数的工作,但其计算量极大.而 Lagrange 插值多项式的紧凑形式

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\left[f(x_k)\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}\right]$$

却很容易在计算机上实现,计算效率要好得多.

更重要的是,对于函数值只分布在若干个离散点上的情况(这在实际问题中大量存在),Taylor 公式将是一筹莫展,而这正是 Lagrange 插值多项式最能施展身手的地方,下一章中要学习的数值积分公式就是典型的例子.

总而言之,这两种极端情况的插值多项式——一个取尽可能多的点,一个取尽可能高阶的导数——各有特点,在理论和实际中各主司一职而又相辅相成,都是我们解决问题的重要工具.

(附带指出,为了更方便地解决某些特殊的问题,在 $n+1$ 个点上满足

$$p_n(x_i) = f(x_i),\quad i = 0,1,2,\cdots,n$$

的 n 次多项式还可以表示为不同于 Lagrange 插值多项式的其它形式,而由定理 5.3.2,这些不同形式实际上表示的是同一个多项式.这里统称为"Lagrange 插值多项式",不再加以区分了.)

习　题

1. 设 $f(x)=\sqrt[3]{x}$,取结点为 $x=1$、1.728、2.744,求 $f(x)$ 的二次插值多项式 $p_2(x)$ 及其余项的表达式;计算 $p_2(2)$($\sqrt[3]{2}=1.259\,921\,0\cdots$).

2. 设 $f(x)=2^x$，取结点为 $x=-1$、0、1，求 $f(x)$ 的二次插值多项式 $p_2(x)$ 及其余项的表达式；计算 $p_2\left(\frac{1}{3}\right)$，与上题的计算结果相比较并分析产生差异的原因.

3. 设 $f(x)$ 在若干个测量点处的函数值如下：

x	1.4	1.7	2.3	3.1
$f(x)$	65	58	44	36

试求 $f(2.8)$ 的近似值.

4. 若 h 是小量，问如何选取常数 a,b,c，才能使得 $af(x+h)+bf(x)+cf(x-h)$ 与 $f''(x)$ 近似的阶最高？

5. 若 $f(x)$ 在有 n 阶导数，证明 $f(x)$ 可在点 x 处展开为带 Peano 余项的 Taylor 公式

$$f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x)\Delta x+\frac{f''(x)}{2!}\Delta x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\Delta x^n+o(\Delta x^n).$$

6. 将 $n+1$ 个插值条件取为所有结点上的函数值和一阶导数值，即 $p_n(x)$ 满足

$$\begin{cases}p_n(x_i)=f(x_i),\\ p'_n(x_i)=f'(x_i),\end{cases}\quad i=0,1,2,\cdots,\frac{n-1}{2}$$

的插值多项式称为 **Hermite 插值多项式**，在微分方程数值求解等研究领域中具有重要作用. 它可以取为

$$p_n(x)=\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\left[f(x_k)q_k^{(0)}(x)+f''(x_k)q_k^{(1)}(x)\right],$$

这里，$\{q_k^{(0)}(x),q_k^{(1)}(x)\}_{k=0}^{(n-1)/2}$ 是满足条件

$$q_k^{(0)}(x_i)=\delta_{ik},\quad [q_k^{(0)}(x_i)]'=0,\quad i,k=0,1,2,\cdots,\frac{n-1}{2}$$

和

$$q_k^{(1)}(x_i)=0,\quad [q_k^{(1)}(x_i)]'=\delta_{ik},\quad i,k=0,1,2,\cdots,\frac{n-1}{2}$$

的基函数. 试仿照 Lagrange 插值多项式的情况构造 $\{q_k^{(0)}(x),q_k^{(1)}(x)\}_{k=0}^{n-1/2}$.

§4 函数的 Taylor 公式及其应用

函数在 $x=0$ 处的 Taylor 公式

由于 $f(x)$ 在任意 x_0 处的 Taylor 公式都可以由它在 $x=0$ 处的 Taylor 公式作适当平移后得到，因此，不失一般性，实际中我们更多考虑的是函数在 $x=0$ 处的 Taylor 公式，即

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+r_n(x),$$

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},\qquad \theta\in(0,1),$$

这也称为 **Maclaurin 公式**. 下面我们先求几个最基本的初等函数在 $x=0$ 处的 Taylor 公式.

例 5.4.1 求 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处的 Taylor 公式.

解 这时有

$$f(x)=f'(x)=f''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=e^x,$$

于是

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1,$$

因此，得到 e^x 在 $x=0$ 处的 Taylor 公式

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+r_n(x),$$

它的余项为

$$r_n(x)=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},\qquad \theta\in(0,1).$$

例 5.4.2 求 $f(x)=\sin x$ 和 $f(x)=\cos x$ 在 $x=0$ 处的 Taylor 公式.

解 先考虑 $f(x)=\sin x$.

由于对 $k=0,1,2,\cdots$ 有

$$f^{(k)}(x)=\sin\left(x+\frac{k}{2}\pi\right),$$

于是

$$f^{(k)}(0)=\begin{cases}0, & k=2n,\\ (-1)^n, & k=2n+1,\end{cases}$$

因此 $\sin x$ 在 $x=0$ 处的 Taylor 公式为

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+r_{2n+2}(x),$$

相应的余项为

$$r_{2n+2}(x)=\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\sin\left(\theta x+\frac{2n+3}{2}\pi\right),\quad \theta\in(0,1).$$

同理可以求出 $\cos x$ 在 $x=0$ 处的 Taylor 公式和余项分别为

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+r_{2n+1}(x)$$

和

$$r_{2n+1}(x)=\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos(\theta x+(n+1)\pi),\quad \theta\in(0,1).$$

例 5.4.3 求 $f(x)=(1+x)^\alpha$（α 为任何实数）在 $x=0$ 处的 Taylor 公式.

解 因为

$$\begin{aligned}
f(0) &= (1+x)^\alpha\big|_{x=0}=1,\\
f'(0) &= \alpha(1+x)^\alpha\big|_{x=0}=\alpha,\\
f''(0) &= \alpha(\alpha-1)(1+x)^\alpha\big|_{x=0}=\alpha(\alpha-1),\\
&\cdots\cdots,
\end{aligned}$$

对任意正整数 k，一般地有

$$f^{(k)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1).$$

记

$$\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!},$$

并规定

$$\binom{\alpha}{0}=1.$$

（易知当 α 为正整数 n 时，$\binom{n}{j}=C_n^j$，因而它是组合数的推广.）便得到

$$(1+x)^\alpha=\binom{\alpha}{0}+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+\binom{\alpha}{3}x^3+\cdots+\binom{\alpha}{n}x^n+r_n(x),$$

它的余项为

$$r_n(x)=\binom{\alpha}{n+1}(1+\theta x)^{\alpha-(n+1)}\cdot x^{n+1},\qquad \theta\in(0,1).$$

下面是几种最常见的情况.

(a) 当 α 为正整数 n 时，上式即成为

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k,$$

这是熟知的二项式展开定理，此时的余项为零.

(b) 当 $\alpha=-1$ 时，易知 $\binom{-1}{k}=(-1)^k$，因此

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots+(-1)^n x^n+r_n(x),$$

余项为

$$r_n(x)=(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+2}},\qquad \theta\in(0,1).$$

(c) 当 $\alpha=\frac{1}{2}$ 时,

$$\binom{\frac{1}{2}}{k}=\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-k+1)}{k!}$$

$$=\frac{(1-2)(1-4)\cdots(1-2(k-1))}{2^k k!}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}, & k=1,\\ (-1)^{k-1}\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}, & k>1,\end{cases}$$

这里,记号

$$k!!=\begin{cases}k(k-2)(k-4)\cdots 6\cdot 4\cdot 2, & k=2n,\\ k(k-2)(k-4)\cdots 5\cdot 3\cdot 1, & k=2n+1.\end{cases}$$

因此,

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-$$

$$\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n+r_n(x),$$

余项为

$$r_n(x)=(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+\frac{1}{2}}},\qquad \theta\in(0,1).$$

(d) 当 $\alpha=-\frac{1}{2}$ 时,当 $k>1$ 时,有

$$\binom{-\frac{1}{2}}{k}=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}$$

$$=\frac{(-1)(-1-2)(-1-4)\cdots(-1-2(k-1))}{2^k k!}$$

$$=(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!},$$

而当 $k=1$ 时显然有 $\binom{-\frac{1}{2}}{1}=-\frac{1}{2}$,因此

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\cdots+(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n+r_n(x),$$

余项为

$$r_n(x)=(-1)^{n+1}\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+\frac{3}{2}}},\qquad \theta\in(0,1).$$

上面的例 5.4.1、5.4.2 以及 5.4.3 的一般形式是最低限度需要熟记的 Taylor 公式.一方面,固然是由于这几个函数本身都非常重要,另一方面,从这些结论出发,利用换元、四则运算、求导、待定系数等方法,可以较方便地得到几乎所有常用的初等函数的 Taylor 多项式,而不必很繁琐地求助于定义.

下面我们分别举几个例子.

例 5.4.4 求 $f(x)=2^x$ 在 $x=0$ 处的 n 次 Taylor 多项式.

解 将 2^x 写成 $e^{(\ln 2)x}$,令 $u=(\ln 2)x$ 并对 e^u 使用例 5.4.1 的 Taylor 公式,代回变量即有

$$2^x\approx 1+(\ln 2)x+\frac{(\ln 2)^2x^2}{2!}+\frac{(\ln 2)^3x^3}{3!}+\cdots+\frac{(\ln 2)^nx^n}{n!}.$$

例 5.4.5 求 $f(x)=\sqrt[3]{2-\cos x}$ 在 $x=0$ 处的 4 次 Taylor 多项式.

解 令 $u=1-\cos x$,则当 $x\to 0$ 时 $u\to 0$,于是

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{2-\cos x}&=\sqrt[3]{1+(1-\cos x)}\\&=\sqrt[3]{1+u}\\&=1+\frac{u}{3}-\frac{u^2}{9}+o(u^2)\\&=1+\frac{1-\cos x}{3}-\frac{(1-\cos x)^2}{9}+o((1-\cos x)^2).\end{aligned}$$

由于

$$1-\cos x=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^4),$$

代入上式,得到展开式

$$\sqrt[3]{2-\cos x}\approx 1+\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{24}.$$

请读者思考一下,为什么不能将 $\sqrt[3]{2-\cos x}$ 化为 $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{1-\frac{\cos x}{2}}$,再对

$\sqrt[3]{1-\frac{\cos x}{2}}$使用例 5.4.3 的结论.

$\sin x$ 的导数是 $\cos x$，而从例 5.4.2 可以看出，$\cos x$ 的 n 次 Taylor 多项式恰为 $\sin x$ 的 $n+1$ 次 Taylor 多项式的导数，我们要问，这是否是一个一般的性质呢？回答是肯定的.

定理 5.4.1 设 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域有 $n+2$ 阶导数存在，则它的 $n+1$ 次 Taylor 多项式的导数恰为 $f'(x)$ 的 n 次 Taylor 多项式.

证明留作习题.

这个性质给我们带来很大的方便.

例 5.4.6 求 $f(x)=\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 次 Taylor 多项式.

解 由于 $[\ln(1+x)]'=\frac{1}{1+x}$，设 $\ln(1+x)$ 的 n 次 Taylor 多项式为

$$\ln(1+x)\approx a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n,$$

则

$$[\ln(1+x)]'\approx a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}.$$

由于 $[\ln(1+x)]'=\frac{1}{1+x}$，而由例 5.4.3 的(b)，$\frac{1}{1+x}$ 的 $n-1$ 次 Taylor 多项式为

$$\frac{1}{1+x}\approx 1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1},$$

比较两式，便得到

$$a_j=\frac{(-1)^{j-1}}{j},\qquad j=1,2,\cdots,n,$$

同时可以明显看出

$$a_0=\ln 1=0,$$

因此可得

$$\ln(1+x)\approx x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.$$

例 5.4.7 求 $f(x)=\arctan x$ 在 $x=0$ 处的 Taylor 多项式.

解 由例 5.4.3 的(b)，函数的 Taylor 多项式为

$$\frac{1}{1+x^2}\approx 1-x^2+x^4-x^6+x^8-\cdots+(-1)^nx^{2n},$$

因为 $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$，按例 5.4.6 同样的方法，易知

$$\arctan x\approx x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

函数 $f(x)$ 在一般 x_0 处的 Taylor 公式可以通过对它在 $x=0$ 处的 Taylor

公式作适当的变换后直接得到,而不需要再按定义去计算.

例 5.4.8 求 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $x=1$ 处的 n 次 Taylor 多项式.

注意这时并不需要象例 5.3.2 那样,真的去计算 $f^{(j)}(1)$.

解 将 $\sqrt{x}$ 改写成 $\sqrt{1+(x-1)}$,用例 5.4.3 的(c)的结论,即有,

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x} &= \sqrt{1+(x-1)} \\
&= 1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{2\cdot 4}(x-1)^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}(x-1)^3- \\
&\quad \cdots+(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}(x-1)^n .
\end{aligned}
$$

Taylor 公式的应用

Taylor 公式具有广泛的用途,本节先举一些简单的例子.

一、近似计算

这在上一节中已有所反映,这里再举几个例子并做些进一步的说明.

例 5.4.9 用 e^x 的 10 次 Taylor 多项式求 e 的近似值,并估计误差.

解 在 e^x 的 Taylor 公式(例 5.4.1)中取 $x=1, n=10$,则可算得

$$
\begin{aligned}
e &\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{10!} \\
&= 2.718\,281\,801\cdots,
\end{aligned}
$$

而 e 的精确值为 $e=2.718\,281\,828\cdots$,因此这么算得的结果是比较准确的. 理论上

$$
|d| = \left(\frac{e^{\theta}}{11!}x^{11}\right)\Bigg|_{x=1} < \frac{3}{11} \approx 6.8\times 10^{-8},
$$

实际上的 $d\approx 2.7\times 10^{-8}$,两者也吻合得相当好.

但必须注意,Taylor 公式只是一种局部性质,因此在用它进行近似计算时,x 不能使远离 x_0,否则效果会比较差,甚至产生完全错误的结果.

如在 $\ln(1+x)$ 的 Taylor 多项式中令 $x=1$,取它的前 10 项计算 $\ln 2$ 的近似值,得到

$$
\begin{aligned}
\ln 2 &\approx 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10} \\
&= 0.645\,634\,92\cdots,
\end{aligned}
$$

而 $\ln 2=0.693\,147\,28\cdots$,误差相当大. 但如改用其他 Taylor 多项式,如

$$
\begin{aligned}
&\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x)-\ln(1-x) \\
&\approx \left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right]-\left[-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots-\frac{x^n}{n}\right] \\
&=2\left[x+\frac{x^2}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right],
\end{aligned}
$$

令 $x=\frac{1}{3}$，只取前两项便有

$$\ln 2 \approx 2\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\right]=0.691\ 35\cdots,$$

取前四项则可达到

$$\ln 2 \approx 2\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7\right]=0.693\ 134\ 75\cdots,$$

效果比前面好得多.请读者通过对余项的分析自行考察其原因(留作习题).

更有甚者，若在

$$\frac{1}{1-x}\approx 1+x+x^2+\cdots+x^n$$

中令 $x=2$，则会得到不可思议的荒谬结果：左式为 -1，但右式的每一项都是正的，显然两者之间决不可能有近似关系.(产生这个现象的原因我们将在今后学习级数时再深加研究.)

二、求极限

对于不定型的极限问题，一般可以采用 L'Hospital 法则来求.但是，对于一些求导非常繁琐，特别是要多次用 L'Hospital 法则，需要求出高阶导数的情况，Taylor 公式往往是比 L'Hospital 法则更为有效的求极限工具.

例 5.4.10　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

解　这是个 $\frac{0}{0}$ 类型的极限.如果用 L'Hospital 法则，则分子分母需要求导 4 次，

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x+x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{4x^3} &&\left(\text{仍为}\frac{0}{0}\text{型}\right)\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x+\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}-x^2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{12x^3} &&\left(\text{仍为}\frac{0}{0}\text{型}\right)\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-3x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}+x^3\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{24x} &&\left(\text{仍为}\frac{0}{0}\text{型}\right)\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-3\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}+6x^2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}-x^4\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{24}\\
=&-\frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

但若采用 Taylor 公式,则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right]-\left[1+\left(-\frac{x^2}{2}\right)+\frac{1}{2!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2+o(x^4)\right]}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)\right]}{x^4}=-\frac{1}{12}.$$

计算过程就简洁得多了.

例 5.4.11 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin^2 x)-6(\sqrt[3]{2-\cos x}-1)}{x^4}$.

解 这也是个$\frac{0}{0}$类型的极限.由例 5.4.5 和例 5.4.6,有

$$\sqrt[3]{2-\cos x}-1=\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{24}+o(x^4),$$

$$\ln(1+\sin^2 x)=\sin^2 x-\frac{\sin^4 x}{2}+o(\sin^4 x).$$

用

$$\sin^2 x=\left[x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right]^2$$

代入,即有

$$\ln(1+\sin^2 x)=x^2-\frac{5x^4}{6}+o(x^4).$$

于是,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin^2 x)-6(\sqrt[3]{2-\cos x}-1)}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[x^2-\frac{5}{6}x^4+o(x^4)\right]-6\left[\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right]}{x^4}$$

$$=-\frac{7}{12}.$$

这道题若用 L'Hospital 法则来做将不胜其繁,请读者自行加以对照.

三、求曲线的渐近线方程

若曲线 $y=f(x)$与直线 $y=ax+b$ 的距离在$x\to+\infty$或 $x\to-\infty$时趋于零,即

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$$

或

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$$

中至少有一个成立，则称直线 $y=ax+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条**渐近线**，当 $a=0$ 时称为水平渐近线，否则称为斜渐近线. 而如果 $f(x)$ 在 x 趋于某个定值 a 时趋于 $+\infty$ 或 $-\infty$，即成立

$$\lim_{x\to a}f(x)=\pm\infty,$$

则称直线 $x=a$ 是 $f(x)$ 的一条垂直渐近线.

有些函数当 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时具有两条不同的渐近线，比如，我们在中学学习解析几何时就知道，直线 $y=\pm x$ 是等轴双曲线

$$y=\pm\sqrt{x^2-1}$$

的两条渐近线. 也有些函数，当 $x\to+\infty$ 和 $-\infty$ 时并不都有渐近线，如 $y=e^x$ 当 $x\to-\infty$ 时有渐近线 $y=0$，而当 $x\to+\infty$ 时没有渐近线.

利用 Taylor 公式和渐近线定义，可以简便地求出曲线的渐近线方程.

例 5.4.12　求 $y=\dfrac{(x-1)^2}{3(x+1)}$ 的渐近线方程.

解　设 $y=\dfrac{(x-1)^2}{3(x+1)}$ 的渐近线方程为 $y=ax+b$，则由定义

$$\begin{aligned}0&=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x-1)^2}{3(x-1)}-(ax+b)\right]\\&=\frac{1}{3}\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x-2+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}-3(ax+b)\right]\\&=\frac{1}{3}\lim_{x\to\infty}\left[\left(x-2+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)-3(ax+b)\right]\\&=\frac{1}{3}\lim_{x\to\infty}[(1-3a)x-(3+3b)+o(1)],\end{aligned}$$

因此有 $a=\dfrac{1}{3}$ 和 $b=-1$，即 $y=\dfrac{(x-1)^2}{3(x+1)}$ 的渐近线方程为

$$y=\frac{x}{3}-1.$$

请读者思考，为什么这里不直接对 $\dfrac{1}{x+1}$ 展开，而是要先除以 x，然后再对 $\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}$ 来展开.

例 5.4.13　求 $y=\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}$ 的渐近线方程.

解 设 $y=\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}$ 的渐近线方程为 $y=ax+b$，则由定义

$$\begin{aligned}0&=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}-ax-b\right)\\&=\lim_{x\to\infty}\left[x\sqrt[3]{1-\frac{x^2+x-1}{x^3}}-ax-b\right]\\&=\lim_{x\to\infty}\left[x\left(1-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^2+x-1}{x^3}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)-ax-b\right]\\&=\lim_{x\to\infty}\left[(1-a)x-\left(\frac{1}{3}+b\right)+o(1)\right],\end{aligned}$$

因此有 $a=1$ 和 $b=-\dfrac{1}{3}$，即 $y=\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}$ 的渐近线方程为

$$y=x-\frac{1}{3}.$$

例 5.4.12 和例 5.4.13 的图形请见下一节的图 5.5.2 和图 5.5.3.

四、外推

外推是一种通过将精度较低的近似值进行适当组合，产生精度较高的近似值的方法，它的基础是 Taylor 公式，其原理可以简述如下.

若对于某个值 a，按参数 h 算出的近似值 $a_1(h)$ 可以展开成

$$a_1(h)=a+c_1h+c_2h^2+c_3h^3+\cdots$$

（这里先不管 c_i 的具体形式），那么按参数 $\frac{h}{2}$ 算出的近似值 $a_1\left(\frac{h}{2}\right)$ 就是

$$a_1\left(\frac{h}{2}\right)=a+\frac{1}{2}c_1h+\frac{1}{4}c_2h^2+\frac{1}{8}c_3h^3+\cdots,$$

$a_1(h)$ 和 $a_1\left(\frac{h}{2}\right)$ 与准确值 a 的误差都是 $O(h)$ 阶的.

现在，将后一式乘 2 减去前一式，便得到

$$a_2(h)=\frac{2a_1\left(\frac{h}{2}\right)-a_1(h)}{2-1}=a+d_2h^2+d_3h^3+\cdots,$$

也就是说，对两个 $O(h)$ 阶的近似值化了少量几步四则运算进行组合之后，却得到了具有 $O(h^2)$ 阶的近似值 $a_2(h)$. 这样的过程就称为**外推**.（这里不解释“外推”一词的确切含义.）

若进行了一次外推之后精度仍未达到要求，则可以从 $a_2(h)$ 出发再次外推，

$$a_3(h)=\frac{4a_2\left(\frac{h}{2}\right)-a_2(h)}{4-1}=a+e_3h^3+e_4h^4+\cdots,$$

得到 $O(h^3)$ 阶的近似值 $a_3(h)$. 这样的过程可以进行 $k-1$ 步，直到

$$a_k(h)=\frac{2^{k-1}a_{k-1}\left(\frac{h}{2}\right)-a_{k-1}(h)}{2^{k-1}-1}=a+O(h^k)$$

满足预先给定的精度.

外推方法能以较小的代价获得高精度的结果，因此是一种非常重要的近似计算技术.

我们来看一个具体的例子.

古人很早就知道用"割圆术"，即计算圆的内接或外切正多边形的周长或面积来求圆周率 π，我国古代科学家曾在这方面作出过巨大的贡献.

例 5.4.14 单位圆的内接正 n 边形的面积可以表示为

$$S(h)=\frac{1}{2h}\sin(2h\pi),$$

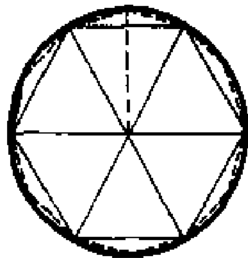


图 5.4.1

这里 $h=\frac{1}{n}$.

按照 Taylor 公式

$$\begin{aligned}S(h)&=\frac{1}{2h}\left[2h\pi-\frac{(2h\pi)^3}{3!}+\frac{(2h\pi)^5}{5!}-\cdots\right]\\&=\pi+c_1h^2+c_2h^4+c_3h^6+\cdots,\end{aligned}$$

因此，其内接正 $2n$ 边形的面积可以表示为

$$\begin{aligned}S\left(\frac{h}{2}\right)&=\frac{1}{h}\left[h\pi-\frac{(h\pi)^3}{3!}+\frac{(h\pi)^5}{5!}-\cdots\right]\\&=\pi+\frac{1}{4}c_1h^2+\tilde{c}_2h^4+\tilde{c}_3h^6+\cdots,\end{aligned}$$

用它们作为 π 的近似值，误差都是 $O(h^2)$ 量级的.

现在将这两个近似的程度不够理想的值按以下方式组合：

$$\tilde{S}(h)=\frac{4S\left(\frac{h}{2}\right)-S(h)}{4-1}=S\left(\frac{h}{2}\right)+\frac{S\left(\frac{h}{2}\right)-S(h)}{3},$$

那么通过简单的计算就可以知道

$$\tilde{S}(h)=\pi+d_2h^4+d_3h^6+\cdots,$$

h^2 项被消掉了！也就是说，用 $\tilde{S}(h)$ 近似表示 π，其精度可以大大提高.

我国三国时的著名数学家刘徽曾对半径为 10 的圆算出

$$100\cdot S\left(\frac{1}{96}\right)=313\frac{584}{625},$$

$$100\cdot S\left(\frac{1}{192}\right)=314\frac{64}{625},$$

接着他"以十二觚之幂为率消息","取此分寸之三十六",用现在的话来说,即以$\frac{36}{625}$加到$100\cdot S\left(\frac{1}{192}\right)$上去,便得到了当时最精确的圆周率

$$\pi\approx\frac{1}{100}\left(314\frac{64}{625}+\frac{36}{625}\right)=3.1416.$$

后人发现,他用的增量$\frac{36}{625}$与$\tilde{S}(h)$表达式中对$S\left(\frac{h}{2}\right)$的修正量

$$\frac{S\left(\frac{h}{2}\right)-S(h)}{3}=\frac{314\frac{64}{625}-313\frac{584}{625}}{3}=\frac{35}{625}$$

相当接近,因此有理由猜测,他在当时已经掌握了某种与外推方法类似的计算技术.如果单纯由圆的内接正多边形的面积来计算,那要算至圆的内接正 3 072 边形方能达到这样的精度,计算中包含着许多开方运算,这在用算筹计算(阿拉伯数字尚未传入)的魏晋时代,其工作量之大简直无法想象.

我们用一个饶有趣味的问题结束本节.

例 5.4.15 证明:e 是无理数.

证 用反证法.

假设 e 是有理数,那么显而易见,一定存在充分大的自然数 m,使得 $(m!)\mathrm{e}$ 是正整数.

在 e^x 的 Taylor 公式

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{\mathrm{e}^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},\qquad\theta\in(0,1)$$

中,将 n 取为 m,并令 $x=1$.由于 e^x 在整个实数范围都满足定理 5.3.3 的条件,即有

$$\mathrm{e}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{m!}+\frac{\mathrm{e}^\theta}{(m+1)!},\qquad\theta\in(0,1).$$

两边同乘上 $m!$,使得到

$$(m!)\mathrm{e}=(m!)\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{3}{3!}+\cdots+\frac{1}{m!}\right)+\frac{(m!)\mathrm{e}^\theta}{(m+1)!},$$

即

$$(m!)\left[\mathrm{e}-\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{m!}\right)\right]=\frac{\mathrm{e}^\theta}{m+1}.$$

按假设,等式的左端是正整数.

但由于 e^x 是单调增加函数,而 $\theta\in(0,1)$,因此

$$1<\mathrm{e}^\theta<3,$$

从而

$$\frac{1}{m+1}<\frac{\mathrm{e}^\theta}{m+1}<\frac{3}{m+1}.$$

于是，$\forall\, m\geqslant 2$，都有$\dfrac{e^{\theta}}{m+1}\in(0,1)$，也就是说，上述等式的右端决不可能是正整数，这样就导出了矛盾.

所以假设 e 是有理数不成立，即 e 是无理数.

证毕

习　　题

1. 求下列函数在 $x=0$ 处的 n 次 Taylor 多项式及其余项：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$，　$n=5$；　(2) $f(x)=\cos(x+\alpha)$，　$n=5$；

(3) $f(x)=\sqrt{2+\sin x}$，　$n=5$；　(4) $f(x)=e^{\sin x}$，　$n=3$；

(5) $f(x)=\tan x$，　$n=5$；　(6) $f(x)=\ln(\cos x)$，　$n=6$；

(7) $f(x)=\dfrac{x}{e^x-1}$，　$n=4$；　(8) $f(x)=\ln\dfrac{\sin x}{x}$，　$n=6$；

(9) $f(x)=\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt[3]{1-3x+x^2}$，　$n=3$.

2. 求下列函数在指定点处的 n 次 Taylor 多项式：

(1) $f(x)=-2x^3+3x^2-2$，$x_0=1$；　(2) $f(x)=\ln x$，$x_0=e$；

(3) $f(x)=\ln x$；$x_0=1$　(4) $f(x)=\sin x$，$x_0=\dfrac{\pi}{6}$；

(5) $f(x)=\sqrt{x}$，$x_0=2$；　(6) $f(x)=x^x-1$，$x_0=1$.

3. 通过对展开式及其余项的分析，说明用

$$\ln 2=\ln\frac{1+x}{1-x}\bigg|_{x=\frac{1}{3}}\approx\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)\bigg|_{x=\frac{1}{3}}$$

比用

$$\ln 2=\ln(1+x)\Big|_{x=1}\approx\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right)\bigg|_{x=1}$$

效果好得多的两个原因.

4. 利用上题的讨论结果，不加计算，判别用哪个公式计算 π 的近似值效果更好，为什么？

(1) $\dfrac{\pi}{4}=\arctan 1\approx\left[x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]\bigg|_{x=1}$；

(2) $\dfrac{\pi}{4}=4\arctan\dfrac{1}{5}-\arctan\dfrac{1}{239}$　　(Machin 公式)

$$\approx 4\left[x-\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]\bigg|_{x=\frac{1}{5}}$$

$$-\left[x-\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]\Bigg|_{x=\frac{1}{239}}.$$

5. 利用 Taylor 式求近似值(精确到 10^{-5}):

(1) $\lg 11$; (2) $\sqrt[3]{e}$; (3) $\sin 31°$;

(4) $\cos 89°$; (5) $\sqrt[5]{250}$; (6) $(1.1)^{1.2}$.

6. 利用函数的 Taylor 公式求极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}$, $(a>0)$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\csc x\right)$; (4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[5]{x^5+x^4}-\sqrt[5]{x^5-x^4})$;

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$; (6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\tan x}\right)$;

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x})$;

(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x^3-x^2+\dfrac{x}{2})e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6-1}\right]$.

7. 判断下列函数是否存在渐近线,若存在的话求出渐近线方程:

(1) $y=\dfrac{x^2}{1+x}$; (2) $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$;

(3) $y=\sqrt{6x^2-8x+3}$; (4) $y=(2+x)e^{\frac{1}{x}}$;

(5) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$; (6) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$;

(7) $y=x+\operatorname{arccot}x$; (8) $y=\sqrt[3]{(x-2)(x+1)^2}$;

(9) $y=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$; (10) $y=2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$.

8. (1)设 $0<x_1<\dfrac{\pi}{2}$, $x_{n+1}=\sin x_n\,(n=1,2,\cdots)$,证明:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$; (ii) $x_n^2\sim\dfrac{3}{n}\,(n\to\infty)$.

(2)设 $y_1>0$, $y_{n+1}=\ln(1+y_n)\,(n=1,2,\cdots)$,证明:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$; (ii) $y_n\sim\dfrac{2}{n}\,(n\to\infty)$.

(提示:分别对极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\frac{1}{x_n^2}}$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\frac{1}{y_n}}$ 应用 Stolz 定理.)

9. 对例 5.4.10 中的外推的近似公式

$$\tilde{S}(h)=\frac{4S\left(\frac{h}{2}\right)-S(h)}{4-1}$$

$$= \pi + d_2h^4 + d_3h^6 + \cdots + d_nh^{2n} + r_{2n}(x)$$

再做一次外推，导出 $\tilde{\tilde{S}}$的表达式.

10. 利用 Taylor 公式

$$a_1(h) \equiv \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$= f'(x) + \frac{f''(x)}{2!}h + \frac{f'''(x)}{3!}h^2 + \cdots + r_n(x),$$

导出求 $f'(x)$的一次和二次外推表达式，(这是**数值微分**的重要方法之一).

§5 应用举例

导数和微分(包括微分中值定理)具有非常重要的实际应用价值. 作为入门，我们在本节中先初步举一些例子，使读者获得一定的感性认识，并能够举一反三地解决一些简单的实际问题，为今后进一步深入学习奠定基础.

函数作图

在指定的坐标系中作出一个给定的函数的图形，从而直观地得到它的某些性态，是很有实际意义的事. 现在虽说有了电子计算机和许多数学软件，可以(用描点法)画出各种各样的函数图形，但用分析的方法勾勒出函数的大致形状仍然是数学研究中的重要手段之一.

画出函数 $y = f(x)$的大致图形的过程一般可分为以下几个步骤：

(1)由 $f(x)$的定义域和整体几何性质如奇偶性、周期性等，确定函数的不连续点和作图的范围. 如 $f(x)$是奇函数或偶函数，那么只要画出一半；而对于周期函数，则只要画出一个周期就可以了.

(2)将作图范围分成若干个单调区间，在每一个区间中，$f(x)$保持连续地单调增加或单调减少.

划分单调区间的界点显然应该是 $f(x)$的不连续点和连续区间内的极值点的全体. $f(x)$的不连续点已在第(1)步确定了，这里来讨论一下如何确定 $f(x)$的极值点的问题.

设 x_0 为 $f(x)$的任一个极值点，除非 $f(x)$在 x_0 处不可导，否则由 Fermat 引理，必有 $f'(x_0) = 0$. 这就是说，**$f(x)$的全部极值点必定都在使得 $f'(x) = 0$ 和 $f'(x)$不存在的点集之中**. 所以，我们可以先求出值得 $f'(x) = 0$ 或 $f'(x)$不存在的所有点，再进行判别.

定理 5.5.1(极值点判定定理) *设 x_0 是 $f(x)$的不可导点或导数为零的点：*

(1)若 x_0 的左右邻域中 $f'(x)$存在，则

(i)当它左邻域中有 $f'(x) \geqslant 0$，右邻域中有 $f'(x) \leqslant 0$ 时，x_0 是极大值点；

(ii)当它左邻域中有 $f'(x)\leqslant 0$,右邻域中有 $f'(x)\geqslant 0$ 时,x_0 是极小值点;

(iii)当它的左右邻域中 $f'(x)$同号时,x_0 不是极值点.

(2)若 $f(x)$在 x_0 处二阶可导,则

(i)$f''(x_0)<0$ 时,x_0 是极大值点;

(ii)$f''(x_0)>0$ 时,x_0 是极小值点;

(iii)$f''(x_0)=0$ 时,x_0 可能是极值点,也可能不是极值点.

上述结论请读者自行证明或举例.

(3)将作图范围分成若干个**保凸区间**,$f(x)$在每一个区间中**保持**凸或凹.

在函数的定义域中,函数的图象由凸转变成凹或由凹转变成凸的"关节点"的横坐标称为这个函数的**拐点**,如 $x=k\pi(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$就是函数 $y=\sin x$ 的拐点.显然,要确定 $f(x)$图象的凹凸情况,必须先找到$f(x)$的拐点.

假设 $f(x)$在拐点 x_0 的左右邻域中二阶导数存在且连续,那么由 Lagrange 中值定理的推论 3,$f'(x)$在 x_0 的左右邻域中一定是反号的,由极限的保号性,除非 $f(x)$在 x_0 处二阶导数不存在,否则必有 $f''(x_0)=0$.这就是说,$f(x)$的**全部拐点必定属于使得** $f''(x)=0$ **和** $f''(x)$**不存在的** x **的点集**.

所以,我们先求出所有使得 $f''(x)=0$ 和 $f''(x)$不存在的点,然后逐一地考察这些点左右充分小的邻域中 $f''(x)$的符号,进而确定 $f(x)$在一个个保凸区间中的凹凸的方向.若 $f''(x)$在 x_0 的左右邻域符号相同,则 x_0 不是拐点.

(4)确定 $f(x)$的极限情况.

即求出 $f(x)$的渐近线,包括水平渐近线、垂直渐近线和斜渐近线(对一个给定的函数来说,可以只存在其中的一二种甚至根本就没有任何渐近线).求渐近线的一般方法已在上一节中讲述过了,这里不再重复.

(5)利用已经得到的 $f(x)$、$f'(x)$和 $f''(x)$的一些特殊点,将 $f(x)$的定义域划分成若干个单调且保凸的区间,结合前面(1)-(4)得到的结论,必要时可再补充计算若干个点上 $f(x)$的值并定位于坐标系中,便可以画出 $f(x)$的大致图形.

我们按上述步骤来作几个函数的图象.

例 5.5.1 在 Oxy 坐标系画出函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$的大致图形.

解 因为 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$是在整个实数域中有定义的偶函数,我们只要考察 $x\geqslant 0$ 就可以了.

求 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$的一阶导数和二阶导数,有

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{x^2}{2}}$$

和

$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1),$$

所以，$f'(x)$的可能的极值点为$f'(x)$的零点$x=0$，可能的拐点为$f''(x)$的零点$x=1$.

经检验，$f'(x)$在$x=0$的右边和左边的符号分别为负和正，所以$x=0$确实是$f(x)$的极大值点；而$f''(x)$在$x=1$的右边和左边的符号也分别为正和负，所以$x=1$也确实是$f(x)$的拐点.

这样，我们便可以得知$f(x)$在$x \geqslant 0$处的大致变化情况：

	0	(0,1)	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	0	−	−	−
$f''(x)$	−	−	0	+
$f(x)$	极大值 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	⤹	拐点 $\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$	⤷

（我们用符号"⤴"表示函数在这一区间单调增加且凹，"⤴"表示函数在这一区间单调增加且凸，"⤵"表示函数在这一区间单调减少且凹，"⤷"表示函数在这一区间单调减少且凸.）

当$x \to \infty$时，$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \to 0$，因此$y=0$即$x$轴是$f(x)$的水平渐近线，容易看出，$f(x)$不再有其它的渐近线.

利用上面得到的$f(x)$的性态，便不难画出$f(x)$在右半平面的图形，然后利用对称性，就可以作出整个$f(x)$的图形了（图5.5.1）.

以后学习概率论时会知道，$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$是一个非常重要的函数.

例 5.5.2　在Oxy坐标系画出函数$y = \frac{(x-1)^2}{3(x+1)}$的大致图形.

解　首先可以知道，函数$f(x) = \frac{(x-1)^2}{3(x+1)}$的定义域为除了$x=-1$之外的全体实数，它的零点为$x=1$.

对$f(x)$求导，

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x+1)-(x-1)^2}{3(x+1)^2} = \frac{(x+3)(x-1)}{3(x+1)^2},$$

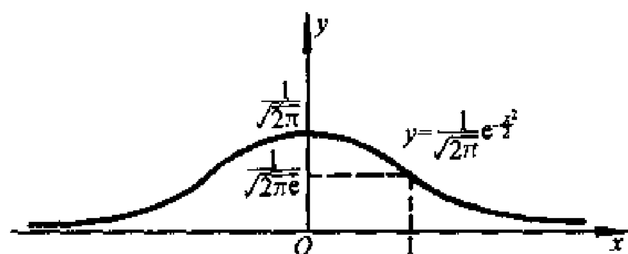


图 5.5.1

即 $f'(x)$有零点 $x=1$ 和 $x=-3$,并且在 $x=-1$ 处导数不存在.

$f'(x)$在 $x=-3$ 的右边和左边的符号分别为负和正,而在 $x=1$ 的右边和左边的符号分别为正和负,所以 $x=-3$ 是 $f(x)$的极大值点,$x=1$ 是$f(x)$的极小值点.由于 $x=-1$ 不属于 $f(x)$的定义域,因此它不可能是 $f(x)$的极值点.

再求 $f(x)$的二阶导数,

$$f''(x)=\frac{8}{3(x+1)^3},$$

即知 $f''(x)$只有一个无定义的点 $x=-1$,而没有零点.

同样,$x=-1$ 也不可能是 $f(x)$的拐点,但因为 $f''(x)$在 $x=-1$ 的右边和左边的符号相反,这一点仍是 $f(x)$改变了凹凸性的界点.

	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	无定义	−	0	+
$f''(x)$	−	−	−	无定义	+	+	+
$f(x)$	↖	极大值 $-\frac{8}{3}$	↙	无定义	↘	极小值 0	↗

由例 5.4.13,$y=\frac{(x-1)^2}{3(x+1)}$的斜渐近线方程为

$$y=\frac{x}{3}-1.$$

又因为

$$\lim_{x\to-1}\frac{(x-1)^2}{3(x+1)}=\infty,$$

所以 $x=-1$ 是它的垂直渐近线.

根据这些信息,再求出若干个特殊点上 $f(x)$的函数值,就不难画出$f(x)$的图形了(图 5.5.2).

例 5.5.3 讨论函数 $y=\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}$的单调性、极值点、凹凸性、拐

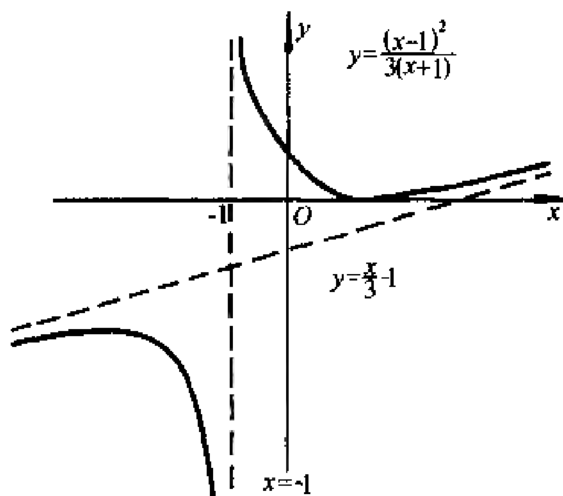


图 5.5.2

点和渐近线,在 Oxy 坐标系画出它的大致图形.

解 因为

$$f(x)=\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}=\sqrt[3]{(x-1)^2}\,\sqrt[3]{x+1},$$

所以 $f(x)$ 有零点 $x=\pm1$.

对 $f(x)$ 求导,

$$f'(x)=\left[\sqrt[3]{(x-1)^2}\,\sqrt[3]{x+1}\right]'$$
$$=\frac{1}{3}\left[2\frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x-1}}+\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}\right]$$
$$=\frac{1}{3}\frac{2(x+1)+(x-1)}{\sqrt[3]{x-1}\,\sqrt[3]{(x+1)^2}}$$
$$=\frac{x+\frac{1}{3}}{\sqrt[3]{x-1}\,\sqrt[3]{(x+1)^2}},$$

因此 $f'(x)$ 有零点 $x=-\frac{1}{3}$,并且在 $x=\pm1$ 处导数不存在.

再求 $f(x)$ 的二阶导数,

$$f''(x)=\left[\frac{x+\frac{1}{3}}{\sqrt[3]{x-1}\,\sqrt[3]{(x+1)^2}}\right]'$$

$$= \frac{\sqrt[3]{x-1}\,\sqrt[3]{(x+1)^2} - \left(\frac{x}{3}+\frac{1}{9}\right)\left[\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} + 2\frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x+1}}\right]}{\left[\sqrt[3]{x-1}\,\sqrt[3]{(x+1)^2}\right]^2}$$

$$= \frac{1-\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{9}\right)\cdot\left(\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}\right)}{\sqrt[3]{x-1}\,\sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

$$= \frac{-8}{9\cdot\sqrt[3]{(x-1)^4}\,\sqrt[3]{(x+1)^5}},$$

即知 $f(x)$的二阶导数没有零点,但在 $x=\pm 1$ 处 $f''(x)$不存在.

	$(-\infty,1)$	-1	$\left(-1,-\frac{1}{3}\right)$	$-\frac{1}{3}$	$\left(-\frac{1}{3},1\right)$	1	$(1,\infty)$
$f'(x)$	+	不存在	+	0	−	不存在	+
$f''(x)$	+	不存在	−	−	−	不存在	−
$f(x)$	↗	拐点 0	↗	极大值 $\frac{2}{3}\sqrt[3]{4}$	↘	极小值 0	↗

由例 5.4.14, $y=\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}$的渐近线方程为

$$y = x - \frac{1}{3}.$$

在 Oxy 坐标系中标出 $f(x)$的若干个点,利用上面得到的 $f(x)$的性态,便可以作出 $f(x)$的图形(图 5.5.3).

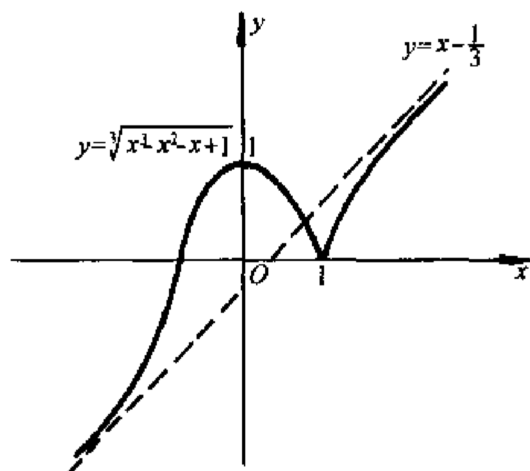


图 5.5.3

最值问题

在自然科学、生产技术、经济管理等领域,经常需要研究如何花费最小代

价去获取最大收益的问题,在许多情况下,这可以归结为数学上的求一个(或一组)给定函数在其定义域内的某个范围内的最大值或最小值的问题.现实问题归结的函数一般至少是由有限段连续函数组成的,它的考虑范围也总是在一个有限区域中,因此这是一个闭区间上的有限分段连续函数的最值问题,其解是一定存在的.

理论上,若是能将给定函数在指定范围的图象用上面讲过的方法作出来,那么它的最值点就一目了然了,问题也就随之迎刃而解.但实际上,单纯就求解最值问题而言,并不需要兴师动众地去绘出函数的图象,只要将可能成为最值点的那些点拿来,逐一求出它们的函数值并加以比较就可以了.

显然,对一个闭区间上的函数 $f(x)$来说,区间的两个端点是有可能成为它的最值点的(以后我们还会学到,有一类函数的最值点只能在区域的边界上达到);同时,若最值点属于区间的内部,那它一定是函数的极值点.因此,我们只要按照上述第(2)点找到所有使得 $f'(x)=0$ 或 $f'(x)$不存在的点,再加上区间的端点,从中找出函数值最大或最小的点就可以了.

例 5.5.4 装饮料的易拉罐是用铝合金制造的,罐身(侧面和底部)用整块材料拉制而成,顶盖是另装上去的,为了安全,顶盖的厚度是罐身厚度的三倍.问如何确定它的底面半径和高才能使得用料最省?

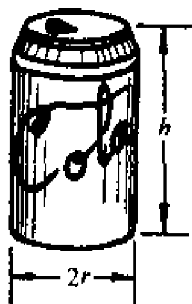


图 5.5.4

解 设罐身的厚度为 δ,则顶盖的厚度是 3δ.

记易拉罐的容积为 $V=$常数,底面半径为 r,高为 $h=\dfrac{V}{\pi r^2}$,于是,罐身的用料(体积)为

$$U_1(r)=\delta(\pi r^2+2\pi rh)=\delta\left(\pi r^2+2\frac{V}{r}\right),$$

而顶盖的用料为

$$U_2(r)=3\delta\pi r^2,$$

因此问题等价于求函数

$$U(r)=U_1(r)+U_2(r)=\delta\left(4\pi r^2+2\frac{V}{r}\right)$$

在$(0,+\infty)$中的最小值.

对 $U(r)$求导,

$$U'(r)=2\delta\left(4\pi r-\frac{V}{r^2}\right),$$

因此 $U'(r)$在$(0,+\infty)$只有唯一零点 $r_0=\sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}}$,而没有导数不存在的点.同时,对 $U'(r)$再求导,即知恒有

$$U''(r)=4\delta\left(2\pi+\frac{V}{r^3}\right)>0,\quad r\in(0,+\infty),$$

所以 r_0 是 $U(r)$的最小值点.

这时,相应的高为

$$h_0=\frac{V}{\pi r_0^2}=\frac{4\pi r_0^3}{\pi r_0^2}=4r_0.$$

也就是说,当它的高为底面直径的 2 倍时用料最省.读者不妨测量一下,看看实际使用的易拉罐是否按这样的比例设计的.

用同样的方法可以推出,若圆柱形有盖容器的外表面是用厚薄相同的材料制成的,那么当它的底面直径和高相等的时候用料最省(参见习题 12),许多圆柱形的日常用品,如漱口杯、保暖桶等,都是采用这样的比例(或近似这样的比例)设计的.

利用求解最值问题还可以获得一些重要的理论结果.

例 5.5.5 设一辆汽车在平原上的速度为 v_1,在草原上的速度为 v_2,现要求它最快地从平原上的 A 点到达草原上的B 点,问应该怎么走?

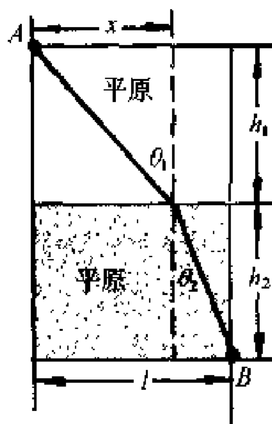


图 5.5.5

解　显然,在同一种地形上,汽车应沿直线行进,所以它从 A 到 B 的运动轨迹应是由两个直线段组成的折线.

设汽车的轨迹如图 5.5.5 所示,那么它的整个行驶时间应为

$$T(x)=\frac{\sqrt{h_1^2+x^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{h_2^2+(l-x)^2}}{v_2}.$$

求它的极值点 x_0,令

$$T'(x_0)=\frac{x_0}{v_1\sqrt{h_1^2+x_0^2}}-\frac{l-x_0}{v_2\sqrt{h_2^2+(l-x_0)^2}}=0,$$

即满足

$$\frac{x_0}{v_1\sqrt{h_1^2+x_0^2}}=\frac{l-x_0}{v_2\sqrt{h_2^2+(l-x_0)^2}},$$

由于 $\forall x\in[0,l]$,有

$$T''(x)=\frac{h_1^2}{v_1\sqrt[3]{h_1^2+x^2}}+\frac{h_2^2}{v_2\sqrt[3]{h_2^2+(l-x)^2}}>0,$$

因此 x_0 是 $T(x)$的唯一的极小值点,也就是它的最小值点.

将“汽车”换成一束光线,“平原”和“草原”换成两种不同的介质,即得到光学中著名的折射定律

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1}=\frac{\sin\theta_2}{v_2},$$

这是因为光线总是走“捷径”的.当然,也可以倒过来说,折射定律不光适用于光学,也适用于其它一些本质上与它相同的问题(参见习题 16 和 17).

最值问题也在社会科学的许多方面,尤其是经济活动分析中得到了广泛的应用,因为经济活动中最重要的目标之一,就是用最小的花费去赢取最大的利润,下面我们来举一个已对实际情况作了大大简化的例子.

例 5.5.6　对产品从生产到销售的过程进行经济核算时,至少要涉及到三个方面的问题:成本、收益和利润.设产量为 Q,则总成本 $C(Q)$一般可以表示成两部分的和

$$C(Q)=f+v(Q)\cdot Q.$$

这里,$f>0$ 称为固定成本(如厂房和设备的折旧、工作人员的工资、财产保险费等),一般可以认为与产量的大小无关,而 $v(Q)\cdot Q$ 称为可变成本(如原材料、能源等),$v(Q)$是一个正值函数,表示在总共生产 Q 件产品的情况下,每生产一件的可变成本,最简单的情形是 $v(Q)=v$(正常数).

$C(Q)$的导数 $C'(Q)$称为**边际成本**,其经济学意义是在总共生产 Q 件产品的情况下,生产第 Q 件产品的成本.

总收益 $E(Q)=p(Q)\cdot Q$ 是指把 Q 件产品销售出去后得到的收入，这里 $p(Q)$ 称为价格函数，表示在总共生产 Q 件产品的情况下，每件产品的销售价格. 一般说来，生产量越大，每件产品的价格就越便宜，因此 $p(Q)$ 是 Q 的单调减少函数.

$E(Q)$ 的导数 $E'(Q)$ 相应地称为**边际收益**，其经济学意义是在总共生产销售了 Q 件产品的情况下，销售出第 Q 件产品所得到的收入.

总收益减去总成本便是总利润. 将利润函数记为 $P(Q)$，则

$$P(Q)=E(Q)-C(Q),$$

当 $E(Q)$ 和 $C(Q)$ 二阶可导时，利用 Lagrange 中值定理的推论 2，就可以得到经济学中的“**最大利润原理**”：

“当且仅当边际成本与边际收益相等，并且边际成本的变化率大于边际收益的变化率时，可取得最大利润.”

这里的第一个条件即为

$$P'(Q)=E'(Q)-C'(Q)=0,$$

而第二个条件可表示为

$$P''(Q)=E''(Q)-C''(Q)<0,$$

请读者自行思考它们的经济学意义.

比如，某产品的价格 $p(Q)=a-bQ\ \left(a,b>0,Q<\frac{a}{b}\right)$，成本 $C(Q)=f+vQ$，于是利润

$$\begin{aligned}P(Q)&=E(Q)-C(Q)\\&=-bQ^2+(a-v)Q-f,\end{aligned}$$

要使得整个生产经营不亏本，显然在定价时须保证 $a-v>0$.

容易算出，当产量 $Q_0=\frac{a-v}{2b}$ 时有 $P'(Q_0)=0$ 和 $P''(Q_0)<0$，这时所获取的利润为最大.

从数学角度讲，经济活动中的最值问题与其他类型最值问题本质上是相同的，因此，读者不难举一反三，用类似的数学原理和数学工具去分析求解这一类问题(参见习题 18 和 19)，这里不再详细展开了.

数学建模

随着科学技术的发展，越来越多的人认识到了“高技术本质上是一种数学技术”这一精辟的观点. 近半个世纪以来，数学与电子计算机技术相结合，在解决自然科学、工程技术乃至社会科学等各个领域的实际问题中大显身手，取得了令人瞩目的成绩.

要用数学技术去解决实际问题，首先必须将所考虑的现实问题通过“去芜存菁，去伪存真”的深入分析和研究，归结为一个相应的数学问题，这个过程称

为**数学建模**,所得到的数学问题称为**数学模型**.

数学建模可以使用多种数学方法,甚至对同一现实问题可以建立不同形式的数学模型,而其中最重要、最常用的数学工具是微分.作为数学建模过程的示例,这里我们利用已学过的微分知识,来导出一些简单的数学模型.在本书的以后各部分中,我们还将利用新的知识导出一些较为复杂的数学模型,并设计一部分习题,为读者今后系统地学习数学建模奠定基础.

例 5.5.7(Malthus 人口模型) 设 $p(t)$是某地区的人口数量函数,那么由第四章的§2,该地区在单位时间中的人口增长数,即人口增长速率应为人口数量函数的导数 $p'(t)$.

显然,某一时刻的人口数量越多,在单位时间中的人口增长数也就越多.通过对当时的资料分析,Malthus 假定这两者成比例关系,设比例系数为 λ(可以由已有的资料定出),于是他在 1798 年提出了人类历史上的第一个人口模型

$$\begin{cases} p'(t) = \lambda p(t), \\ p(t_0) = p_0, \end{cases}$$

这里,象"$p'(t)=\lambda p(t)$"这样含有未知函数的导数(或微分)的方程称为**微分方程**,而"$p(t_0)=p_0$"称为微分方程的**初始条件**,p_0 代表在某个给定的 t_0 时刻的实际人口数.

将"$p'(t)=p_0$"写成微分形式

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = \lambda \mathrm{d}t,$$

把它看成是由某个隐函数

$$f(p) = g(t)$$

两边求微分的结果,由一阶微分的形式不变性和基本初等函数的微分表,即得

$$f(p) = \ln p + C, \qquad g(t) = \lambda t + C,$$

C 是任意给定的常数.于是

$$\ln p = \lambda t + C,$$

也就是

$$p = C_1 e^{\lambda t}$$

$C_1=e^C$ 还是任意常数(一般仍记成 C).令 $t=t_0$ 并利用初始条件 $p(t_0)=p_0$,可以定出

$$C_1 = p_0 e^{-\lambda t_0},$$

最终得到人口数量函数

$$p(t) = p_0 e^{\lambda(t-t_0)}.$$

以上求未知函数 $p(t)$ 的过程称为**解微分方程**，其结果“$p(t)=p_0e^{\lambda(t-t_0)}$”称为该微分方程的**满足初始条件**的**解**.

实际问题所归结的数学模型一般都以各种微分方程的形式出现，因此以后将会有专门的课程来讨论微分方程及其求解的问题，下面我们再举一个简单的例子.

例 5.5.8 在供水、化工生产等过程中，都有一个对液体进行过滤，除去渣滓的问题. 现以过滤式净水器的使用为例，来建立相应的数学模型.

要对液体进行过滤，首先要设置一个由过滤物质组成的过滤层(称为滤芯). 在过滤的过程中，水中的杂质沉积在过滤层上，也成为过滤层的一部分. 假设杂质在水中的含量和进水的压力都是常数，那么杂质沉积的厚度与累积的总滤出流量 $Q(t)$ 成正比，同时，流速的减少与杂质沉积的厚度也成正比. 若设初始时刻的流速为 q_0，由导数的意义即知 t 时刻的流速应当是 $Q'(t)$，从而流速的减少量为 $q_0-Q'(t)$，由上所述，它应与总滤出流量 $Q(t)$ 成正比. 这样，就得到了它的数学模型为

$$\begin{cases} Q'(t)=q_0-\lambda Q(t), \\ Q(0)=0. \end{cases}$$

作代换 $Q_1=q_0-\lambda Q(t)$，便有

$$\begin{cases} Q'_1(t)=-\lambda Q_1(t), \\ Q_1(0)=q_0, \end{cases}$$

这是关于 $Q_1(t)$ 的微分方程，它与例 5.5.7 所得到的微分方程的形式完全相同.

采用例 5.5.7 类似的方法，可以求出

$$Q_1(t)=q_0e^{-\lambda t},$$

即得到累积的总滤出流量为

$$Q(t)=\frac{1}{\lambda}(q_0-Q_1(t))=\frac{q_0}{\lambda}(1-e^{-\lambda t}).$$

因为

$$\lim_{t\to+\infty}Q(t)=\frac{q_0}{\lambda}$$

和

$$\lim_{t\to+\infty}Q'(t)=0,$$

所以我们可以知道，在定压的过滤过程中，并不是想滤多少就可以不受限制地滤多少，其流出的总量是有上限 $\frac{q_0}{\lambda}$ 的. 在流量接近这个上限的时候，其流速将趋近于零，也就是说，此时杂质已沉积得过厚，需要清洗或更换滤芯了.

习 题

1. 求下列函数的极值点,并确定它们的单调区间:

(1) $y=2x^3-3x^2-12x+1$;

(2) $y=x+\sin x$;

(3) $y=\sqrt{x}\ln x$;

(4) $y=x^n e^{-x}\quad(x\geqslant 0)$;

(5) $y=\sqrt[3]{\dfrac{(x+1)^2}{(x-2)}}$;

(6) $y=\dfrac{1-x}{1+x^2}$;

(7) $y=3x+\dfrac{4}{x},\quad(x>0)$;

(8) $y=x-\ln(1+x)$;

(9) $y=\cos^3 x+\sin^3 x$;

(10) $y=\arctan x-x$;

(11) $y=2e^x+e^{-x}$;

(12) $y=2-\sqrt[3]{(x-1)^2}$;

(13) $y=\dfrac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$;

(14) $y=x^{\frac{1}{x}}$.

2. 求下列函数的拐点,并确定它们的保凸区间:

(1) $y=-x^3+3x^2$;

(2) $y=x+\sin x$;

(3) $y=\sqrt{1+x^2}$;

(4) $y=xe^{-x}$;

(5) $y=\sqrt[3]{\dfrac{(x+1)^2}{(x-2)}}$;

(6) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x}$;

(7) $y=\arctan x-x$;

(8) $y=x-\ln(1+x)$,

(9) $y=(x+1)^4+e^x$;

(10) $y=\ln(1+x^2)$;

(11) $y=e^{\arctan x}$;

(12) $y=x+\sqrt{x-1}$.

3.(1)设 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导,证明:$f(x)$ 在 x_0 处取到极大值(极小值)的必要条件是 $f'(x_0)=0$ 且 $f''(x_0)\leqslant 0(f''(x_0)\geqslant 0)$.

(2)证明定理 5.5.1 的第二部分.(提示:利用带 Peano 余项的 Taylor 公式)

4. 设 $f(x)=(x-a)^n\varphi(x)$,$\varphi(x)$ 在 $x=a$ 连续且 $\varphi(a)\neq 0$,讨论 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的极值情况.

5. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处有 n 阶连续导数,且 $f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$,$f^{(n)}(a)\neq 0$,讨论 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的极值情况.

6. 证明曲线 $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$ 有在同一直线上的三个拐点.

7. 如何选择参数 $h>0$,使得

$$y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$$

在 $x=\pm\sigma$($\sigma>0$ 为给定的常数)处有拐点?

8. 求 $y=\frac{x^2}{x^2+1}$ 在拐点处的切线方程.

9. 在 Oxy 坐标系作出下列函数的大致图形(渐近线方程可利用上一节习题9的结果):

(1) $y=\frac{x^2}{1+x}$;　　(2) $y=\frac{2x}{1+x^2}$;

(3) $y=\sqrt{6x^2-8x+3}$;　　(4) $y=(2+x)e^{\frac{1}{x}}$;

(5) $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$;　　(6) $y=\ln\frac{1+x}{1-x}$;

(7) $y=x+\operatorname{arccot} x$;　　(8) $y=\sqrt[3]{(x-2)(x+1)^2}$;

(9) $y=\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$;　　(10) $y=2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$.

10. 求下列数列的最大项:

(1) $\left\{\frac{n^{10}}{2^n}\right\}$;　　(2) $\{\sqrt[n]{n}\}$.

11. 对 a 作了 n 次测量后获得了 n 个近似值 $\{a_k\}_{k=1}^n$,现在要取使得

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-\xi)^2$$

达到最小的 ξ 作为 a 的近似值,ξ 应如何取?

12. 证明:对于给定了体积的圆柱形,当它的高与底面的直径相等的时候表面积最小.

13. 在底为 a 高为 h 的三角形中作内接矩形,矩形的一条边与三角形的底边重合,求此矩形的最大面积.

14. 求内接于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,边与椭圆的轴平行的最大矩形.

15. 将一块半径为 r 的圆铁片剪去一个圆心角为 θ 的扇形后做成一个漏斗,问 θ 为何值时漏斗的容积最大?

16. 要做一个容积为 V 的有盖的圆柱形容器,上下两个底面的材料价格为每单位面积 a 元,侧面的材料价格为每单位面积 b 元,问直径与高的比例

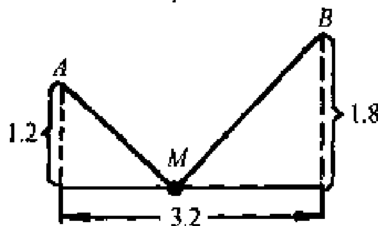


图 5.5.6

为多少时造价最省？

17. 要建造一个变电站 M 向 A、B 两地送电(图 5.5.6)，M 与 A 之间的电缆每千米 a 元，与 B 之间的电缆每千米 b 元，问变电站造在何处能使总投资最小？

18. 洗过的衣服含有洗衣粉残液，现用总量为 $A\mathrm{m}^3$ 的清水漂洗，漂洗一遍再甩下后衣服上有 $a\mathrm{m}^3$ 的水分，

(1)若规定漂洗两遍，问如何分配两次的用水量，才能使漂洗的效果最好？

(2)若规定每次漂洗的用水量相同，问分几遍漂洗才能使漂洗的效果最好？

19. 某商店月销某商品 1 万件，每批进货需运输等费用 100 元，而每件每日的库存费用为 0.05 元，若销售量是均匀的，且每批销完后立即进下一批货，问：

(1)若规定每月进货两次，问每次进货多少才能使总费用最少？

(2)若规定每批进货的数量相同，问分几批进货可使总费用最少？

§6 函数方程的近似求解

解析方法和数值方法

求解函数方程

$$f(x) = 0$$

也称为函数方程求根，就是要去寻找一个(或一组)数 x^*，使得满足

$$f(x^*) = 0,$$

这是实际应用中大量遇到的问题.

求解函数方程的主要方法有两种：解析方法和数值方法.

解析方法也称为公式法，它是将方程的根表达为方程的系数的函数形式，只要把待求的方程的系数代入表达式，就可以求出方程的根. 如果不考虑运算中的四舍五入所产生的误差，那么在理论上，解析方法所得到的解是精确的，我们将这个解称为**解析解**或**精确解**，解析方法也因此而被称为精确方法.

例如，对于一元二次方程

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0),$$

可以得到它的两个根为

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

这就是在用解析方法求解方程.

但十分遗憾的是，除了我们在中学里已学过的简单的三角方程、对数方程和指数方程等情况之外，能精确求解的方程的数量和种类与实际需要求解的

问题相比,只能说是九牛之一毛.例如,形如

$$y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

的代数多项式,可以算是最简单的一类函数了,而著名法国数学家 Galois 在一个半世纪之前就证明了,当 $n \geqslant 5$ 时,对它不存在一般的求根公式.因此,对于更为复杂的超越函数,就更不能指望有什么普遍适用的、可以求得精确的根的公式了.

数值方法是一种求近似解的方法.粗略地说,它无意去追究函数方程的根与系数本质上到底存在着什么样的联系,而只是设法去构造一个可实际计算的过程,并通过这个过程产生方程的精确解的一系列近似值.在一定的条件下,这些近似值理论上将收敛于方程的精确解,因此可以用精度较高的近似值来代替精确解,我们称其为**数值解或近似解**.由于实际问题中提出的许许多多形态迥异的函数方程绝大多数都无法找到其解析解,因此,数值方法是用数学工具解决实际问题过程中的一个重要方法.

二分法

对于一个实的函数方程

$$f(x) = 0,$$

最简单的数值求根方法无过于**二分法**,它的具体计算过程与用闭区间套定理证明闭区间上连续函数的零点存在定理的过程差不多.

设 $f(x)$在$[a,b]$中连续,且成立

$$f(a) \cdot f(b) < 0,$$

那么在$[a,b]$至少存在着$f(x)$的一个根 x^*.假定 $f(x)$在$[a,b]$中只有这个根,我们希望求出它的近似值 $\tilde{x}$,满足

$$|\tilde{x} - x^*| \leqslant \varepsilon_0,$$

这里 ε_0 是预先给定的精度要求,如 10^{-8}、10^{-15}等等,那么可以这么进行:

(1)记$[a_1,b_1]=[a,b]$;取 x_1 为$[a_1,b_1]$的中点,即 $x_1=\frac{a_1+b_1}{2}$.

(2)计算 $f(x_1)$:

若 $f(x_1)=0$,则 x_1 即为方程的根 x^*,取 $\tilde{x}=x_1$,计算结束.

(3)否则,按如下规则得到区间$[a_2,b_2]$:

(a)若 $f(x_1)\cdot f(b_1)<0$.

此时 $f(x)$的根在$[x_1,b_1]$中,取 $a_2=x_1$,$b_2=b_1$.

(b)若 $f(x_1)\cdot f(b_1)>0$.

此时 $f(a_1)\cdot f(x_1)<0$,因此 $f(x)$的根在$[a_1,x_1]$中,取 $a_2=a_1$,$b_2=x_1$.

易知 $x^*\in[a_2,b_2]$,且$[a_2,b_2]$的长度是$[a_1,b_1]$的一半.

(4)取 x_2 为 $[a_2,b_2]$ 的中点.

(5)类似地,若 x_2 是方程的根 x^*,计算结束;否则可得到 $[a_3,b_3]$.

(6)重复上述过程……

假设执行过程中没有发生 x_k 恰好等于 x^* 的情况,由于对任何 k 都有

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^{k-1}},$$

而 $[a_k,b_k]$ 的中点 x_k 与精确解 x^* 的距离不会超过 $[a_k,b_k]$ 长度的一半,因此成立

$$|x_k - x^*| \leqslant \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b-a}{2^k}$$

所以,当执行到

$$k = \left[\log_2 \frac{b-a}{\varepsilon_0}\right]^+$$

时,必有

$$|x_k - x^*| \leqslant \frac{b-a}{2^k} \leqslant \varepsilon_0,$$

于是,$\bar{x} = x_k$ 便是符合精度要求的近似解.

Newton 迭代法

数值计算中常用的求近似值的方法是**迭代法**.先将原来的方程

$$f(x) = 0$$

化为等价的形式

$$x = F(x),$$

所谓"等价"是指若 x^* 是 $f(x)$ 的根,则成立

$$x^* = F(x^*),$$

反之亦然.这里的 $F(x)$ 称为**迭代函数**.

取一个适当的初始值 x_0,按

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad k = 0,1,2,\cdots$$

产生序列 $\{x_k\}$(设每个 x_k 都属于 $F(x)$ 的定义域),这样的计算过程称为**迭代**.若在理论上成立

$$x_k \to x^* \quad (k \to \infty),$$

那么显然 x^* 就是原方程的根,因此只要在迭代过程中,选取某个合适的 x_k 作为 $\bar{x}$,就得到原方程的近似解了.(理论上,所选取的 x_k 应满足精度要求

$$|x_k - x^*| \leqslant \varepsilon_0,$$

但 x^* 是不知道的,所以实际计算时往往采用比较相邻两次的迭代值是否满足

$$|x_{k+1}-x_k|\leqslant\varepsilon_0,$$

来决定迭代是否继续进行下去.)

构造迭代函数可以有各种各样的方法,比如,最简单的可以取

$$F(x)=x-f(x),$$

下面我们利用 Taylor 公式来举一个例子.

设 $f(x)$ 在含有 x^* 的某个区间 $[a,b]$ 中具有二阶连续导数,且 $\forall x\in[a,b]$,都有 $f'(x)\neq 0$.作出 $f(x^*)$ 在 x 处的 Taylor 公式,由于 x^* 是 $f(x)$ 的根,则有

$$f(x^*)=f(x)+f'(x)(x^*-x)+f''(\xi)\frac{(x^*-x)^2}{2}=0,$$

也即

$$x^*=x-\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f''(\xi)}{f'(x)}\cdot\frac{(x^*-x)^2}{2}.$$

当 $x\to x^*$ 时,上式的最后一项是趋向于零的,因此有

$$\lim_{x\to x^*}\left[x-\frac{f(x)}{f'(x)}\right]=x^*-\frac{f(x^*)}{f'(x^*)}=x^*.$$

这样,

$$F(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

就是一个满足 $x^*=F(x^*)$ 要求的迭代函数,由此得到迭代公式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\quad k=0,1,2,\cdots,$$

这就是解函数方程的著名的 **Newton 迭代法**(简称 Newton 法).

Newton 法具有明显的几何意义.求解 $f(x)=0$ 实际上是求曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴的交点的横坐标,曲线在 $x=x_k$ 处的切线方程为

$$y=f'(x_k)(x-x_k)+f(x_k)$$

它与 x 轴的交点的横坐标恰为

$$x=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_{k+1}.$$

也就是说,Newton 法实质上是通过曲线的一系列的切线与 x 轴的交点的横坐标,来逼近曲线与 x 轴的交点的横坐标(图 5.6.1),所以 Newton 迭代法也叫 **Newton 切线法**.

我们不加证明地给出如下结论.

定理 5.6.1 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中有二阶连续导数,且满足条件

(1) $f(a)\cdot f(b)<0$;

(2) $f'(x)$ 在 (a,b) 保号;

(3) $f''(x)$ 在 (a,b) 保号;
取 x_0 是 a 和 b 中满足

$$f(x_0)\cdot f''(x_0)>0$$

的那一个点,则以 x_0 为初值的 Newton 迭代过程

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\quad k=0,1,2,\cdots,$$

产生的序列 $\{x_k\}$ 单调收敛于方程

$$f(x)=0$$

在 $[a,b]$ 中的唯一解.

这里,条件(1)保证了 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有根;条件(2)表明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 严格单调,因此 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中的根是唯一的;而条件(3)表示 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中保持凸或凹,这保证了每一个 x_{k+1} 都在同一方向上比 x_k 更靠近 x^*(读者可以用作图的方法验证这一点),因此 $\{x_k\}$ 是一个单调有界数列,它必有极限,这个极限当然就是 x^*.

例 5.6.1 解方程

$$\ln x=\sin x.$$

解 记 $f(x)=\ln x-\sin x$,考虑区间 $\left[\frac{\pi}{2},e\right]$,则有

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\ln\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}<0,$$
$$f(e)=\ln e-\sin e>0.$$

而

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\cos x,\qquad \forall x\in\left[\frac{\pi}{2},e\right],$$

$$f''(x)=\sin x-\frac{1}{x^2}>\sin e-\frac{4}{\pi^2}>0,\qquad \forall x\in\left[\frac{\pi}{2},e\right],$$

所以符合定理 5.6.1 的全部条件.

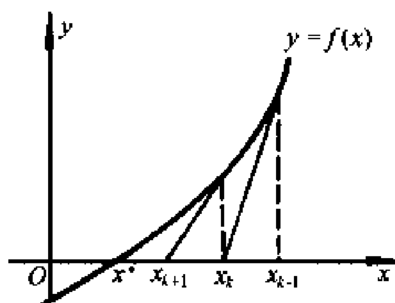


图 5.6.1

因为

$$f(\mathrm{e})f''(\mathrm{e}) > 0,$$

所以初值取为 $x_0=\mathrm{e}$,计算结果如下:

k	x_k	$\lvert x_k - x^*\rvert$
1	2.257 815 620 636 622 89	3.87×10^{-2}
2	2.219 512 490 173 004 78	4.05×10^{-4}
3	2.219 107 195 173 873 23	4.63×10^{-8}
4	2.219 107 148 913 746 83	8.88×10^{-16}

最后,取 $\tilde{x}=x_4=2.219\ 107\ 148\ 913\ 746\ 83$ 作为 x^* 的近似值.

从计算结果可以发现,每迭代一次,误差中的负指数大致增加了一倍,这是当 x_k 与 x^* 很接近时,Newton 法的一个重要性质. 由 Taylor 公式容易导出,

$$x^* - x_{k+1} = -\frac{f''(\xi)}{f'(x_k)}\cdot\frac{(x^*-x_k)^2}{2},$$

这里 ξ 在 x_k 与 x^* 之间,因此

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\lvert x^*-x_{k+1}\rvert}{\lvert x^*-x_k\rvert^2}=\frac{1}{2}\left|\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}\right|=C.$$

所以,我们称 Newton 法是一个二次收敛(也叫平方收敛)的迭代方法,或者说,Newton 迭代法的收敛速度是二次的.

当今世界上,电子计算机可以说是人类的一个最重要的工具. 但任何一台高性能的计算机,归根结底只能对二进制数码进行加法和移位两种运算,从算术角度来讲,它只能进行加、减、乘三种运算,只不过它的运算速度极其惊人罢了.

那么,计算机是如何计算除法、开方乃至它所提供的其它各种基本初等函数的呢? 主要有两种途径,一种是利用某些近似公式,如 Taylor 多项式(只要加、减、乘三种运算就足够了)等,而另一种就是通过用上述的 Newton 法解方程来达到目的的.

例 5.6.2 用 Newton 法求 $\sqrt{A}$, $A>0$ 是一个给定的数.

解 显然,求 $\sqrt{A}$ 等价于求方程

$$f(x)\equiv x^2 - A = 0$$

的零点 $x^*(x^*\in\mathbf{R}^+)$.

计算机首先自动寻找一个正整数 n,使得

$$(n-1)^2 < A < n^2,$$

然后取 $x_0=n$,用 Newton 迭代

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - A}{2x_k} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{A}{x_k}\right), \quad k = 0,1,2,\cdots,$$

得到序列$\{x_k\}$,可以验证,在区间$[n-1,n]$上定理 5.6.1 的条件全部满足,因此 $x_k \to x^* = \sqrt{A}$.

下面是以 $x_0=3$ 为初值求$\sqrt{7}$的计算结果,只要做十余次四则运算——这在计算机上只是一瞬间的事,就得到了精度不低于 $O(10^{-17})$的近似值.

k	x_k	$\lvert x_k-\sqrt{7}\rvert$
1	2.666 666 666 666 666 52	2.09×10^{-2}
2	2.654 833 333 333 333 48	8.20×10^{-5}
3	2.645 751 312 335 958 17	1.27×10^{-9}
4	2.645 751 311 064 590 72	$<10^{-17}$

在计算机上做除法和求 n 次方根$\sqrt[n]{A}$的思路是类似的,都是先将其转化为方程求根问题,再用 Newton 法迭代出近似解,具体步骤留给读者思考.

最后再做几点说明.

1. 定理 5.6.1 的条件是充分的而不是必要的,读者可以自行举例来说明这一点.

但是条件不满足时迭代确实有可能不收敛,图 5.6.2 给出了条件(2)和(3)分别不满足时 Newton 法不收敛的情形. 在图(a)中 $f'(x)\neq0$ 被破坏,$f(x)$在$[a,b]$中有一个极值点,而在图(b)中,$f''(x)\neq0$ 被破坏,$[a,b]$中有$f(x)$的一个拐点. 从图中可以看到,这时迭代序列在两个固定点间无休止地来回跳动,迭代过程以失败而告终.

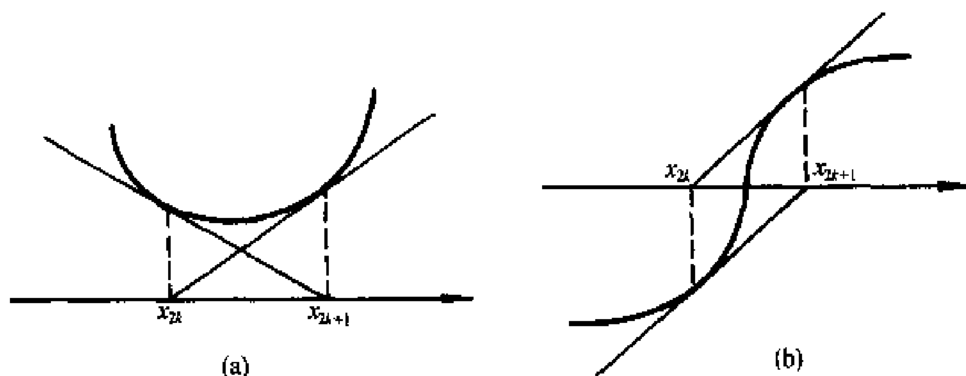


图 5.6.2

2. Newton 迭代法是求解函数方程最基本和最重要的方法之一,它可以推广到由若干个方程构成的方程组的求解上去,在理论研究上有着重要的意义. 同时,在实际求解函数方程中,它常常又是首选的方法. 由于迭代函数比较简单,除了一些导函数特别复杂的情况之外,每做一步迭代所化的运算量是比较小的,当初值选得好时收敛速度相当快,编程也比较容易.

3. 与 Newton 法相比，二分法最突出的优点是对求根函数 $f(x)$ 的要求较低，只要连续就行了，因此有些性质较差的函数只能用二分法而不能用 Newton 法来求根. 另外，它每做一步迭代所化的计算量也较小(只需要计算函数值)，并且可以根据精度的要求事先确定执行的步数 $n=\left[\log_2\dfrac{b-a}{\varepsilon_0}\right]^+$，编程和上机实现都比较简单. 但它的主要缺点是收敛速度不快. 例如，要达到例 5.6.1 中 x_4 的同样精度，用二分法需进行 50 多次对分.

4. 当函数 $f(x)$ 的导函数不太容易算时，可以用

$$\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$$

近似代替 $f'(x_k)$，这时的迭代公式成为

$$\begin{cases}\text{取初值 } x_0, x_1,\\ x_{k+1}=x_k-f(x_k)\dfrac{x_k-x_{k-1}}{f(x_k)-f(x_{k-1})}, \quad k=1,2,\cdots\end{cases}$$

它的几何意义是用过 $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ 和 $(x_k, f(x_k))$ 的割线代替过 $(x_k, f(x_k))$ 的切线，将这条割线与 x 轴的交点的横坐标作为新的近似值 x_{k+1}(见图 5.6.3)，因此这个方法也叫**割线法或弦割法**.

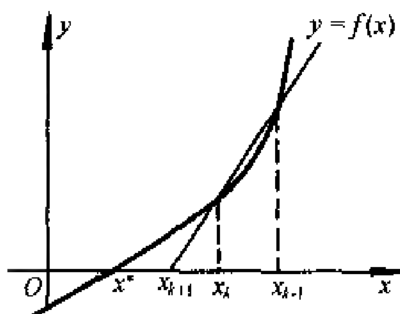


图 5.6.3

割线法满足

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|x^*-x_{k+1}|}{|x^*-x_k|^{1.618}}=C,$$

因此收敛速度稍慢于 Newton 法，但由于它每做一步迭代只需要计算一次函数值，运算量小，且又避免了导数运算，因而也是一种很常用的数值求解方法(在求解由多个方程联立的函数方程组时更是如此).

计算实习题

(在教师的指导下，编制程序在电子计算机上实际计算)

1. 用两分法求下列函数方程的一个近似根(精确到小数点后第 6 位):

(1)$x^3+3x-5=0$, $x^*\in[1,2]$;

(2)$x=e^{-x}$, $x^*\in\left[\frac{1}{2},\ln 2\right]$;

(3)$x^2=\cos x$, $x^*\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]$;

(4)$7x^2-3x+\frac{4}{x}=0$, $x^*\in[2,2.5]$.

2. 用 Newton 法求下列函数方程的近似根(精确到小数点后第 10 位):

(1)$x^3-x+4=0$; (2)$x^2+\frac{1}{x^2}=10x$;

(3)$x\lg x=1$; (4)$x+e^x=0$;

(5)$\frac{x}{2}=\sin x$; (6)$\cos x\cdot\mathrm{ch}\, x=1$.

3. 仿照例 5.6.2,用 Newton 法导出计算机上求 $A^{\frac{1}{n}}(A>0,n$ 为非零实数)和$\frac{1}{A}$的算法(即只用加、减、乘三种运算的算法),并实际计算下列各值:

(1)$\sqrt[3]{2}$; (2)$\frac{1}{\sqrt[5]{9}}$; (3)$\frac{1}{7}$; (4)$\frac{1}{11}$.

4. 当 $\varepsilon=0.2$ 时,计算 Kepler 方程

$$y-x-\varepsilon\sin y=0\quad(0<\varepsilon<1)$$

对应于 $x=\frac{k}{8}(k=1,2,\cdots,8)$的 y 的近似值.

5. 求方程

$$\tan x=x$$

的最小的三个正根,精确到 10^{-12}.

6. 求方程

$$\cot x=\frac{1}{x}-\frac{x}{2}$$

的两个正根,精确到 10^{-12}.

第六章　不定积分

§1　不定积分的概念和运算法则

微分的逆运算——不定积分

通过前两章的学习，我们已经能够比较熟练地计算出一个给定函数的微分或导数，并初步用它来解决某些简单的问题了. 但在实际中，我们经常需要解决的另一个（或许可以说更重要的）问题是，如何在只知道一个函数的微分或导数的情况下，将这个函数“复原”出来.

如为了求解上一章的最后一节中的人口模型问题

$$\begin{cases} p'(t) = \lambda p(t), \\ p(t_0) = p_0, \end{cases}$$

我们将“$p'(t)=\lambda p(t)$”写成微分形式

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = \lambda \mathrm{d}t,$$

并把它看成是对某个隐函数

$$f(p) = g(t)$$

两边求微分的结果，这就是在已知

$$\mathrm{d}(f(p)) = \frac{1}{p}\mathrm{d}p, \qquad \mathrm{d}(g(t)) = \lambda \mathrm{d}t$$

的情况下，设法求出未作微分运算之前的 $f(p)$ 和 $g(t)$ 的问题.

而已知速度函数 $v(t)$，要求位移函数 $s(t)$；已知一条平面曲线在任一点 x 处的切线斜率，要求这条曲线等问题，是已知一个函数的导数求该函数，它们与上面的例子是同一类的问题.

下面我们来给出它的一般提法.

定义 6.1.1　*若在某个区间上，函数 $F(x)$ 和 $f(x)$ 成立关系*

$$F'(x) = f(x),$$

或等价地，

$$\mathrm{d}(F(x)) = f(x)\mathrm{d}x,$$

*则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在这个区间上的一个***原函数**.

这儿称“一个”原函数，是由于一个函数若存在原函数，那么它的原函数必定是不唯一的. 比如，若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，即 $F'(x)=f(x)$，那么对任何常数 C，都有 $[F(x)+C]'=f(x)$，由定义 6.1.1，$F(x)+C$ 也是 $f(x)$ 的原函数，所以 $f(x)$ 的原函数有无穷多个.

那么,$f(x)$的所有这些原函数是否都具有 $F(x)+C$ 的形式,或者说,它们之间是否至多相差一个常数呢? 回答是肯定的.若 $G(x)$是 $f(x)$的任一个原函数,则 $G'(x)=f(x)$,也即

$$[F(x)-G(x)]'=0.$$

由 Lagrange 中值定理的推论 1,$F(x)-G(x)\equiv C$,即 $G(x)=F(x)+C$.

所以,只要求出了 $f(x)$的任意一个原函数 $F(x)$,就可以用 $F(x)+C$ 来代表 $f(x)$的全部原函数了.

定义 6.1.2 一个函数 $f(x)$的原函数全体称为这个函数的**不定积分**,记作 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

这里,"$\int$"称为**积分号**,$f(x)$称为**被积函数**,x 称为**积分变量**.显然,积分变量采用的字母是无关紧要的,也就是说,对于 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$,在需要的时候也不妨将它写成诸如

$$\int f(u)\mathrm{d}u = F(u)+C,\quad \int f(t)\mathrm{d}t = F(t)+C$$

等形式.

从定义 6.1.1 和 6.1.2 可以知道,求不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 就是由一个函数的微分 $f(x)\mathrm{d}x$ 求这个函数本身,因此,微分运算"d"与不定积分运算"$\int$"就像加法与减法、乘法与除法、指数与对数那样,构成了一对逆运算:

$$\begin{array}{ccc} F(x) & \xrightarrow{\ \mathrm{d}\ } & \\ & & f(x)\mathrm{d}x, \\ F(x)+C & \xleftarrow[\int]{} & \end{array}$$

或者具体写成

$$\mathrm{d}\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)= f(x)\mathrm{d}x \quad \left(\text{即}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)= f(x)\right)$$

与

$$\int \mathrm{d}F(x) = F(x)+C.$$

说得简单一些,可以认为微分号和积分号在一起时可以互相抵消(先做微分运算后做不定积分运算时要相差一个常数).

例 6.1.1 求 $\int \sin x\mathrm{d}x$.

这道题实际上是要我们去寻找一族函数,它们的微分都等于 $\sin x\mathrm{d}x$.

解 由于 $\mathrm{d}(\cos x)=-\sin x\mathrm{d}x$,即 $\mathrm{d}(-\cos x)=\sin x\mathrm{d}x$,因此得到

$$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C.$$

在观念上,我们从微分的概念出发去讨论不定积分,在理论推导时也确实大多是这样做的.但是,由导数和微分的关系,人们总是通过导数公式间接记忆微分公式的,因而在实际计算不定积分时,从导数出发往往比从微分公式出发更直截了当些.

例 6.1.2 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$.

解 当 $x>0$ 时,$(\ln x)'=\frac{1}{x}$,因此这时有

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x + C \quad (x>0).$$

当 $x<0$ 时,由复合函数求导法则,有 $[\ln(-x)]'=\frac{1}{-x}(-1)=\frac{1}{x}$,因此这时有

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln(-x) + C \quad (x<0).$$

把两式结合起来,便得到

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C.$$

不定积分的线性性质

定理 6.1.1(线性性质) *若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的原函数都存在,则对任意常数 k_1 和 k_2,函数 $k_1f(x)+k_2g(x)$ 的原函数也存在,且有*

$$\int [k_1f(x)+k_2g(x)]\mathrm{d}x = k_1\int f(x)\mathrm{d}x + k_2\int g(x)\mathrm{d}x.$$

(当 $k_1=k_2=0$ 对,右端理解为常数 C.)

证 设 $F(x)$ 和 $G(x)$ 分别为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的一个原函数,那么

$$F'(x)=f(x), \qquad G'(x)=g(x),$$

则对任意常数 k_1 和 k_2,由微分运算的线性性质,得到

$$[k_1F(x)+k_2G(x)]' = k_1F'(x)+k_2G'(x) = k_1f(x)+k_2g(x),$$

由定义,$k_1f(x)+k_2g(x)$ 的原函数存在.

因为函数

$$\int [k_1f(x)+k_2g(x)]\mathrm{d}x - \left[k_1\int f(x)\mathrm{d}x + k_2\int g(x)\mathrm{d}x\right]$$

的导数为零,所以 $\int [k_1f(x)+k_2g(x)]\mathrm{d}x$ 与 $k_1\int f(x)\mathrm{d}x + k_2\int g(x)\mathrm{d}x$ 至多相差一个常数.但由于不定积分的结果本身就带有一个任意常数,因此可以表达为

$$\int [k_1 f(x) + k_2 g(x)]\mathrm{d}x = k_1\int f(x)\mathrm{d}x + k_2\int g(x)\mathrm{d}x.$$

证毕

根据微分与不定积分的关系以及基本初等函数的微分公式,我们可以得到一些最基本的不定积分公式,例如:

微分	不定积分
$\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$	$\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$
$\mathrm{d}(\ln x)=\frac{\mathrm{d}x}{x}$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln\|x\|+C$
$\mathrm{d}(x^\alpha)=\alpha x^{\alpha-1}\mathrm{d}x(\alpha\neq 0)$	$\int x^\alpha\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C,(\alpha\neq -1)$
$\mathrm{d}(\sin x)=\cos x\mathrm{d}x$	$\int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$
$\mathrm{d}(\cos x)=-\sin x\mathrm{d}x$	$\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$
$\mathrm{d}(\tan x)=\sec^2 x\mathrm{d}x$	$\int \sec^2 x\mathrm{d}x=\tan x+C$
$\mathrm{d}(\cot x)=-\csc^2 x\mathrm{d}x$	$\int \csc^2 x\mathrm{d}x=-\cot x+C$
$\mathrm{d}(\sec x)=\tan x\sec x\mathrm{d}x$	$\int \tan x\sec x\mathrm{d}x=\sec x+C$
$\mathrm{d}(\csc x)=-\cot x\csc x\mathrm{d}x$	$\int \cot x\csc x\mathrm{d}x=-\csc x+C$
$\mathrm{d}(\arcsin x)=\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$
$\mathrm{d}(\arctan x)=\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x+C$

不定积分的线性性质和上表可以帮助我们求出一些简单函数的不定积分.

例 6.1.3 $\int \tan^2 x\mathrm{d}x$.

解 利用三角恒等式 $1+\tan^2 x=\sec^2 x$,将被积函数变形后再来求不定积分,

$$\begin{aligned}&\int \tan^2 x\mathrm{d}x\\ =&\int(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x\\ =&\int\sec^2 x\mathrm{d}x-\int 1\cdot\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$=\tan x-x+C.$$

例 6.1.4 求 $\int\frac{(x+\sqrt{x})(x-2\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解 将分子展开后,与分母$\sqrt{x}$相约,被积函数就化成了几个幂函数之和,于是可以求出

$$\begin{aligned}&\int\frac{(x+\sqrt{x})(x-2\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\\=&\int\frac{x^3-3x^2\sqrt{x}+4x\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\\=&\int(x^{\frac{5}{2}}-3x^2+4x)\mathrm{d}x\\=&\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}-x^3+2x^2+C.\end{aligned}$$

例 6.1.5 求 $\int\sin^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x$.

解 利用余弦函数的倍角公式

$$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta,$$

将原式化为

$$\begin{aligned}&\int\sin^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x\\=&\int\frac{1-\cos x}{2}\mathrm{d}x\\=&\frac{1}{2}\int(1-\cos x)\mathrm{d}x\\=&\frac{1}{2}(x-\sin x)+C.\end{aligned}$$

对于一个具体问题来说,不定积分运算中的常数 C 可以根据题目所给的条件来确定.

例 6.1.6 已知曲线 $y=f(x)$在任意一点 x 处的切线斜率都等于x^2,并且经过点(3,2),求该曲线的方程.

解 由题意,有 $f'(x)=x^2$,即 $f(x)$是函数 x^2 的一个原函数,因此

$$f(x)=\int x^2\mathrm{d}x,$$

即有

$$y=\frac{x^3}{3}+C.$$

这是 xy 平面上的一族函数(或称为一个**函数族**),它们在任意一个自变量处

的切线都是互相平行的(图 6.1.1).

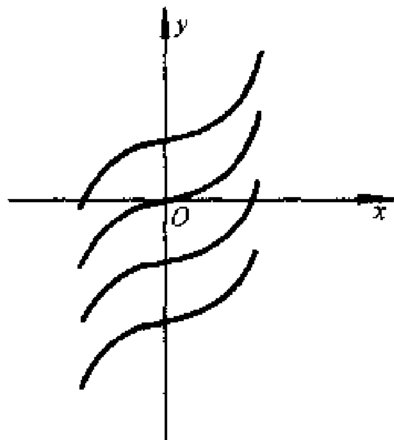


图 6.1.1

由于所求的曲线经过点(3,2),将 $x=3,y=2$ 代入上式,即可解得 $C=-7$,所以,所求的曲线为

$$y=\frac{x^3}{3}-7.$$

在第五章的§5 中求解人口模型时,最后定出常数

$$C_1=p_0e^{-\lambda t_0},$$

实际上采用的是同一种方法.

习　题

1. 求下列不定积分:

(1) $\int(x^3+2x^2-5\sqrt{x})dx$;　(2) $\int(\sin x+3e^x)dx$;

(3) $\int(x^a+a^x)dx$;　(4) $\int(2+\cot^2x)dx$;

(5) $\int(2\csc^2x-\sec x\tan x)dx$;　(6) $\int(x^2-2)^3dx$;

(7) $\int(x+\frac{1}{x})^2dx$;　(8) $\int(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+1)(\frac{1}{\sqrt{x}}+1)dx$;

(9) $\int(2^x+\frac{1}{3^x})^2dx$;　(10) $\int\frac{2\cdot3^x-5\cdot2^x}{3^x}dx$;

(11) $\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx$;　(12) $\int(\frac{2}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}})dx$;

(13) $\int(1-x^2)\sqrt{x\sqrt{x}}dx$;　(14) $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2x\sin^2x}dx$.

2. 曲线 $y=f(x)$经过点$(\mathrm{e},-1)$,且在任一点处的切线斜率为该点横坐标的倒数,求该曲线的方程.

3. 已知曲线 $y=f(x)$在任意一点 x 处的切线斜率都比该点横坐标的立方根少 1,

(1)求出该曲线方程的所有可能的形式,并在直角坐标系中画出示意图.

(2)若已知该曲线经过点(1,1),求该曲线的方程.

§2 换元积分法和分部积分法

能通过查基本积分表再加上线性运算求出不定积分的函数类屈指可数,即使对于如 $y=\tan x$、$y=\ln x$ 这样常用的函数,它也是无能为力的.所以,求一般函数的不定积分必须别寻他途,下面我们介绍两种基本方法.

换元积分法

变量代换是数学研究中最常用的技巧之一,在不定积分运算中尤其有着举足轻重的作用.

由于求不定积分是微分运算 $\mathrm{d}(F(x))=f(x)\mathrm{d}x$ 的逆运算,所以在用换元法求不定积分的过程中,前几章中已得到的微分运算的所有法则都可以畅通无阻,这为我们带来了很大的便利.

换元积分法可以分成两种类型:

(1)在不定积分$\int f(x)\mathrm{d}x$ 中,若 $f(x)$可以变形为 $\tilde{f}(g(x))g'(x)$,而函数 $\tilde{f}(u)$的原函数 $\tilde{F}(u)$又是比较容易求的,那么可以用 $u=g(x)$对原式作变量代换,这时相应地有 $\mathrm{d}u=g'(x)\mathrm{d}x$.于是,由步骤

$$\begin{aligned}\int f(x)\mathrm{d}x &= \int \tilde{f}(g(x))g'(x)\mathrm{d}x\\ &= \int \tilde{f}(u)\mathrm{d}u = \tilde{F}(u)+C = \tilde{F}(g(x))+C,\end{aligned}$$

就可以得到所要的结果.

这个方法称为**第一类换元积分法**.

第一类换元积分法的最简单情况是 $g(x)$为线性函数 $ax+b$.

例 6.2.1 求$\int \frac{\mathrm{d}x}{x-a}$.

解 将 $f(x)=\frac{1}{x-a}$看成是$\tilde{f}(u)=\frac{1}{u}$和 $u=x-a$ 的复合函数,因为 $\mathrm{d}(x-a)=\mathrm{d}x$,所以

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-a} &= \int \frac{\mathrm{d}(x-a)}{x-a} \qquad (\text{作变量代换 } u=x-a)\\ &= \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u|+C \qquad (\text{用 } u=x-a \text{ 代回})\end{aligned}$$

$$= \ln|x-a| + C.$$

同理可以求出

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^n} = -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C \quad (\text{当 } n>1 \text{ 时})$$

和

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left(\int\frac{\mathrm{d}x}{x-a} - \int\frac{\mathrm{d}x}{x+a}\right) = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

例 6.2.2 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}$.

解

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2}\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} \quad \left(\text{作变量代换 } u=\frac{x}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{a}\int\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{1}{a}\arctan u + C \quad \left(\text{用 } u=\frac{x}{a} \text{ 代回}\right)$$

$$= \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C.$$

同理可以求出

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

下面我们来看稍复杂一些的情况.

例 6.2.3 求 $\int \tan x\mathrm{d}x$.

解 因为 $\int \tan x\mathrm{d}x = \int\frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x$,将被积函数看成是由 $y=\frac{1}{u}$ 和 $u=\cos x$ 的复合函数,我们发现 $\sin x\mathrm{d}x$ 恰为 $-(\cos x)'\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$,于是

$$\int \tan x\mathrm{d}x = \int\frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x$$

$$= -\int\frac{(\cos x)'\mathrm{d}x}{\cos x} \quad (\text{作变量代换 } u=\cos x)$$

$$= -\int\frac{\mathrm{d}u}{u} = -\ln|u| + C \quad (\text{用 } u=\cos x \text{ 代回})$$

$$= -\ln|\cos x| + C.$$

等到熟练之后,只要将代换 $u=g(x)$ 默记在心,如例 6.2.3 就可以直接写成

$$\int \tan x\mathrm{d}x = \int\frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = -\int\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

例 6.2.4 求 $\int \sec x\mathrm{d}x$.

解 $\int\sec x\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{1-\sin^2 x}$,

作变量代换 $u=\sin x$,并利用前面得到的

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,$$

$$\begin{aligned}\int\sec x\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin^2 x}\right| + C \\ &= \ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| + C \\ &= \ln|\sec x + \tan x| + C.\end{aligned}$$

可以类似地求出

$$\int\cot x\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$$

和

$$\int\csc x\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C.$$

这样,所有六个基本三角函数的不定积分公式都已经得到了.

例 6.2.5 求 $\int\sin mx\cos nx\mathrm{d}x$.

解 利用三角函数的积化和差公式,有

$$\begin{aligned}&\int\sin mx\cos nx\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(m+n)x}{m+n} + \frac{\cos(m-n)x}{m-n}\right] + C.\end{aligned}$$

可以类似地求出 $\int\sin mx\sin nx\mathrm{d}x$ 和 $\int\cos mx\cos nx\mathrm{d}x$.

(2)若不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 很难直接求出,但能够找到一个适当的变量代换 $x=\varphi(t)$,将原式化为

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\mathrm{d}(\varphi(t)) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

后,$f(\varphi(t))\varphi'(t)$的原函数 $\widetilde{F}(t)$容易求,且 $x=\varphi(t)$的反函数$t=\varphi^{-1}(x)$存在,则可以与第一类换元积分法反其道而行之,通过

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \widetilde{F}(t) + C = \widetilde{F}(\varphi^{-1}(x)) + C$$

得到结果.这个方法称为**第二类换元积分法**.

例 6.2.6 求 $\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$.

解 为了去掉根号,令 $x=\varphi(t)=a\sin t$,于是 $\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$,原式化成

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=a^2\int\cos^2t\ \mathrm{d}t$$

$$=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+C\quad (\text{用 } t=\varphi^{-1}(x)=\arcsin\frac{x}{a}\text{ 代回})$$

$$=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

例 6.2.7 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}$ 和 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

解 对于 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}$,令 $x=\varphi(t)=a\sec t$,于是 $\mathrm{d}x=a\tan t\sec t\mathrm{d}t$,利用例 6.2.4 的结果.有

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\int\sec t\mathrm{d}t=\ln|\sec t+\tan t|+C.$$

用 $\sec t=\frac{x}{a}$ 和 $\tan t=\sqrt{\sec^2t-1}=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{|a|}$ 代回,由于 $C-\ln|a|$ 仍然是一个任意常数,因此

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+C$$

$$=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|-\ln|a|+C$$

$$=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C.$$

类似地可求得

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C.$$

若被积函数中含有诸如 $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$, $\sqrt{x^2+a^2}$ 这样形式的部分,可以分别考虑将变换取为 $x=a\sin t$, $x=a\sec t$ 和 $x=a\tan t$ 以化去根号.

例 6.2.8 求 $\int x(2x-1)^{100}\mathrm{d}x$.

理论上,可以利用二项式定理将被积函数 $x(2x-1)^{100}$ 展开成多项式,其不定积分总是可以算出来的,但因工作量极其巨大,实际上是不可能这么去做的.

解 令 $2x-1=t$,即 $x=\frac{t+1}{2}$,则 $\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}t$,于是

$$\int x(2x-1)^{100}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int(t+1)t^{100}\mathrm{d}t=\frac{1}{4}(\frac{t^{102}}{102}+\frac{t^{101}}{101})+C$$
$$=\frac{(2x-1)^{101}}{4}\left(\frac{2x-1}{102}+\frac{1}{101}\right)+C.$$

有许多题目,既可以采用第一类换元积分法,也可以采用第二类换元积分法,代换的函数形式也可以大不相同,要根据具体情况灵活运用.

例 6.2.9 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}}$.

解一 用第一类换元积分法.当 $x>0$ 时,原式可变形为

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-\int\frac{1}{2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}(-\frac{2}{x^3}\mathrm{d}x),$$

利用 $\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{2}{x^3}\mathrm{d}x$,于是

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}}=-\int\frac{1}{2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\mathrm{d}(\frac{1}{x^2})=-\int\frac{1}{2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\mathrm{d}(1+\frac{1}{x^2})$$
$$=-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+C=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C.$$

容易验证,它也是被积函数在 $x<0$ 时的原函数.(对类似情况,我们以后不再一一加以说明了.)

解二 用第二类换元积分法.做代换 $x=\frac{1}{t}$,则 $\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}$,于是

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}}=-\int\frac{t\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}=-\sqrt{1+t^2}+C$$
$$=-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+C=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C.$$

解三 将两种换元法结合起来.先用第二类换元积分法,做代换 $x=\tan t$,则 $\mathrm{d}x=\sec^2t\mathrm{d}t$,于是

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{\sec^2t\mathrm{d}t}{\tan^2t\sec t}=\int\frac{\cos t\mathrm{d}t}{\sin^2t}.$$

再用第一类换元积分法,

$$\int\frac{\cos t\mathrm{d}t}{\sin^2t}=\int\frac{\mathrm{d}(\sin t)}{\sin^2t}=-\frac{1}{\sin t}+C.$$

最后代回变量,即得到

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}}=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C.$$

分部积分法

分部积分法的理论基础是函数乘积的微分公式.

对任意两个可微的函数 $u(x)$、$v(x)$,成立关系式

$$d[u(x)v(x)]=d[u(x)]v(x)+u(x)d[v(x)],$$

两边同时求不定积分并移项,就有

$$\int u(x)d[v(x)]=u(x)v(x)-\int v(x)d[u(x)],$$

也即

$$\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)dx,$$

这就是**分部积分公式**.

粗略看来,分部积分公式只是把原来需要求的关于 $u(x)v'(x)$的不定积分改为求 $u'(x)v(x)$的不定积分而已,两者的形式又差不多,似乎并无多大的意义.其实不然,在许多时候,直接求

$$\int u(x)v'(x)dx$$

与

$$\int v(x)u'(x)dx$$

相比,难度是大不相同的.下面我们将看到,通过这么一转换,一大类函数求不定积分的问题就迎刃而解了.

例 6.2.10　求 $\int x\cos x dx$.

解　将 x 看成$u(x)$,$\cos x$ 看成$v'(x)$,则 $u'(x)=1$ 而 $v(x)=\sin x$,代入分部积分公式

$$\int x\cos x dx=\int x d(\sin x)$$
$$=x\sin x-\int \sin x dx=x\sin x+\cos x+C.$$

对有些函数,需要重复分部积分若干次才能求出它的不定积分.

例 6.2.11　求 $\int x^2e^x dx$.

解　将 x^2 看成 $u(x)$,e^x 看成$v'(x)$,则 $u'(x)=2x$ 而$v(x)=e^x$,代入分部积分公式

$$\int x^2e^x dx=\int x^2 d(e^x)=x^2e^x-\int e^x d(x^2)=x^2e^x-2\int xe^x dx,$$

对后一项再用一次分部积分,

$$\int xe^x dx=\int x d(e^x)=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+C,$$

于是

$$\int x^2 e^x dx = e^x(x^2 - 2x + 2) + C.$$

等到运算熟练以后,可以省去某些中间步骤.

分部积分时,将哪个函数看成 $u(x)$,哪个函数看成 $v'(x)$是很重要的,弄错的话就有可能使得我们更加一筹莫展.如在例 6.2.10,若将 $\cos x$ 看成 $u(x)$,x 看成$v'(x)$,则 $u'(x)=-\sin x$ 而$v(x)=\frac{x^2}{2}$,代入分部积分公式得到

$$\int x\cos x dx = \int \cos x d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2}\cos x - \int \frac{x^2}{2}(-\sin x)dx,$$

结果事与愿违,最后一项变得比原来的积分更为复杂!

分部积分公式的正确使用大致有四种模式.

(1)通过对 $u(x)$求导降低它的复杂程度,而 $v'(x)$与 $v(x)$的类型相似或复杂程度相当.

记 $p_n(x)$为 n 次多项式,则对于形如$\int p_n(x)\sin \alpha x dx$,$\int p_n(x)\cos \beta x dx$以及$\int p_n(x)e^{\lambda x}dx$ 之类的不定积分,总是取 $p_n(x)$为 $u(x)$,而将另一个函数看成 $v'(x)$,这时 $v(x)$是很容易求的.通过分部积分,$p_n(x)$的次数随着求导而逐次降低,直到最后成为常数.

例 6.2.10 和例 6.2.11 就是这种情况.

(2)通过对 $u(x)$求导使得它的类型与 $v(x)$的类型相同或相近,然后将它们作为一个统一的函数来处理.

例如,对于形如$\int p_n(x)\arcsin x dx$,$\int p_n(x)\arctan x dx$ 和$\int p_n(x)\ln x dx$ 之类的不定积分,总是取 $p_n(x)$为 $v'(x)$,而将另一个函数看成 $u(x)$,这时的 $u'(x)v(x)$往往可以通过换元法求出不定积分.

例 6.2.12 求$\int \ln x dx$.

解 将 $\ln x$ 看成$u(x)$而将 1 看成 $v'(x)$,则 $u'(x)=\frac{1}{x}$而 $v(x)=x$,所以

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x(\ln x - 1) + C.$$

例 6.2.13 求$\int x\arctan x dx$.

解 将 $\arctan x$ 看成$u(x)$,将 x 看成$v'(x)$,则 $u'(x)=\frac{1}{1+x^2}$,$v(x)=$

$\frac{x^2}{2}$,所以

$$\int x\arctan x\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int (1 - \frac{1}{1+x^2})\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1+x^2}{2}\arctan x - \frac{x}{2} + C.$$

(3)利用有些函数经数次求导后形式会复原的性质,通过若干次分部积分,使等式右边也产生 $\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x$ 的项,只要它的系数不为 1,就可以用解方程的办法求得$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x$.

如对于形如 $\int \mathrm{e}^{\lambda x}\sin \alpha x\mathrm{d}x$ 和 $\int \mathrm{e}^{\lambda x}\cos \beta x\mathrm{d}x$ 之类的不定积分,可以任取一个为 $u(x)$,另一个函数为 $v'(x)$;而对于 $\int \sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x$ 之类的不定积分,则可将 $u(x)$取作$\sqrt{x^2+a^2}$,而将 $v'(x)$视为 1.

例 6.2.14 求 $\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$.

解 将 $\sin x$ 看成 $u(x)$,e^x 看成 $v'(x)$

$$\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\sin x - \int \mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\sin x - \mathrm{e}^x\cos x - \int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x.$$

在等式的两边都出现了所要求的 $\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$,把它们都移到等式的左边,解出

$$\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^x(\sin x - \cos x)}{2} + C.$$

类似地可以得到

$$\int \mathrm{c}^x\cos x\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^x(\sin x + \cos x)}{2} + C.$$

例 6.2.15 求 $\int \sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x$ 和 $\int \sqrt{x^2-a^2}\mathrm{d}x$.

解 以 $\int \sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x$ 为例,这个不定积分是可以用第二类换元积分法做的,但用分部积分的方法更为简单些.

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x = x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2+a^2-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} + \int \frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x - \int \sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x.$$

移项后,解出

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2} + \int \frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|\right) + C.$$

最后一项利用了例 6.2.7 的结果.

类似地可以求出

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|\right) + C.$$

(4)对某些形如 $\int f^n(x)\mathrm{d}x$ 之类的不定积分,利用分部积分降低指数的次数,导出递推公式.

例 6.2.16 求 $\int \sin^n x\mathrm{d}x$.

解 记 $I_n = \int \sin^n x\mathrm{d}x$,显然

$$I_0 = \int \sin^0 x\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x + C,$$

$$I_1 = \int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C.$$

而对于 $n \geqslant 2$,则有

$$\begin{aligned} I_n &= \int \sin^n x\mathrm{d}x = \int \sin^{n-1}x \cdot \sin x\mathrm{d}x \\ &= -\sin^{n-1}x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2}x \cdot \cos^2 x\mathrm{d}x \\ &= -\sin^{n-1}x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2}x \cdot (1-\sin^2 x)\mathrm{d}x \\ &= -\sin^{n-1}x\cos x + (n-1)(I_{n-2} - I_n), \end{aligned}$$

于是得到递推关系

$$\begin{cases} I_n = \dfrac{1}{n}\left[(n-1)I_{n-2} - \sin^{n-1}x\cos x\right], & n \geqslant 2, \\ I_0 = x + C, \qquad I_1 = -\cos x + C. \end{cases}$$

例 6.2.17 求 $I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$ 的递推表达式.

解 由例 6.2.2,

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C,$$

而对于 $n\geqslant 2$,则有

$$I_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}=\frac{1}{a^2}\int\frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x=\frac{I_{n-1}}{a^2}+\frac{1}{a^2}\int\frac{-x^2}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x.$$

对最后一项用分部积分,

$$\begin{aligned}I_n&=\frac{I_{n-1}}{a^2}+\frac{1}{2a^2(n-1)}\int x\mathrm{d}\left[\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right]\\&=\frac{I_{n-1}}{a^2}+\frac{1}{2a^2(n-1)}\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}-\frac{I_{n-1}}{2a^2(n-1)}.\end{aligned}$$

于是得到递推关系

$$\begin{cases}I_n=\dfrac{2n-3}{2a^2(n-1)}I_{n-1}+\dfrac{1}{2a^2(n-1)}\dfrac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}, & n\geqslant 2;\\ I_1=\dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a}+C.\end{cases}$$

上节和本节中所得到的结果绝大部分可以作为基本积分公式,应该熟练掌握,为了便于使用,我们将它们集中在下面的表中.

基本积分表

$$\int x^\alpha\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C & (\alpha\neq-1)\\ \ln|x|+C & (\alpha=-1)\end{cases}$$

$$\int\ln x\mathrm{d}x=x(\ln x-1)+C$$

$$\int a^x\mathrm{d}x=\frac{a^x}{\ln a}+C,\qquad \text{特别}\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$$

$$\int\sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C\qquad\qquad \int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$$

$$\int\tan x\mathrm{d}x=-\ln\left|\cos x\right|+C\qquad\qquad \int\cot x\mathrm{d}x=\ln\left|\sin x\right|+C$$

$$\int\sec x\mathrm{d}x=\ln\left|\sec x+\tan x\right|+C$$

$$\int\csc x\mathrm{d}x=\ln\left|\csc x-\cot x\right|+C$$

$$\int\mathrm{sh}\,x\mathrm{d}x=\mathrm{ch}\,x+C\qquad\qquad \int\mathrm{ch}\,x\mathrm{d}x=\mathrm{sh}\,x+C$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C\qquad\qquad \int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C\qquad\qquad \int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$$

$$\int\sqrt{x^2\pm a^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2\pm a^2}\pm a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|\right)+C$$

由于二次多项式 ax^2+bx+c 必能通过配方化成 $a[(x-p)^2\pm q^2]$ 形式，因此后面六个(实际上是八个)公式对于求某些 $f(ax^2+bx+c)$ 型的不定积分是很有用的.

例 6.2.18 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}}$.

解 将 $x^2+2\xi x+\eta^2$ 配方后化成 $(x+\xi)^2\pm|\eta^2-\xi^2|$，把 $|\eta^2-\xi^2|$ 看作 a^2，便有

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}}=\int \frac{\mathrm{d}(x+\xi)}{\sqrt{(x+\xi)^2\pm|\eta^2-\xi^2|}}$$
$$=\ln\left|(x+\xi)+\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}\right|+C.$$

这是一个一般的结果，比如当 $\xi=-2,\eta^2=5$ 时，得到

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-4x+5}}=\ln\left|(x-2)+\sqrt{x^2-4x+5}\right|+C,$$

但读者应掌握这一方法的本质，而不必去死背公式.

求诸如 $\int \frac{(ax+b)\mathrm{d}x}{x^2+2\xi x+\eta^2}$，$\int \frac{(ax+b)\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}}$，$\int (ax+b)\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}\mathrm{d}x$ 型的不定积分的思路是类似的(只是先要拆项做一次变量代换)，留给读者自行推导.

习　题

1.求下列不定积分：

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{4x-3}$；

(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-2x^2}}$；

(3) $\int \sin(\omega x+\varphi)\mathrm{d}x$；

(4) $\int \mathrm{e}^{3x+2}\mathrm{d}x$；

(5) $\int (2^x+3^x)^2\mathrm{d}x$；

(6) $\int \frac{1}{2+5x^2}\mathrm{d}x$；

(7) $\int \sin^5 x\mathrm{d}x$；

(8) $\int \tan^{10}x\sec^2 x\mathrm{d}x$；

(9) $\int \sin 5x\cos 3x\mathrm{d}x$；

(10) $\int \cos^2 5x\mathrm{d}x$；

(11) $\int \frac{(2x+4)\mathrm{d}x}{(x^2+4x+5)^2}$；

(12) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；

(13) $\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1-2x^3}}$；

(14) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$；

(15) $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx$; (16) $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1 - x^2}}$;

(17) $\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 2}$; (18) $\int \frac{1 - x}{\sqrt{9 - 4x^2}} dx$;

(19) $\int \tan \sqrt{1 + x^2} \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} dx$; (20) $\int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^4 x} dx$.

2. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^{2x}}}$; (2) $\int e^{\sqrt{x+1}} dx$;

(3) $\int \frac{dx}{x \sqrt{1 + x^2}}$; (4) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + a^2)^3}}$;

(5) $\int (x - 1)(x + 2)^{20} dx$; (6) $\int x^2 (x + 1)^n dx$;

(7) $\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1 + x^2}}$; (8) $\int \frac{\sqrt{x - a}}{\sqrt{x + a}} dx$;

(9) $\int \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}$; (10) $\int x \sqrt{\frac{x}{2a - x}} dx$;

(11) $\int \frac{dx}{x + \sqrt{1 - x^2}}$; (12) $\int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} dx$;

(13) $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{2x}}$; (14) $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$;

(15) $\int x^2 \sqrt[3]{1 - x} dx$; (16) $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}}$;

(17) $\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^4} dx$; (18) $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - x^2}}$;

(19) $\int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1 + x)} dx$; (20) $\int \frac{1 + \ln x}{(x \ln x)^2} dx$.

3. 求下列不定积分：

(1) $\int x e^{2x} dx$; (2) $\int x \sin (\omega x + \varphi) dx$;

(3) $\int x^2 \sin 3x dx$; (4) $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$;

(5) $\int x \cos^2 x dx$; (6) $\int \arcsin x dx$;

(7) $\int \arctan x dx$; (8) $\int x^2 \arctan x dx$;

(9) $\int x \ln (x - 1) dx$; (10) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x}} dx$;

(11) $\int \ln^2 x\mathrm{d}x$； (12) $\int x^2\ln x\mathrm{d}x$；

(13) $\int \mathrm{e}^{-x}\sin 5x\mathrm{d}x$； (14) $\int x\tan^2 x\mathrm{d}x$；

(15) $\int \frac{\ln^3 x}{x^2}\mathrm{d}x$； (16) $\int \cos(\ln x)\mathrm{d}x$；

(17) $\int (\arcsin x)^2\mathrm{d}x$； (18) $\int \sqrt{x}\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；

(19) $\int \mathrm{e}^x\sin^2 x\mathrm{d}x$； (20) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x$.

4. 求下列不定积分的递推表达式（n 为自然数）：

(1) $I_n=\int \cos^n x\mathrm{d}x$； (2) $I_n=\int \tan^n x\mathrm{d}x$；

(3) $I_n=\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^n x}$； (4) $I_n=\int x^n\sin x\mathrm{d}x$；

(5) $I_n=\int \mathrm{e}^x\sin^n x\mathrm{d}x$； (6) $I_n=\int x^a\ln^n x\mathrm{d}x$；

(7) $I_n=\int \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$； (8) $I_n=\int \frac{\mathrm{d}x}{x^n\sqrt{1+x}}$.

5. 导出求 $\int \frac{(ax+b)\mathrm{d}x}{x^2+2\xi x+\eta^2}$，$\int (ax+b)\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}\mathrm{d}x$ 以及 $\int \frac{(ax+b)\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}}$ 型不定积分的公式.

6. 利用上题结果计算：

(1) $\int (5x+3)\sqrt{x^2+x+2}\mathrm{d}x$； (2) $\int (x-1)\sqrt{x^2+2x-5}\mathrm{d}x$；

(3) $\int \frac{(x-1)\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+x+1}}$； (4) $\int \frac{(x+2)\mathrm{d}x}{\sqrt{5+x-x^2}}$.

7. 设 n 次多项式 $p(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i$，其系数满足关系式 $\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{a_i}{(i-1)!}=0$，证明不定积分 $\int p\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ 是初等函数.

§3 有理函数的不定积分及其应用

有理函数的不定积分

并不是所有初等函数的不定积分仍是初等函数，如 $\int \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$，$\int \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$ 等，就无法用基本初等函数的有限次四则运算和复合来表达，俗称"积不出". （请注意，这并不意味这些被积函数没有原函数，学了定积分以后我们会知道，任何一个连续函数必存在原函数，只是它们未必能用初等函数表示出来.）

有理函数是比较简单的函数，它是两个代数多项式之比，即形如 $\dfrac{p_m(x)}{q_n(x)}$ 的一类函数，这里 $p_m(x)$和 $p_n(x)$分别是 m 和n 次多项式.

我们之所以要专门讨论有理函数的不定积分，有三个原因. 一方面，有理函数在解决实际问题中使用得非常广泛；另一方面，还有许多也很常用的函数类，如某些无理函数、三角函数，可以通过适当的变换化成有理函数；更重要的是，任何一个有理函数的原函数一定是初等函数.

在考虑有理函数的不定积分 $\int \dfrac{p_m(x)}{q_n(x)}\mathrm{d}x$ 时，我们总假定$\dfrac{p_m(x)}{q_n(x)}$是真分式，即成立 $m<n$，不然的话，可以通过多项式的带余除法，使得

$$\frac{p_m(x)}{q_n(x)}=p_{m-n}(x)+\frac{r(x)}{q_n(x)},$$

$p_{m-n}(x)$是 $m-n$ 次多项式，$r(x)$是不超过 $n-1$ 次的多项式. 这样

$$\int\frac{p_m(x)}{q_n(x)}\mathrm{d}x=\int p_{m-n}(x)\mathrm{d}x+\int\frac{r(x)}{q_n(x)}\mathrm{d}x,$$

由于$\int p_{m-n}(x)\mathrm{d}x$ 非常容易求，原问题就变为求一个真分式类型的有理函数的不定积分了. 另外，为了讨论的方便，我们不妨假定 $q_n(x)$的最高次项系数为 1.

由代数学基本定理，多项式 $q_n(x)$在复数域上恰有 n 个根. 由于$q_n(x)$是实多项式，因此它的根要么是实根，要么是成对出现的共轭复根. 设它的全部实根为 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_i$，其重数分别为 $m_1,m_2,\dots,m_i$，全部复根为 $\beta_1\pm i\gamma_1$，$\beta_2\pm i\gamma_2,\dots,\beta_j\pm i\gamma_j$，其重数分别为 $n_1,n_2,\dots,n_j\left(\sum\limits_{k=1}^{i}m_k+2\sum\limits_{k=1}^{j}n_k=n\right)$，记 $\xi_k=-\beta_k$，$\eta_k^2=\beta_k^2+\gamma_k^2\,(\xi_k^2<\eta_k^2)$，则在实数域上可将 $q_n(x)$因式分解为

$$q_n=\prod_{k=1}^{i}(x-\alpha_k)^{m_k}\cdot\prod_{k=1}^{j}(x^2+2\xi_kx+\eta_k^2)^{n_k}.$$

于是，由代数学中的部分分式理论，可将

$$\frac{p_m(x)}{q_n(x)}=\frac{p_m(x)}{\prod\limits_{k=1}^{i}(x-\alpha_k)^{m_k}\cdot\prod\limits_{k=1}^{j}(x^2+2\xi_kx+\eta_k^2)^{n_k}}$$

分解成简单分式之和，分解的规律是，$q_n(x)$中若含因于$(x-\alpha_k)^{m_k}$，则在和式中就有项 $\dfrac{\lambda_{k1}}{x-\alpha_k},\dfrac{\lambda_{k2}}{(x-\alpha_k)^2},\dots,\dfrac{\lambda_{k\,m_k}}{(x-\alpha_k)^{m_k}}$；若含因子$(x^2+2\xi_kx+\eta_k^2)^{n_k}$，则在和式中就有项$\dfrac{\mu_{k1}x+\nu_{k1}}{x^2+2\xi_kx+\eta_k^2},\dfrac{\mu_{k2}x+\nu_{k2}}{(x^2+2\xi_kx+\eta_k^2)^2},\dots,\dfrac{\mu_{k\,n_k}x+\nu_{k\,n_k}}{(x^2+2\xi_kx+\eta_k^2)^{n_k}}$，

即

$$\frac{p_m(x)}{q_n(x)}=\sum_{k=1}^{i}\sum_{r=1}^{m_k}\frac{\lambda_{kr}}{(x-\alpha_k)^r}+\sum_{k=1}^{j}\sum_{r=1}^{n_k}\frac{\mu_{kr}x+\nu_{kr}}{(x^2+2\xi_k x+\eta_k^2)^r},$$

$\lambda_{kr},\mu_{kr},\nu_{kr}$ 可以用待定系数法具体算出来.

由不定积分的线性性质,即知

$$\int\frac{p_m(x)}{q_n(x)}\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{i}\sum_{r=1}^{m_k}\lambda_{kr}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-\alpha_k)^r}+\sum_{k=1}^{j}\sum_{r=1}^{n_k}\int\frac{\mu_{kr}x+\nu_{kr}}{(x^2+2\xi_k+\eta_k^2)^r}\mathrm{d}x,$$

它所涉及的不定积分只有两种类型:

(1) $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-\alpha)^n}$ $(n\geqslant 1)$. 由例 6.2.1,我们已经得到

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-\alpha)^n}=\begin{cases}\ln|x-\alpha|+C, & n=1,\\ -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(x-\alpha)^{n-1}}+C, & n\geqslant 2.\end{cases}$$

(2) $\int\frac{\mu x+\nu}{(x^2+2\xi x+\eta^2)^n}\mathrm{d}x$ $(n\geqslant 1,\xi^2<\eta^2)$.

首先,将原式化成

$$\int\frac{\mu x+\nu}{(x^2+2\xi x+\eta^2)^n}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\mu}{2}\int\frac{2x+2\xi}{(x^2+2\xi x+\eta^2)^n}\mathrm{d}x+(\nu-\mu\xi)\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2\xi x+\eta^2)^n}.$$

在不考虑前面的系数的情况下,右端的第一项利用第一类换元积分法,

$$\int\frac{2x+2\xi}{(x^2+2\xi x+\eta^2)^n}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(x^2+2\xi x+\eta^2)}{(x^2+2\xi x+\eta^2)^n}$$

$$=\begin{cases}\ln|x^2+2\xi x+\eta^2|+C, & n=1,\\ -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(x^2+2\xi x+\eta^2)^{n-1}}+C, & n\geqslant 2.\end{cases}$$

对右端的第二项仿照例 6.2.18,通过配方化成

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2\xi x+\eta^2)^n}=\int\frac{\mathrm{d}(x+\xi)}{[(x+\xi)^2+(\eta^2-\xi^2)]^n},$$

再用例 6.2.17 的结果,即得到 $I_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2\xi x+\eta^2)^n}$ 的递推表达式

$$\begin{cases}I_n=\frac{1}{2(\eta^2-\xi^2)(n-1)}\left[(2n-3)I_{n-1}+\frac{x+\xi}{(x^2+2\xi x+\eta^2)^{n-1}}\right], & n\geqslant 2,\\ I_1=\frac{1}{\sqrt{\eta^2-\xi^2}}\arctan\frac{x+\xi}{\sqrt{\eta^2-\xi^2}}+C.\end{cases}$$

特别地,

$$I_2=\frac{1}{2(\sqrt{\eta^2-\xi^2})^3}\arctan\frac{x+\xi}{\sqrt{\eta^2-\xi^2}}+\frac{1}{2(\eta^2-\xi^2)}\cdot\frac{x+\xi}{x^2+2\xi x+\eta^2}.$$

所以,理论上,求有理函数的不定积分问题已经圆满地得到了解决.

例 6.3.1 求 $\int\frac{4x^3-13x^2+3x+8}{(x+1)(x-2)(x-1)^2}\mathrm{d}x$.

解 先将被积函数分解成简单分式之和.设

$$\frac{4x^3-13x^2+3x+8}{(x+1)(x-2)(x-1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{(x-1)^2},$$

将右边通分后,两边的分子应该相等,

$$4x^3-13x^2+3x+8=A(x-2)(x-1)^2+B(x+1)(x-1)^2+$$
$$+C(x+1)(x-2)(x-1)+D(x+1)(x-2).$$

令 $x=-1$,得到 $A=1$;令 $x=2$,得到 $B=-2$;令 $x=1$,得到 $D=-1$;两边求导后再令 $x=1$,得到 $C=5$(或者比较 x^3 的系数,$C=4-A-B=5$),于是

$$\begin{aligned}&\int\frac{4x^3-13x^2+3x+8}{(x+1)(x-2)(x-1)^2}\mathrm{d}x\\&=\int\left[\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x-2}+\frac{5}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}\right]\mathrm{d}x\\&=\ln\left|\frac{(x+1)(x-1)^5}{(x-2)^2}\right|+\frac{1}{x-1}+C.\end{aligned}$$

请注意,除非万不得已,要尽量避免将右边式子全部展开后与左边式子比较系数,建立线性方程组再去求解的繁琐方法.

例 6.3.2 求 $\int\frac{x^4+x^3+3x^2-1}{(x^2+1)^2(x-1)}\mathrm{d}x$.

解 设

$$\frac{x^4+x^3+3x^2-1}{(x^2+1)^2(x-1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2},$$

则

$$\begin{aligned}&x^4+x^3+3x^2-1\\&=A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x-1)(x^2+1)\\&+(Dx+E)(x-1).\end{aligned}$$

令 $x=1$,得到 $A=1$;令 $x^2=-1$ 即 $x=i=\sqrt{-1}$(这也是可以的),得到

$$-3-i=(-D-E)+(E-D)i,$$

再令它们的实部和虚部分别相等,得到 $D=2$ 和 $E=1$;比较 x^4 的系数,得到 $B=1-A=0$;最后比较 x^3 的系数,右边只有一项 Cx^3,由此得到 $C=1$.

于是

$$\int\frac{x^4+x^3+3x^2-1}{(x^2+1)^2(x-1)}$$

$$= \int\left[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2+1}+\frac{2x+1}{(x^2+1)^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \ln|x-1| + \arctan x + \int\frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{(x^2+1)^2} + \int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \ln|x-1| + \frac{3}{2}\arctan x - \frac{1}{x^2+1} + \frac{x}{2(x^2+1)} + C.$$

可化成有理函数不定积分的情况

前面已经说了,有些函数可以通过适当的变换化成有理函数,我们在此仅举两方面的例子.

1.$R\left(x,\sqrt[n]{\dfrac{\xi x+\eta}{\mu x+\nu}}\right)$类的不定积分.这里,$R(u,v)$表示两个变量 u,v 的有理函数(即分子和分母都是关于 u,v 的二元代数多项式).

对 $R\left(x,\sqrt[n]{\dfrac{\xi x+\eta}{\mu x+\nu}}\right)$作变量代换$\sqrt[n]{\dfrac{\xi x+\eta}{\mu x+\nu}}=t$,则 $x=\varphi(t)=\dfrac{-\nu t^n+\eta}{\mu t^n-\xi}$.由于有理函数与有理函数复合后仍为有理函数,有理函数的导数也还是有理函数,因此

$$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{\xi x+\eta}{\mu x+\nu}}\right)\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{-\nu t^n+\eta}{\mu t^n-\xi},t\right)\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

上式右端的被积函数是一个关于变量 t 的有理函数,用前面讲过的方法就可以将它求出来.

$R\left(x,\sqrt[n]{\dfrac{\xi x+\eta}{\mu x+\nu}}\right)$类型不定积分的最常见的简单情况是 $\mu=0$,这时被积函数变成了 $R(x,\sqrt[n]{\xi x+\eta})$.

例6.3.3 求$\displaystyle\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{4x-3}}$.

解 令$\sqrt{4x-3}=t$,则 $x=\dfrac{1}{4}(t^2+3)$,$\mathrm{d}x=\dfrac{t}{2}\mathrm{d}t$.所以

$$\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{4x-3}} = \frac{1}{8}\int(t^2+3)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{t^3}{24}+\frac{3t}{8}+C$$

$$=\frac{\sqrt{4x-3}}{12}(2x+3)+C.$$

例6.3.4 求$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x(\sqrt[3]{x}-\sqrt{x})}$.

解 为了同时去掉$\sqrt[3]{x}$和$\sqrt{x}$中的根号,令 $x=t^6$,于是 $\mathrm{d}x=6t^5\mathrm{d}t$,所以

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x(\sqrt[3]{x}-\sqrt{x})} = 6\int\frac{\mathrm{d}t}{t^3(1-t)}$$

$$=6\int\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t-1}\right)\mathrm{d}t$$

$$=6\left[\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x}-1}\right|-\frac{1}{\sqrt[6]{x}}-\frac{1}{2\sqrt[6]{x}}\right]+C.$$

例 6.3.5 求 $\int\frac{\sqrt{1+x}}{x\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$.

解 令 $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=t$，则 $x=\frac{t^2-1}{t^2+1}$，$\mathrm{d}x=\frac{4t}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t$，所以

$$\int\frac{\sqrt{1+x}}{x\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x=4\int\frac{t^2\mathrm{d}t}{(t^2-1)(t^2+1)}$$

$$=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}+\frac{2}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+2\arctan t+C$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+2\arctan\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C.$$

对于 $\sqrt[n]{(\xi x+\eta)^i(\mu x+\nu)^j}\,(i+j=kn)$ 类型的函数，可以先化成

$$\sqrt[n]{(\xi x+\eta)^i(\mu x+\nu)^j}=(\xi x+\eta)^k\cdot\sqrt[n]{\frac{(\mu x+\nu)^j}{(\xi x+\eta)^j}},$$

再作代换 $\sqrt[n]{\frac{(\mu x+\nu)^j}{(\xi x+\eta)^j}}=t^j$，然后套用上面的步骤来做.

例 6.3.6 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)^4}}$.

解 将 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)^4}}$ 化为等价形式 $\int\frac{1}{(x+1)^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}}\mathrm{d}x$，令 $\sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}}=t^2$，则 $\frac{x+1}{x-1}=t^3$，$x=\frac{t^3+1}{t^3-1}$，$\frac{1}{x+1}=\frac{t^3-1}{2t^3}$，$\mathrm{d}x=\frac{-6t^2}{(t^3-1)^2}\mathrm{d}t$.

于是

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)^4}}=-\frac{3}{2}\int\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{3}{2t}+C=\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}+C.$$

2. $R(\sin x,\cos x)$ 类的不定积分. $R(u,v)$ 的意义与上面相同.

由于 $\tan x$，$\cot x$，$\sec x$ 和 $\csc x$ 都是 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的有理函数，所以凡是三角函数的有理函数都可以化成 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的有理函数，因此我们只要研究如何去求形如

$$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$$

的不定积分就可以了.

用三角函数的万能公式 $\tan\frac{x}{2}=t$ 作代换,则

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2};$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}(2\arctan t) = \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

于是,原式化成了有理函数的不定积分

$$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t,$$

同样可以用前面讲过的方法将它求出来.

例 6.3.7 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{4+4\sin x+\cos x}$.

解 作代换 $\tan\frac{x}{2}=t$,则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{4+4\sin x+\cos x} = \int\frac{\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t}{4+4\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

$$=2\int\frac{\mathrm{d}t}{3t^2+8t+5} = 2\int\frac{\mathrm{d}t}{(3t+5)(t+1)}$$

$$=\int\left[\frac{1}{t+1}-\frac{3}{3t+5}\right]\mathrm{d}t = \ln|t+1|-\ln|3t+5|+C$$

$$=\ln\left|\tan\frac{x}{2}+1\right|-\ln\left|3\tan\frac{x}{2}+5\right|+C.$$

尽管用万能公式可以确保求出所有的 $R(\sin x,\cos x)$类函数的不定积分,但也不能一见到三角函数的有理函数,不管具体情况就将万能公式用上去,事实上,利用三角函数的性质或其它方法在很多时候会更容易奏效.

例 6.3.8 求 $\int\frac{\cot x\mathrm{d}x}{1+\sin x}$.

解 用万能公式,作代换 $\tan\frac{x}{2}=t$,则,$\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1-t^2}{2t}$,

$$\int\frac{\cot x\mathrm{d}x}{1+\sin x} = \int\frac{\frac{1-t^2}{2t}\frac{2}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\mathrm{d}t = \int\frac{1-t^2}{t^3+2t^2+t}\mathrm{d}t.$$

将右端分解为简单分式的和式,

$$\int \frac{\cot x\mathrm{d}x}{1+\sin x}=\int\left[\frac{1}{t}-\frac{2}{t+1}\right]\mathrm{d}t$$

$$=\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}}{(\tan\frac{x}{2}+1)^2}\right|+C.$$

但若用三角关系式和换元积分法,

$$\int \frac{\cot x\mathrm{d}x}{1+\sin x}=\int\frac{\cos x\mathrm{d}x}{\sin x(1+\sin x)}$$

$$=\int\left[\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{1+\sin x}\right]\mathrm{d}(\sin x)$$

$$=\ln\left|\frac{\sin x}{1+\sin x}\right|+C.$$

计算过程简洁,结果也更为明快. 读者很容易验证,前一种方法算出的解 $\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}}{(\tan\frac{x}{2}+1)^2}\right|$ 与 $\ln\left|\frac{\sin x}{1+\sin x}\right|$ 只相差一个常数.

因此,在求三角函数有理式的不定积分时,不要滥用万能公式.

习　题

1. 求下列不定积分:

(1) $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x+1)^2}$;　(2) $\int\frac{2x+3}{(x^2-1)(x^2+1)}\mathrm{d}x$;

(3) $\int\frac{x\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$;

(4) $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4x+4)(x^2+4x+5)^2}$;

(5) $\int\frac{3}{x^3+1}\mathrm{d}x$;　(6) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4+x^2+1}$;

(7) $\int\frac{x^4+5x+4}{x^2+5x+4}\mathrm{d}x$;　(8) $\int\frac{x^3+1}{x^3+5x-6}\mathrm{d}x$;

(9) $\int\frac{x^2}{1-x^4}\mathrm{d}x$;　(10) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$;

(11) $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$;　(12) $\int\frac{x^2+1}{x(x^3-1)}\mathrm{d}x$;

(13) $\int\frac{x^2+2}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x$;　(14) $\int\frac{1-x^7}{x(1+x^7)}\mathrm{d}x$;

(15) $\int \frac{x^9}{(x^{10}+2x^5+2)^2}\mathrm{d}x$；　(16) $\int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}\mathrm{d}x$.

2. 在什么条件下，$f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x(x+1)^2}$的原函数仍是有理函数？

3. 设 $p_n(x)$是一个 n 次多项式，求

$$\int \frac{p_n(x)}{(x-a)^{n-1}}\mathrm{d}x.$$

4. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{x}{\sqrt{2+4x}}\mathrm{d}x$；　(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$；

(3) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}\mathrm{d}x$；　(4) $\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}\mathrm{d}x$；

(5) $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$；　(6) $\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\mathrm{d}x$；

(7) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)}}$；　(8) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{1+x^2}}$；

(9) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$；　(10) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$；

(11) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x-2)(x+1)^2}}$；　(12) $\int \frac{x^2}{\sqrt[5]{(x-3)^3(x-1)^2}}\mathrm{d}x$；

(13) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[4]{1+x^4}}$；　(14) $\int \sqrt[3]{\frac{(x-4)^2}{(x^2+2x+1)^2}}\mathrm{d}x$.

5. 设 $R(u,v,w)$是 u,v,w 的有理函数，给出

$$\int R(x,\sqrt{a+x},\sqrt{b+x})\mathrm{d}x$$

的求法.

6. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{4+5\cos x}$；　(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x}$；

(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{3+\sin^2 x}$；　(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x+\cos x}$；

(5) $\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x-\cos x+5}$；　(6) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)\sin x}$；

(7) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\tan x+\sin x}$；　(8) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$；

(9) $\int \tan x\tan(x+a)\mathrm{d}x$；　(10) $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$；

(11) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x\cos^2 x}$；　(12) $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

7. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$；

(2) $\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{3/2}}dx$；

(3) $\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})dx$；

(4) $\int \sqrt{x}\ln^2 x dx$；

(5) $\int x^2 e^x \sin x dx$；

(6) $\int \ln(1+x^2)dx$；

(7) $\int \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$；

(8) $\int \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^2}}dx$；

(9) $\int \arctan\sqrt{x}dx$；

(10) $\int \sqrt{x}\sin\sqrt{x}dx$；

(11) $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$；

(12) $\int \frac{\sqrt{1+\sin x}}{\cos x}dx$；

(13) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}dx$；

(14) $\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}dx$；

(15) $\int \frac{dx}{e^x-e^{-x}}$；

(16) $\int \frac{e^{2x}+e^x}{e^{4x}-e^{2x}+1}dx$；

(17) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx$；

(18) $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx$；

(19) $\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x dx$；

(20) $\int \frac{dx}{(1+e^x)^2}$.

第七章　定积分

§1　定积分的概念和可积条件

定积分概念的导出背景

1609 年至 1619 年间，德国天文学家 Kepler 提出了著名的"行星运动三大定律"：

(1)行星在椭圆轨道上绕太阳运动，太阳在此椭圆的一个焦点上.

(2)从太阳到行星的向径在相等的时间内扫过相等的面积.

(3)行星绕太阳公转周期的平方与其椭圆轨道的半长轴的立方成正比.

这不仅是天文学上划时代的发现(Newton 正是在努力证明这些定律的过程中发现了万有引力，进而创立了现代天体力学)，而且也是数学发展史上的重要里程碑. 一方面，在古希腊的数学家们发现了圆锥曲线的性质之后的1 800多年以来，人们从未想到过，这样的纯数学居然会有如此辉煌的实际应用价值. 另一方面，为了论证第二定律，Kepler 将椭圆中被扫过的那部分图形分割成许多小的"扇形"，并近似地将它们看成一个个小的三角形，运用了一些出色的技巧对它们的面积之和求极限，成功地计算出了所扫过的面积(图 7.1.1). 在其卓有成效的工作中，已包含了现代定积分思想的雏形.

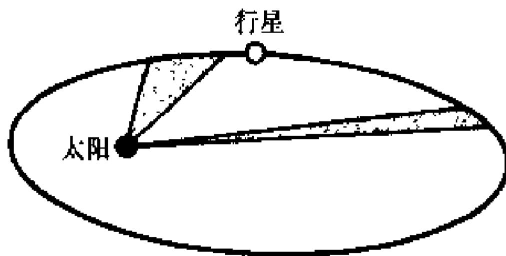


图 7.1.1

其实，用分割、求和与求极限相结合的方法计算不规则几何图形面积的想法可以追溯到古希腊阿基米德的"穷竭法". Kepler 之后的许多数学家在他的思想的启发下，对"穷竭法"作了重大的完善和发展工作，成了为定积分奠基的先驱者. 比如，为了求出由两条直角边和一条抛物线 $y=x^2$ 所围成的所谓**曲边三角形**的面积，可以采用以下的做法(图 7.1.2)：

用步长 $h=\dfrac{1}{n}$将$[0,1]$分成 n 个长度为h 的小区间，其分割点(称为**分点**)为

$$x_i = ih, \qquad i = 0,1,2,\cdots,n-1,n.$$

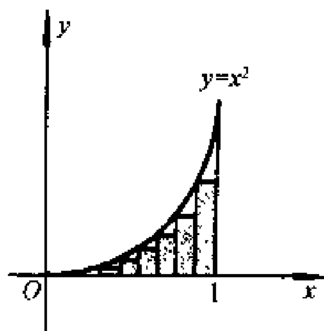


图 7.1.2

在每个小区间$[x_i, x_{i+1}]$上，用底为 h、高为 $f(x_i) = x_i^2$ 的矩形面积近似代替小的曲边梯形的面积，那么这些小面积之和就是整个大的曲边三角形的面积的近似，即

$$S \approx s_n = \sum_{i=0}^{n-1} h \cdot x_i^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{i}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1} i^2.$$

利用数学归纳法，容易证明

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.$$

显然，分割得越细(即 h 越小)，s_n 与 S 就越接近，令 $n \to \infty$，便得到

$$S = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3} = \frac{1}{3}.$$

这就是所求的曲边三角形的精确的面积.

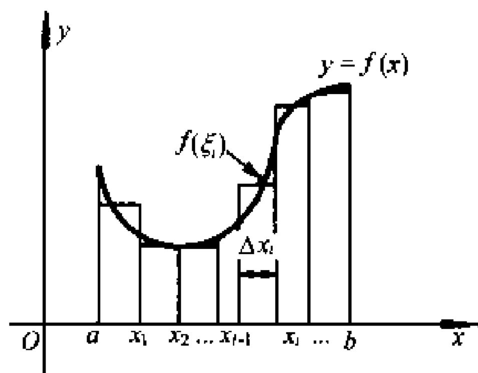


图 7.1.3

求一个由连续曲线 $y = f(x)$(先假设 $f(x) > 0$)、直线 $x = a$、$x = b$ 和 x 轴围成的曲边梯形的面积，可以类似地进行(图 7.1.3).

在$[a,b]$中取一系列的分点 x_i,作成一种分法

$$P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

记小区间$[x_{i-1},x_i]$的长度为

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1},$$

在每个小区间上取一点 ξ_i,用底为 Δx_i、高为 $f(\xi_i)$的矩形面积近似代替小的曲边梯形的面积,那么这些小面积之和

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

就是整个大的曲边梯形的面积的近似.若当 $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\Delta x_i)\to 0$ 时

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

存在,那么这个极限就是所要求的曲边梯形的精确面积.

由于这块曲边梯形的面积应该是一个客观存在的常量,上述极限应该与对$[a,b]$所作的分法 P 以及 ξ_i 的取法无关.

以后人们又发现,在许多其他领域的研究中,也大量地遇到诸如此类的和式的极限问题.比如,求一个以速度 $v(t)$做变速运动的物体从 $t = T_1$ 到 $t = T_2$走过的路程 S,可以先在$[T_1,T_2]$中取一系列的分点 t_i,作成分法

$$P: T_1 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = T_2,$$

在每个小区间$[t_{i-1},t_i]$上随意取一点 ξ_i,只要时间间隔

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$$

充分小,$v(\xi_i)$就可以近似地看作是在$[t_{i-1},t_i]$时间段中的平均速度,因此在这段时间中走过的路程近似地等于 $v(\xi_i)\Delta t_i$,于是整个路程 S 就近似等于这一段段小的路程之和,即

$$S \approx s_n = \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i.$$

若当 $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\Delta t_i)\to 0$ 时

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i$$

存在,那么这个极限就是所要求的路程的精确值 S.

由于路程 S 亦是一个客观存在的常量,上述极限也应该与对$[T_1,T_2]$所作的分法 P 和 ξ_i 的取法无关.

上面两个和式的极限的形式是完全相同的,可以从数学上统一地加以解决,这需要做两件事:

(1)对这类问题进行数学抽象,建立严格的理论基础.

(2)找到求这一类极限值的有效方法.

定积分的定义

我们先来做第一件事.在本章中,我们的讨论都在闭区间$[a,b]$上进行.显然,若要求对任意分法 P 和任意$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$,极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 都存在,$f(x)$必是$[a,b]$上的有界函数(留作习题).

定义 7.1.1 设有界函数 $f(x)$在$[a,b]$有定义,若在$[a,b]$中任意取分点$\{x_i\}_{i=0}^{n}$,作成一种分法

$$P:\quad a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

记小区间$[x_{i-1},x_i]$的长度为

$$\Delta x_i=x_i-x_{i-1},$$

并记 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\Delta x_i)$.若$\forall\,\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$,极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

存在,且极限的值既与分法 P 无关,又与 ξ_i 的取法无关,则称 $f(x)$在$[a,b]$上 **Riemann 可积**,和式

$$s_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

称为 **Riemann 和**,其极限值 I 称为 $f(x)$在$[a,b]$上的**定积分**,记为

$$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

这里 a 和 b 分别被称为积分的**下限**和**上限**.

我们规定

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

和

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0.$$

它们的几何意义是很明显的.

这一定义也可以用"$\varepsilon-\delta$ 语言"表述如下:

"设有定数 I,对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得对任意一种分法

$$P:\quad a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

和任意点 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$,只要 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\Delta x_i)<\delta$,便有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|<\varepsilon,$$

则称 $f(x)$在$[a,b]$上 Riemann 可积,I 是 $f(x)$在$[a,b]$上的定积分".

在不会发生混淆的情况下,一般就把 Riemann 可积简称为可积(以后我

们会知道,还存在其他意义下的积分).需要特别注意的是,"可积"要求 Riemann 和的极限值与分法 P 以及 ξ_i 的取法无关.

例 7.1.1 讨论[0,1]上的 Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

的可积性.

解 由于有理数和无理数在实数域上的稠密性,因此不管用什么样的分点 x_i 对[0,1]作分割,在每个小区间$[x_i,x_{i+1}]$中一定是既有有理数又有无理数.

于是,当将 ξ_i 全部取为有理数时,

$$\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}D(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}1\cdot\Delta x_i=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=1,$$

而将 ξ_i 全部取为无理数时,则有

$$\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}D(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}0\cdot\Delta x_i=0.$$

所以尽管两个和式的极限都存在,但 Dirichlet 函数在 Riemann 意义下是不可积的.

Darboux 和

从上面的例子知道,并不是所有的函数都是可积的,下面我们来导出 $f(x)$可积的条件.

记 $f(x)$在$[a,b]$上的上确界和下确界分别为 M 和 m,即

$$m\leqslant f(x)\leqslant M,$$

另外,记 $f(x)$在$[x_{i-1},x_i]$上的上确界和下确界分别为 M_i 和 $m_i(i=1,2,\cdots,n)$,即

$$M_i=\sup\{f(x)\mid x\in[x_{i-1},x_i]\}$$

和

$$m_i=\inf\{f(x)\mid x\in[x_{i-1},x_i]\},$$

显然,它们与对$[a,b]$所作的分法 P 有关.

取定了分法 P 后,定义和式

$$\overline{S}(P)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i$$

与

$$\underline{S}(P)=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i,$$

它们分别被称为相应于分法 P 的 **Darboux 大和**与 **Darboux 小和**(统称为

Darboux 和),那么显然有

$$\underline{S}(P) \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \bar{S}(P).$$

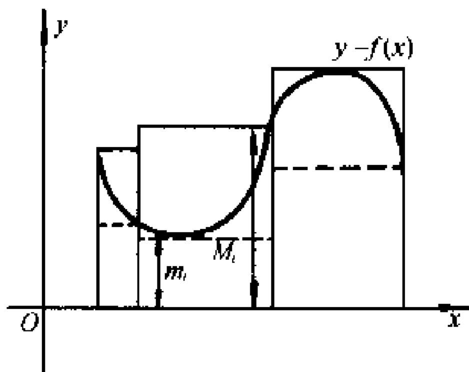


图 7.1.4

从直观上容易看出(图 7.1.4),如果对任意一种分法,当 $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}(\Delta x_i) \to 0$ 时 $\bar{S}(P)$(顶边为实线的矩形面积之和)和$\underline{S}(P)$(顶边为虚线的矩形面积之和)的极限都存在并且相等,那么 $f(x)$是可积的,反之亦然.下面,我们来严格证明这一结论,先引入以下引理.

引理 7.1.1 *若在原有分法中加入分点形成新的分法,则大和不增,小和不减.*

证 设 $\bar{S}(P)$和$\underline{S}(P)$是对应于某一分法 P 的 Darboux 大和与 Darboux 小和,设相应的分点为$\{x_i\}_{i=1}^{n}$,不失一般性,我们来证明,对这种分法再增加一个新分点后,所得到新分法 P' 的 Darboux 大和 $\bar{S}(P')$与 Darboux 小和 $\underline{S}(P')$,成立

$$\bar{S}(P') \leqslant \bar{S}(P), \qquad \underline{S}(P) < \underline{S}(P').$$

设增加的新分点 $x' \in (x_{i-1}, x_i)$,记 $f(x)$在$[x_{i-1}, x']$和$[x', x_i]$上的上确界分别为 M_i' 和M_i'',则显然有

$$M_i' \leqslant M_i, \qquad M_i'' \leqslant M_i,$$

于是

$$M_i'(x' - x_{i-1}) + M_i''(x_i - x') \leqslant M_i(x_i - x_{i-1}),$$

而这时 $\bar{S}(P')$和 $\bar{S}(P)$中的其他项都没有变化,因此

$$\bar{S}(P') \leqslant \bar{S}(P).$$

同理可证$\underline{S}(P) \leqslant \underline{S}(P')$.

证毕

以下记 $\bar{\mathbf{S}}$ 是一切可能的分法所得到的 Darboux 大和的集合,而$\underline{\mathbf{S}}$ 是一切

可能的分法所得到的 Darboux 小和的集合.

引理 7.1.2 对任意 $\bar{S}(P_1)\in\bar{\mathbf{S}}$ 和$\underline{S}(P_2)\in\underline{\mathbf{S}}$,恒有

$$m(b-a)\leqslant\underline{S}(P_2)\leqslant\bar{S}(P_1)\leqslant M(b-a).$$

证 任意一种分法都可以看成是由 $n=1$ 的分法

$$a=x_0<x_1=b$$

中插入若干分点所产生的新的分法,因此由引理 7.1.1 即知上式中前后两个不等式成立.

下面证明中间的不等式.若 $\bar{S}(P_1)$和$\underline{S}(P_2)$是同一种分法的 Darboux 大和与 Darboux 小和,那么不等式已经成立.若它们是相应于不同分法的 Darboux 大和与 Darboux 小和,则将这两种分法的分点合并在一起形成一种新的分法 P,设相应于新分法的 Darboux 大和与 Darboux 小和分别为 $\bar{S}(P)$和 $\underline{S}(P)$,则由引理 7.1.1

$$\underline{S}(P_2)\leqslant\underline{S}(P)\leqslant\bar{S}(P)\leqslant\bar{S}(P_1).$$

证毕

由引理 7.1.2,$\bar{\mathbf{S}}$ 和$\underline{\mathbf{S}}$ 都是有界集合,因此分别有下确界和上确界.记 $\bar{\mathbf{S}}$ 的下确界为

$$L=\inf\{\bar{S}(P)\mid\bar{S}(P)\in\bar{\mathbf{S}}\},\tag{①}$$

$\underline{\mathbf{S}}$ 的上确界为

$$l=\sup\{\underline{S}(P)\mid\underline{S}(P)\in\underline{\mathbf{S}}\},\tag{②}$$

则对任意 $\bar{S}(P_1)\in\bar{\mathbf{S}}$ 和$\underline{S}(P_2)\in\underline{\mathbf{S}}$,有

$$\underline{S}(P_2)\leqslant l\leqslant L\leqslant\bar{S}(P_1).$$

下面我们来证明,当 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\Delta x_i)\to0$ 时,Darboux 大和与 Darboux 小和的极限确实存在且分别等于它们各自的下确界和上确界.

引理 7.1.3(Darboux 定理) 对任意有界函数 $f(x)$,恒有

$$\lim_{\lambda\to0}\bar{S}(P)=L,\qquad\lim_{\lambda\to0}\underline{S}(P)=l,$$

其中 L 及 l 为由①,②式定义的值.

证 我们只就大和的情况加以证明,小和的情况是类似的,请读者自证.

对于任意给定的 $\varepsilon>0$,因为 L 是 $\bar{\mathbf{S}}$ 的下确界,所以存在着一个 $\bar{S}(P')\in\bar{\mathbf{S}}$,满足

$$0\leqslant\bar{S}(P')-L<\frac{\varepsilon}{2}.$$

设对应 $\bar{S}(P')$的分点取法为

$$P':\quad a=x'_0<x'_1<x'_2<\cdots<x'_p=b,$$

取

$$\delta = \min\left(\Delta x'_1, \Delta x'_2, \cdots, \Delta x'_p, \frac{\varepsilon}{2(p-1)(M-m)}\right),$$

对任意一个满足 $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\Delta x_i) < \delta$ 的分法

$$P: \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

记与其相应的大和为 $\bar{S}(P)$，我们在 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 中插入 $\{x'_j\}_{j=0}^p$ 形成新的分法 P^*，并将这一新分法的大和记作 $\bar{S}(P^*)$，则由引理 7.1.1，即知

$$\bar{S}(P^*) - \bar{S}(P') \leqslant 0.$$

将对应于分法 P 的区间 $\{[x_{i-1}, x_i]\}$ 分成两类：

(1) (x_{i-1}, x_i) 中不含有新插入的分点. 显然，这时 $\bar{S}(P)$ 和 $\bar{S}(P^*)$ 中的相应项同为 $M_i\Delta x_i$.

(2) (x_{i-1}, x_i) 中含有新插入的分点. 由于两种分法的端点重合，因此这样的区间至多只有 $p-1$ 个.

因为对任意 i 和 j，

$$\Delta x_i \leqslant \delta \leqslant \Delta x'_j, \quad i = 1,2,\cdots,n, \quad j = 1,2,\cdots,p,$$

所以在 (x_{i-1}, x_i) 中只有一个新插入的分点 x'_j. 利用前面的记号，这时 $\bar{S}(P)$ 和 $\bar{S}(P^*)$ 中的相应项之差为

$$\begin{aligned} & M_i(x_i - x_{i-1}) - [M'_i(x'_j - x_{i-1}) + M''_i(x_i - x'_j)] \\ \leqslant & (M-m)(x_i - x_{i-1}) \\ < & (M-m)\delta, \end{aligned}$$

于是

$$0 \leqslant \bar{S}(P) - \bar{S}(P^*) \leqslant (p-1)(M-m)\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

综合上面的结论，即有

$$\begin{aligned} 0 \leqslant & \bar{S}(P) - L \\ = & [\bar{S}(P) - \bar{S}(P^*)] + [\bar{S}(P^*) - \bar{S}(P')] + [\bar{S}(P') - L] \\ \leqslant & \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

证毕

Riemann 可积的充分必要条件

现在我们来导出可积的充分必要条件.

定理 7.1.1 有界函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积的充分必要条件是，对于任意分法，当 $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\Delta x_i) \to 0$ 时，Darboux 大和与 Darboux 小和的极限相等：

$$L = l,$$

即成立

$$\lim_{\lambda\to 0}\overline{S}(P)=\lim_{\lambda\to 0}\underline{S}(P).$$

证 先证必要性.

设 $f(x)$ 可积且积分值为 I，则由定义，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对任意分法

$$P:\quad a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

和任意点 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，只要 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\Delta x_i)<\delta$，便有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

特殊地，取 ξ_i 是 $[x_{i-1},x_i]$ 中满足

$$0\leqslant M_i-f(\xi_i)<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

的点，由于 M_i 是 $f(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 中的上确界，因此这样的 ξ_i 是一定可以取得到的.

于是

$$\begin{aligned}&\left|\overline{S}(P)-\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\right|\\&=\sum_{i=1}^{n}[M_i-f(\xi_i)]\Delta x_i\\&<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\cdot(b-a)\\&=\frac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&|\overline{S}(P)-I|\\&=\left|\overline{S}(P)-\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\right|+\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

这就是

$$\lim_{\lambda\to 0}\overline{S}(P)=I.$$

同理可证

$$\lim_{\lambda\to 0}\underline{S}(P)=I.$$

即有

$$\lim_{\lambda\to 0}\overline{S}(P)=\lim_{\lambda\to 0}\underline{S}(P).$$

再证充分性.

按 Darboux 和的定义，对任意一种分法 P，其 Darboux 大和与小和总满足

$$\underline{S}(P) \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \bar{S}(P).$$

若

$$\lim_{\lambda\to 0}\bar{S}(P) = \lim_{\lambda\to 0}\underline{S}(P) = I,$$

那么两边取极限，即有

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = I.$$

证毕

若记

$$\omega_i = M_i - m_i$$

为 $f(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的**振幅**，则定理 7.1.1 也可以等价地表述为

定理 7.1.2　有界函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可积的充分必要条件是，对任意分法，当 $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\Delta x_i) \to 0$ 时，

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i = 0.$$

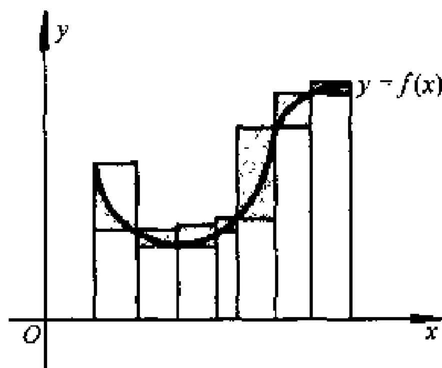


图 7.1.5

定理 7.1.2 的几何意义是图 7.1.5 中的阴影部分的面积之和当分割无限细分时趋向于零.

由上述充分必要条件可以判断某些函数类的可积性.

推论 1　闭区间上的连续函数必定可积.

证　若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则它在 $[a, b]$ 上一致连续. 也就是说，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，$\forall x', x'' \in [a, b]$，只要 $|x' - x''| < \delta$，就有

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

因此,对于任意分法,只要 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\Delta x_i)<\delta$,便有

$$\omega_i=\max_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)-\min_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)<\frac{\varepsilon}{b-a}\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\varepsilon,$$

由定理 7.1.2,$f(x)$在$[a,b]$可积.

证毕

推论 2 闭区间上的单调函数必定可积.

证 设 $f(x)$在$[a,b]$上单调,不妨设其为单调增加,则在任意小区间$[x_{i-1},x_i]$上,$f(x)$的振幅为

$$\omega_i=f(x_i)-f(x_{i-1}).$$

于是,对任意给定的 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$,当 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\Delta x_i)<\delta$ 时,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i&=\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})]\cdot\Delta x_i\\&<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})]\\&=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\cdot[f(b)-f(a)]\\&=\varepsilon,\end{aligned}$$

由定理 7.1.2,$f(x)$在$[a,b]$可积.

证毕

对于实际应用来说,定理 7.1.2 对于判别不可积可能更为方便一些.如对例 7.1.1 所述的$[0,1]$上的 Dirichlet 函数,不管如何作分割,它在每个小区间$[x_{i-1},x_i]$上的振幅恒有 $\omega_i=1$,于是,

$$\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=1,$$

所以 Dirichlet 函数不是 Riemann 可积的.

但是,要通过"对任意分法都有$\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i\to0(\lambda\to0)$"来证明可积,一般说来是很困难的,下面我们给出一个更易于判断的条件.

让我们回顾一下 Darboux 定理.仔细分析其证明过程可以知道,它实际上证明了:$\forall\varepsilon>0$,只要有一个分法 P',使得

$$0\leqslant\overline{S}(P')-L<\frac{\varepsilon}{2}\quad(\text{或 }0\leqslant l-\underline{S}(P')<\frac{\varepsilon}{2}),$$

那么就一定存在某个 $\delta>0$，对满足 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\Delta x_i)<\delta$ 的任意一种分法 P，必有

$$0\leqslant \bar{S}(P)-L<\varepsilon \quad (\text{或}\, 0\leqslant l-\underline{S}(P)<\varepsilon).$$

利用这一思想，即可推出如下结论.

定理 7.1.3 有界函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积的充分必要条件是，$\forall\varepsilon>0$，存在着一种分法，使得相应的振幅满足

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon.$$

证明留给读者.

推论 3 闭区间上只有有限个不连续点的有界函数必定可积.

证 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的不连续点共有 k 个，记为 $a=p'_1<p'_2<\cdots<p'_k=b$，设相邻两个点之间的最小距离为 d. 不妨假设 p'_1 和 p'_k 在 $[a,b]$ 的内部.

$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\left(\dfrac{p'_1-a}{2},\dfrac{b-p'_k}{2},\dfrac{d}{3},\dfrac{\varepsilon}{4k(M-m)}\right)>0$，先以 p'_j 的 δ 领域的两个端点 $p'_j-\delta$、$p'_j+\delta$ 为分点，将 $[a,b]$ 分成 $2k+1$ 个子区间，于是 $f(x)$ 在子区间 $D^{(1)}=[a,p'_1-\delta]$，$D^{(j)}=[p'_{j-1}+\delta,p'_j-\delta]\,(j=2,\cdots,k)$，$D^{(k+1)}=[p'_k+\delta,b]$ 上连续. 由推论 1，$f(x)$ 在这些子区间上都可积，所以在每个 $D^{(j)}$ 上分别存在分点

$$x_0^{(j)}<x_1^{(j)}<\cdots<x_{l_j}^{(j)} \quad (j=1,\cdots,k+1)$$

使得

$$\sum_{i=1}^{l_j}\omega_i^{(j)}\Delta x_i^{(j)}<\frac{\varepsilon}{2(k+1)}.$$

将所有分点合为一组，看成是 $[a,b]$ 的一个分法，记 ω'_j 为 $f(x)$ 在 $[p'_j-\delta,p'_j+\delta]$ 的振幅，即有

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i\\
&=\sum_{j=1}^{k+1}\sum_{i=1}^{l_j}\omega_i^{(j)}\Delta x_i^{(j)}+\sum_{j=1}^{k}\omega'_j[(p'_j+\delta)-(p'_j-\delta)]\\
&<(k+1)\cdot\frac{\varepsilon}{2(k+1)}+\frac{2\varepsilon}{4k(M-m)}\cdot k(M-m)\\
&=\varepsilon,
\end{aligned}$$

由定理 7.1.3，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积.

当 p'_1 和 p'_k 为 $[a,b]$ 的端点时可类似证得.

证毕

显然,若对任意分法,一个函数在各个小区间上的最大振幅 $\max(\omega_i)$ 随着 $\lambda\to0$ 而趋向于零,那它当然就是个可积函数.但定理7.1.2同时也启发我们,若一个函数虽然它的最大振幅并不随 $\lambda\to0$ 而趋向于零,但包含这种情况的小区间的长度 Δx_i 之和却趋向于零,这个函数仍有可能是 Riemann 可积的.

例 7.1.2 证明 Riemann 函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{p}, & x=\dfrac{q}{p}\text{ 为既约分数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

在[0,1]上可积.

解 由 Riemann 函数的性质,$\forall\varepsilon>0$,在[0,1]上使得 $R(x)>\frac{\varepsilon}{2}$ 的点至多只有有限个,不妨设是 k 个,记为 $0=p_1'<p_2'<\cdots<p_k'=1$.

作[0,1]的分点

$$0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{2k-1}=1,$$

使得满足

$$\begin{aligned}
&p_1'\in[x_0,x_1], && x_1-x_0<\frac{\varepsilon}{2k},\\
&p_2'\in[x_2,x_3], && x_3-x_2<\frac{\varepsilon}{2k},\\
&\cdots\cdots\\
&p_k'\in[x_{2k-2},x_{2k-1}], && x_{2k-1}-x_{2k-2}<\frac{\varepsilon}{2k},
\end{aligned}$$

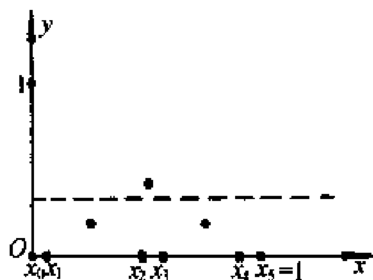


图 7.1.6

图 7.1.6 表示的是 $k=3$ 的情况.由于

$$\sum_{i=1}^{2k-1}\omega_i\Delta x_i=\sum_{j=0}^{k-1}\omega_{2j+1}\Delta x_{2j+1}+\sum_{j=1}^{k-1}\omega_{2j}\Delta x_{2j},$$

而在右边的第一个和式中,有 $\Delta x_{2j+1}<\frac{\varepsilon}{2k}$ 且 $\omega_{2j+1}\leqslant1$;在第二个和式中,有

$\omega_{2j} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ 且 $\sum_{j=1}^{k-1} \Delta x_{2j} < 1$,因此得到

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < k \cdot \frac{\varepsilon}{2k} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

由定理 7.1.3,Riemann 函数可积.

证毕

习　　题

1. 用定义计算下列定积分:

(1) $\int_0^1 (ax+b)\mathrm{d}x$;　　　(2) $\int_0^1 a^x \mathrm{d}x\ (a>0)$.

2. 证明:若对 $[a,b]$ 的任意分法 P 和任意点 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$,极限 $\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 都存在,则 $f(x)$ 必是 $[a,b]$ 上的有界函数.

3. 证明 Darboux 定理的后半部分:对任意有界函数 $f(x)$,恒有

$$\lim_{\lambda\to 0} \underline{S}(P) = l.$$

4. 证明定理 7.1.3.

5. 讨论下列函数在 $[0,1]$ 的可积性:

(1) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right], & x\neq 0, \\ 0, & x=0; \end{cases}$　　(2) $f(x)=\begin{cases} -1, & x\text{ 为有理数}, \\ 1, & x\text{ 为无理数}; \end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases} 0, & x\text{ 为有理数}, \\ x, & x\text{ 为无理数}; \end{cases}$　　(4) $f(x)=\begin{cases} \operatorname{sng}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right), & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

6. 设有界函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的不连续点为 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$,且 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在,证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

7. 开区间 (a,b) 上的有界连续函数是否可积?

§2　定积分的基本性质

本节中,我们利用定积分的定义及其存在的充分必要条件,来给出定积分的一些基本性质,这些性质无论对于定积分的理论分析还是实际计算,都是十分重要的.

性质 1(线性性质)　设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 可积,则对任意给定的常数 k_1 和 k_2,函数 $k_1 f(x)+k_2 g(x)$ 在 $[a,b]$ 也可积,且有

$$\int_a^b [k_1 f(x) + k_2 g(x)]\mathrm{d}x = k_1\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + k_2\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

证　对$[a,b]$的任意一个分法，

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

和任意点 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$，成立等式

$$\sum_{i=1}^{n}[k_1 f(\xi_i) + k_2 g(\xi_i)]\Delta x_i = k_1\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + k_2\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i.$$

两边令 $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\Delta x_i)\to 0$，由于 $f(x)$和 $g(x)$都在$[a,b]$可积，因此有

$$\begin{aligned}&\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[k_1 f(\xi_i) + k_2 g(\xi_i)]\Delta x_i\\ &= k_1\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + k_2\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i\\ &= k_1\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + k_2\int_a^b g(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

由定义，这就是 $k_1 f(x) + k_2 g(x)$在$[a,b]$可积，且

$$\int_a^b [k_1 f(x) + k_2 g(x)]\mathrm{d}x = k_1\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + k_2\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

证毕

由定积分的线性性质和上一节的推论 3 可以得出一个重要结论：

推论　若 $f(x)$在$[a,b]$上可积，而 $g(x)$只在有限个点上与 $f(x)$的取值不相同，则 $g(x)$在$[a,b]$上也可积，并且有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

这就是说，若在有限个点上改变一个可积函数的函数值，并不影响其可积性和积分值.

推论作为习题留给读者自证.

性质 2(乘积可积性)　设 $f(x)$和 $g(x)$都在$[a,b]$可积，则 $f(x)g(x)$在$[a,b]$也可积.

证　记 M 是某个满足

$$|f(x)| \leqslant M, \qquad x \in [a,b]$$

和

$$|g(x)| \leqslant M, \qquad x \in [a,b]$$

的常数. 对$[a,b]$的任意分法

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

设 $\hat{x}$ 和 $\tilde{x}$ 是$[x_{i-1}, x_i]$中的任意两点，有

$$\begin{aligned}&|f(\hat{x})g(\hat{x}) - f(\tilde{x})g(\tilde{x})|\\ \leqslant &|f(\hat{x}) - f(\tilde{x})|\cdot|g(\hat{x})| + |f(\tilde{x})|\cdot|g(\hat{x}) - g(\tilde{x})|\end{aligned}$$

$$\leqslant M[|f(\hat{x})-f(\tilde{x})|+|g(\hat{x})-g(\tilde{x})|].$$

记 $f(x)g(x)$在小区间$[x_{i-1},x_i]$的振幅为 ω_i,并将 $f(x)$和 $g(x)$在小区间$[x_{i-1},x_i]$的振幅分别记为 ω_i' 和 ω_i'',则上式意味着

$$\omega_i\leqslant M(\omega_i'+\omega_i''),$$

因此有

$$0\leqslant\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i\leqslant M\left(\sum_{i=1}^{n}\omega_i'\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}\omega_i''\Delta x_i\right).$$

由于 $f(x)$和 $g(x)$都在$[a,b]$可积,因而当 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\Delta x_i)\to0$ 时,上面的不等式的右端趋向于零.由极限的夹逼性,得到

$$\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=0,$$

由 Riemann 可积的充分必要条件,即知 $f(x)g(x)$在$[a,b]$可积.

证毕

要注意的是,一般说来

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\neq\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right),$$

请读者自行举出例子(留作习题).

性质 3(保序性) 设 $f(x)$和 $g(x)$都在$[a,b]$可积,且在$[a,b]$上恒有$f(x)\geqslant g(x)$,则成立

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

证 由性质 1,我们只要证明对$[a,b]$中的任意一个非负函数 $f(x)$,都有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant0$$

就可以了.

对$[a,b]$的任意一个分法

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

和任意点 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$,由于在$[a,b]$都成立 $f(x)\geqslant0$,因此有

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\geqslant0.$$

两边令 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\Delta x_i)\to0$,由极限的保序性,即知

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\geqslant0.$$

证毕

请读者自行分析性质 3 的几何意义.

性质 4(绝对可积性) 设 $f(x)$在$[a,b]$可积,则$|f(x)|$在$[a,b]$也可积,且成立

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

证 由于对于任意两点 $\hat{x}$ 和 $\tilde{x}$,都有

$$\left||f(\hat{x})| - |f(\tilde{x})|\right| \leqslant |f(\hat{x}) - f(\tilde{x})|$$

仿照性质 2 的证明即可证得$|f(x)|$在$[a,b]$可积.

因为对任意 x 成立

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|,$$

由性质 1 和性质 3 得到

$$-\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x,$$

这就是

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

证毕

要注意的是,性质 4 的逆命题是不成立的,也就是说,由$|f(x)|$在$[a,b]$可积并不能得出 $f(x)$在$[a,b]$也可积.

例如,函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数}, \\ -1, & x \text{ 为无理数}, \end{cases} \quad x \in [0,1]$$

在任意一个小区间上的振幅恒为 2,所以是不可积的.但是

$$|f(x)| \equiv 1, \qquad x \in [0,1],$$

它在$[0,1]$上显然是可积的.

性质 5(区间可加性) 设 $f(x)$在$[a,b]$可积,则对任意点 $c \in [a,b]$,$f(x)$在$[a,c]$和$[c,b]$都可积,并成立

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

反过来,若 $f(x)$在$[a,c]$和$[c,b]$都可积,则 $f(x)$在$[a,b]$可积,同样有上式成立.

证 先假定 $f(x)$在$[a,b]$可积,设 c 是$[a,b]$中任意给定的一点.

由定理 7.1.3,$\forall \varepsilon > 0$,存在$[a,b]$的一个分法

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

使得满足

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon.$$

我们总可以假定 c 是其中的某一个分点 x_k，否则只要在原有分点中插入 c 作为新的分法，由 Darboux 和的性质 1，上面的不等式仍然成立.

将

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_k=c,$$

和

$$c=x_k<x_{k+1}<x_{k+2}<\cdots<x_n=b,$$

分别看成是对 $[a,c]$ 和 $[b,c]$ 作的一个分法，则显然有

$$\sum_{i=1}^{k}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$$

和

$$\sum_{i=k+1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon,$$

由定理 7.1.3，$f(x)$ 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 都是可积的.

反过来，若 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 都可积，则 $\forall\varepsilon>0$，分别存在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 的一个分法

$$a=x_0'<x_1'<x_2'<\cdots<x_{n_1}'=c$$

和

$$c=x_0''<x_1''<x_2''<\cdots<x_{n_2}''=b,$$

使得

$$\sum_{i=1}^{n_1}\omega_i'\Delta x_i'<\frac{\varepsilon}{2}$$

和

$$\sum_{i=1}^{n_2}\omega_i''\Delta x_i''<\frac{\varepsilon}{2},$$

将这两组分点合起来作为 $[a,b]$ 的一组分点 $\{x_i\}_{i=0}^{n}$，这里 $n=n_1+n_2$，于是得到

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n_1}\omega_i'\Delta x_i'+\sum_{i=1}^{n_2}\omega_i''\Delta x_i''<\varepsilon,$$

因此 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积.

在 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$、$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ 都存在的条件下，利用定积分的定义，容易证明

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(证明留作习题.)

证毕

由于规定了

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x,$$

读者不难证明,当 c 是$[a,b]$之外的一点时,定积分的区间可加性依然成立.

性质 6(积分第一中值定理) 设 $f(x)$和 $g(x)$都在$[a,b]$可积,$g(x)$在$[a,b]$上不变号,则存在 $\eta\in[m,M]$,使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \eta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

这里 M 和 m 分别表示$f(x)$在$[a,b]$的上确界和下确界.

特别地,若 $f(x)$在$[a,b]$上连续,则存在 $\xi\in[a,b]$,使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

证　因为 $g(x)$在$[a,b]$上不变号,不妨设

$$g(x)\geqslant 0,\qquad x\in[a,b],$$

所以有

$$mg(x)\leqslant f(x)g(x)\leqslant Mg(x).$$

由性质 1 和性质 3,得到

$$m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

由于$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 和$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 都是常数,因而必有某个 $\eta\in[m,M]$,使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \eta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

若 $f(x)$在$[a,b]$上连续,则由闭区间上连续函数的中间值定理,此时必存在某个 $\xi\in[a,b]$,使得 $f(\xi)=\eta$,即有

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

证毕

我们来看一个特殊的情况.当 $f(x)$在$[a,b]$上连续,而 $g(x)\equiv 1$ 时,上述积分第一中值定理的结论就变成了

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a),$$

它的几何意义十分明确(图 7.2.1):当 $f(x)\geqslant 0$ 时,上式的左边表示由曲线 $f(x)$和直线 $x=a$、$x=b$ 以及 x 轴围成的曲边梯形的面积,它一定等于以

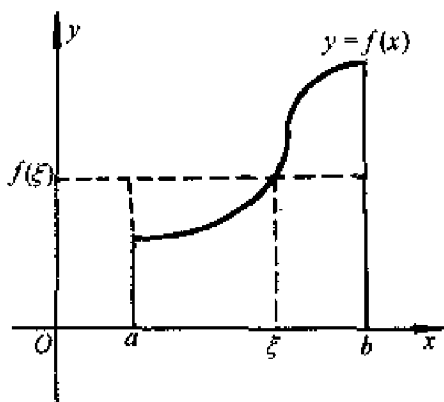


图 7.2.1

$[a,b]$为底、某个 $f(\xi)$为高的矩形面积.

习　题

1. 设 $f(x)$在$[a,b]$上可积,$g(x)$在$[a,b]$上定义,且在$[a,b]$中除了有限个点之外,都有 $f(x)=g(x)$,证明 $g(x)$在$[a,b]$上也可积,并且有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

2. 设 $f(x)$和 $g(x)$在$[a,b]$上都可积,举例说明在一般情况下

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \neq \left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right).$$

3. 设 $f(x)$在$[a,b]$上可积,$A\leqslant f(x)\leqslant B$,$g(x)$在$[A,B]$上连续,证明复合函数 $g(f(x))$在$[a,b]$上可积.

4. 证明:对任意实数 a,b,c,只要 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ 和$\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ 都存在,就有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

5. 判断下列积分的大小:

(1)$\int_0^1 x\mathrm{d}x$ 和$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$;　　(2)$\int_1^2 x\mathrm{d}x$ 和$\int_1^2 x^2\mathrm{d}x$;

(3)$\int_{-2}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^x\mathrm{d}x$ 和$\int_0^1 2^x\mathrm{d}x$;　　(4)$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x$ 和$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}x$.

6. 设 $f(x)$在$[a,b]$连续,$f(x)\geqslant 0$ 但不恒为 0,证明

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0.$$

7. 设 $f(x)$在$[a,b]$连续, $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=0$, 证明 $f(x)$在$[a,b]$上恒为0.

8. 设 $y=f(x)$是$[0,\infty)$上单调增加的连续函数, $f(0)=0$,记它的反函数为 $x=f^{-1}(y)$,证明

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^b f^{-1}(y)\mathrm{d}y\geqslant ab \qquad (a>0,b>0).$$

9. 证明定积分的连续性:设函数 $f(x)$和 $f_h(x)=f(x+h)$在$[a,b]$上可积,则有

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b |f_h(x)-f(x)|\mathrm{d}x=0.$$

10. 设 $f(x)$和 $g(x)$在$[a,b]$上都可积,证明不等式

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2\leqslant\left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right).$$

§3 微积分基本定理

从实例看微分与积分的联系

尽管听到人们总是将微分与积分连在一起,统称为"微积分",但是到目前为止,我们似乎还不曾发现微分与积分有任何联系(这里的"积分"是指定积分).

事实上,揭示微分与积分之间的内在联系是需要许多预备知识的.眼下方可以说,这些预备知识已经基本有了,可以为这两个重要的概念建立桥梁了.

先来看两个颇具启发性的例子.与我们研究导数时相仿,这两个例子仍然分别来自力学问题和几何学问题.

在引入定积分定义时我们已经知道,以速度 $v(t)$作变速运动的物体,在时间$[T_1,T_2]$中所走过的路程 S 可以表示为定积分

$$S=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n v(\xi_i)\Delta t_i=\int_{T_1}^{T_2}v(t)\mathrm{d}t,$$

但是,这个和式的极限可能是很难求的.

让我们换一个角度考虑问题,由于物体在时间$[0,t]$所走过的路程为 $S(t)$,那么它在时间$[T_1,T_2]$中所走过的路程 S 可以表示为

$$S=S(T_2)-S(T_1).$$

注意到 $v(t)=S'(t)$,或者说 $S(t)$是 $v(t)$的一个原函数,所以

$$\int_{T_1}^{T_2}v(t)\mathrm{d}t=\int_{T_1}^{T_2}S'(t)\mathrm{d}t=S(T_2)-S(T_1).$$

这个式子说明, $v(t)$在$[T_1,T_2]$中的积分值可以用它的一个原函数在积分区间的两个端点处的函数值之差来表示.

这是不是一个普遍的规律呢？我们再来看一个例子.

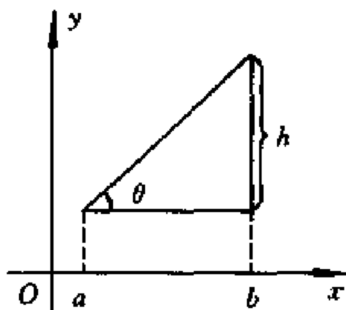


图 7.3.1

一个以区间[a,b]为底边的直角三角形，在已知斜边与底边的夹角为 θ 的情况下(图 7.3.1)，容易知道它的高为

$$h = \tan\theta \cdot (b-a).$$

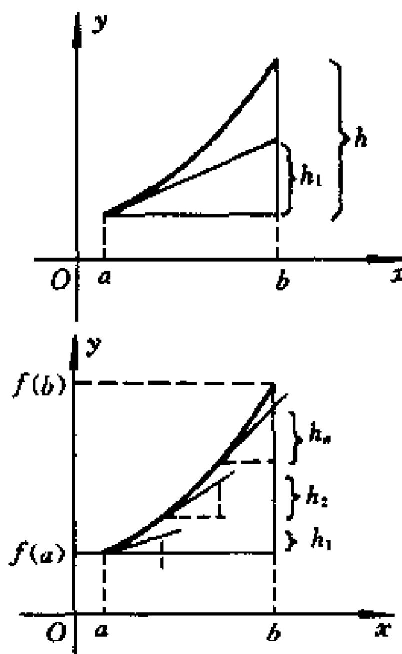


图 7.3.2

对于一边为曲线 $y=f(x)$的曲边直角三角形(图 7.3.2a)，若将垂直于底边的那条直角边的长度形式地视为它的“高”，并将它在 $x=a$ 处的导数值 $f'(a)$近似作为 $\tan\theta$，那么它的“高”近似等于

$$h \approx h_1 = f'(a)\cdot(b-a),$$

但这么得到的结果无疑是很粗糙的.

要提高精度，可以对$[a,b]$作分割

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

在每个小区间$[x_{i-1},x_i]$上，分别象上面所做的那样，作它们的近似的高

$$h_i = f'(x_{i-1}) \cdot \Delta x_i,$$

(图 7.3.2b)，再将所有的 h_i 加起来，就得到近似的高度为

$$h \approx \sum_{i=1}^{n} h_i = \sum_{i=1}^{n} f'(x_{i-1})\Delta x_i.$$

显然，令小区间的最大长度 $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\Delta x_i)\to 0$，就可以得到曲边三角形的准确的"高"为

$$h = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f'(x_{i-1})\Delta x_i.$$

但若仔细想想，有必要这样又是分割，又是求导，又是求和，又是求极限地算吗？这个曲边三角形的"高"不就是函数值在两个端点处的差嘛，何不直截了当地计算 $f(b)-f(a)$呢？

这就是说，对于这个具体的问题，成立

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f'(x_{i-1})\Delta x_i = f(b) - f(a).$$

我们又一次得到了与前面的求路程问题同样性质的结果：$f'(x)$在$[a,b]$中的定积分值，可以用它的一个原函数 $f(x)$在积分区间的两个端点处的函数值之差来表示.

微积分基本定理——Newton - Leibniz 公式

若 $f(x)$在$[a,b]$可积，由定积分的区间可加性，可知对任意一点 $x\in[a,b]$，$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 都是存在的. 当 x 在$[a,b]$上变化时，$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 的值也随之而变化，所以它是定义在$[a,b]$上的关于 x 的函数. 这个函数具有如下的重要性质：

定理 7.3.1 设 $f(x)$在$[a,b]$可积，作函数

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t, \qquad x\in[a,b],$$

则

(1)$F(x)$是$[a,b]$上的连续函数.

(2)若 $f(x)$在$[a,b]$连续，则 $F(x)$在$[a,b]$上可微，并且有

$$F'(x) = f(x).$$

证 (1)由定理条件，知 $F(x)$在整个$[a,b]$上都有定义. 由定积分的区间可加性，

$$F(x+\Delta x)-F(x)=\int_a^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t,$$

记 m、M 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值，由积分第一中值定理，即得到

$$F(x+\Delta x)-F(x)=\eta\cdot\Delta x\quad(\eta\in[m,M]),$$

显然，当 $\Delta x\to0$ 时有 $F(x+\Delta x)-F(x)\to0$，即 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

(2)若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，同样由积分第一中值定理，有

$$F(x+\Delta x)-F(x)=f(\xi)\Delta x\quad(\xi\text{ 在 }x\text{ 与 }x+\Delta x\text{ 之间}),$$

当 $\Delta x\to0$ 时有 $\xi\to x$，因而 $f(\xi)\to f(x)$，于是

$$F'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}f(\xi)=f(x).$$

证毕

这个定理具有非常重要的意义.

首先，它扩展了函数的形式. 迄今为止，我们所学到的函数，除了个别特殊的如 $D(x)$、$R(x)$ 等外，都是初等函数. 那么，什么样的函数不是初等函数呢？现在我们知道当 $\int f(x)\mathrm{d}x$"积不出"时，$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 就表示了不能归入初等函数范围的一类函数，它无法用基本初等函数的有限次四则运算和复合来表达，但确实是一类函数：满足函数的定义，可以象初等函数那样进行四则运算、复合乃至求微分、求积分和其它运算. 它使我们对函数的认识产生了一个飞跃. 以后我们会看到，它是我们描述和研究客观事物及其变化规律的又一有力武器.

进而，它说明了，当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续时，$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数. 这就是我们在第六章 §3 中所断言的，一切连续函数都存在原函数. 如 $\int_a^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ 是 $\frac{\sin x}{x}$ 的一个原函数，$\int_a^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 是 e^{-x^2} 的一个原函数，如此等等.

另外，定理 7.3.1 的结论(2)

$$\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)'=f(x)$$

还给出了对这类函数求导(通常称为"**对积分上限求导**")的一个法则.

例 7.3.1　计算 $F(x)=\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$ 的导数.

解　记 $u=x^2$，则

$$F(x)=G(u)=\int_0^u\sin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t,$$

由复合函数求导法则,

$$F'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}G(u)\cdot u'(x)$$
$$=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\int_0^u\sin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t\right)\Bigg|_{u=x^2}\cdot 2x$$
$$=2x\sin|x|.$$

例 7.3.2 求极限 $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t}{x^3}$.

解 由于 $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0$,因此这个极限是 $\frac{0}{0}$ 待定型. 由 L'Hospital 法则和上题结论,

$$\lim_{x\to0+}\frac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\ \mathrm{d}t}{x^3}=\lim_{x\to0+}\frac{\left(\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t\right)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to0+}\frac{2x\sin x}{3x^2}=\frac{2}{3}.$$

下面,我们用定理 7.3.1 来导出微积分学中最为重要的结论.

定理 7.3.2(微积分基本定理) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数,则成立

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a).$$

证 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的任一个原函数,而由定理 7.3.1, $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 也是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数,因而两者至多相差一个常数. 记

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=F(x)+C,$$

令 $x=a$,即得到 $C=-F(a)$,所以

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=F(x)-F(a).$$

再令 $x=b$,由于定积分中的自变量用什么记号与积分值无关,便可得到

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=F(b)-F(a).$$

证毕

定理的结论被称为"**Newton-Leibniz 公式**",公式中的 $F(b)-F(a)$ 常常记为 $F(x)\Big|_a^b$,也就是

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b.$$

Newton－Leibniz 公式是高等数学乃至整个数学领域中最优美的结论之一.它的形式非常简单,不仅通过建立不定积分与定积分的关系深刻地揭示了微分与积分的联系,同时还"指点迷津",给出了利用原函数(即不定积分)便捷地计算定积分的途径.

例 7.3.3 计算 $\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x$.

解 因为 $\int x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + C$,所以可取 $F(x)$ 为 $\frac{1}{3}x^3$,于是由 Newton－Leibniz 公式

$$\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

这正是我们在本章§1中用无限求和的办法求出的那个曲边三角形的面积.

例 7.3.4 求 $\int_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x$.

解 因为 $-\cos x$ 是 $\sin x$ 的一个原函数,所以,

$$\int_0^{\pi} \sin x \mathrm{d}x = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0 = 2.$$

例 7.3.4 说明 $y = \sin x$ 的一拱的面积恰为整数 2,可算是一个出人意料的有趣结果.

不仅如此,对于一些比较难处理,往往需要用些特殊技巧来计算的和式的极限问题,有了 Newton－Leibniz 公式,使得我们有可能峰回路转,将其转化为一个定积分问题来算.

例 7.3.5 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$.

解 将原式改写成

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right).$$

上式可以看成是函数 $f(x) = \frac{1}{1+x}$ 在区间 $[0,1]$ 上的 Riemann 和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

其中 $\xi_i = \frac{i}{n}$, $\Delta x_i = \frac{1}{n}$. 于是,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2,$$

与我们在极限论中(利用趋向于 Euler 常数的特殊数列)所得到的结果相同.

定积分的换元积分法和分部积分法

若将 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 理解为 $f(x)$ 的任意一个给定的原函数,则 Newton－Leibniz 公式可以从形式上表达为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)\Big|_a^b,$$

因此,求不定积分的运算法则可以全部平行地移到定积分计算中来.(当然,我们总假定在运用这些法则进行运算的过程中,$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的各种转换形式在相应的区间上始终保持可积性.)

第一类换元积分法和分部积分法都可以不加改动地直接运用:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x=F(g(x))\Big|_a^b,$$

$$\int_a^b u(x)\mathrm{d}[v(x)]=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)\mathrm{d}[u(x)].$$

例 7.3.6　求 $\int_0^\pi e^{\cos x}\sin x\mathrm{d}x$.

解

$$\int_0^\pi e^{\cos x}\sin x\mathrm{d}x=-\int_0^\pi e^{\cos x}\mathrm{d}(\cos x)$$

$$=-e^{\cos x}\Big|_0^\pi=e-\frac{1}{e}.$$

例 7.3.7　求由曲线 $y=x\sin x(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 和 x 轴围成的面积.

解　由定积分的几何意义,

$$S=\int_0^\pi x\sin x\mathrm{d}x$$

$$=-x\cos x\Big|_0^\pi+\int_0^\pi\cos x\mathrm{d}x$$

$$=\pi+\sin x\Big|_0^\pi=\pi.$$

下面我们用定积分的分部积分法导出一个重要结论,先引进一个定义.

定义 7.3.1　设 $g_n(x)$是定义在$[a,b]$上的函数$(n=0,1,2,\cdots)$,若对任意的 m 和 n, $g_m(x)g_n(x)$在$[a,b]$上可积,且有

$$\int_a^b g_m(x)g_n(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \int_a^b g_n^2(x)\mathrm{d}x>0, & m=n,\end{cases}$$

则称$\{g_n(x)\}$是$[a,b]$上的**正交函数列**.特别地,当 $g_n(x)$是 n 次多项式时,称$\{g_n(x)\}$是$[a,b]$上的**正交多项式**.

在第五章的例 5.1.1 中,我们已知 n 次 Legendre 多项式为

$$p_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^2 n,\quad n=0,1,2,\cdots,$$

它在$(-1,1)$上恰有 n 个不同的实根,现在我们来证明$\{p_n(x)\}$是$[-1,1]$上的正交多项式.

例 7.3.8　证明: $\int_{-1}^1 p_m(x)p_n(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \dfrac{2}{2n+1}, & m=n.\end{cases}$

证　设 $n\geqslant m$,记

$$\begin{aligned}I_{mn}&=m!n!2^m2^n\int_{-1}^1 p_m(x)p_n(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}(x^2-1)^m\cdot\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

将$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}(x^2-1)^m$ 看成 $u(x)$,将$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n$ 看成 $v'(x)$,利用分部积分法,

$$\begin{aligned}I_{mn}=&\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}(x^2-1)^m\cdot\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x^2-1)^n\Big|_{-1}^1\\&-\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}^{m+1}}{\mathrm{d}x^{m+1}}(x^2-1)^m\cdot\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x^2-1)^n\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

在第五章中我们已经知道,函数

$$\frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}(x^2-1)^n,\quad k=1,2,\cdots,n-1$$

中都含有(x^2-1)因子,因此

$$\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x^2-1)^n\Big|_{x=1}=\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x^2-1)^n\Big|_{x=-1}=0,$$

$$\therefore I_{mn}=-\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}^{m+1}}{\mathrm{d}x^{m+1}}(x^2-1)^m\cdot\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x^2-1)^n\mathrm{d}x.$$

反复执行上述过程,最后得到

$$I_{mn}=(-1)^n\int_{-1}^1\left[\frac{\mathrm{d}^{m+n}}{\mathrm{d}x^{m+n}}(x^2-1)^m\right]\cdot(x^2-1)^n\mathrm{d}x.$$

(1)若 $n>m$,则有$\frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}(x^2-1)\equiv 0$,因此

$$\int_{-1}^{1}p_m(x)p_n(x)dx=0.$$

(2)若 $n=m$,则有$\frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}(x^2-1)^m=(2n)!$,再次利用分部积分法,

$$\begin{aligned}I_{nn}&=(2n)!\int_{-1}^{1}(1-x)^n(1+x)^n dx\\&=\frac{(2n)!n}{n+1}\int_{-1}^{1}(1-x)^{n-1}(1+x)^{n+1}dx\\&=\frac{(2n)!n(n-1)}{(n+1)(n+2)}\int_{-1}^{1}(1-x)^{n-2}(1+x)^{n+2}dx\\&=\cdots\cdots\\&=\frac{(2n)!n(n-1)\cdots 1}{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}\int_{-1}^{1}(1+x)^{2n}dx\\&=\frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{2n+1},\end{aligned}$$

于是便有

$$\int_{-1}^{1}p_n^2(x)dx=\frac{I_{nn}}{(n!)^2 2^{2n}}=\frac{2}{2n+1}.$$

证毕

求定积分也经常采用递推的办法.下例中直接用定积分的分部积分法求 $\sin^n x$ 在$[0,\frac{\pi}{2}]$上的积分值(在例 6.2.16 中已得到它的原函数的递推表达式).

例 7.3.9 求 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx$.

解 显然

$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^0 x dx=\frac{\pi}{2},$$

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=1.$$

而对于 $n\geqslant 2$,则有

$$\begin{aligned}I_n&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\cdot\sin x dx\\&=-\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cdot\cos^2 x dx\end{aligned}$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}x \cdot \cos^2 x \mathrm{d}x$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}x \cdot (1-\sin^2 x)\mathrm{d}x$$

$$= (n-1)(I_{n-2} - I_n),$$

于是得到递推关系

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

沿用例 5.4.3 中的记号并规定 $0!! = 1$,即得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdots \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdots \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \dfrac{\pi}{2}, & n = \text{偶数}, \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n = \text{奇数}. \end{cases}$$

第二类换元积分法理论上也可以不加改动地直接运用.

现设 $x = \varphi(t)$ 是 $t \in [\alpha, \beta]$ 上的连续可微函数,且有 $\varphi(\alpha) = a$ 和 $\varphi(\beta) = b$,并假设 $f(x)$ 在包含了 $\varphi(t)$ 的值域的范围内定义且连续. 记 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的某个原函数,由复合函数求导法则,可知 $F(\varphi(t))$ 是 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 一个原函数. 按 Newton-Leibniz 公式,即有

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

所以实际计算中,可在做变量代换 $x = \varphi(t)$ 时,将积分的上下限一起做代换,完全化作关于 t 的定积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \xrightarrow[\substack{\alpha = \varphi^{-1}(a) \\ \beta = \varphi^{-1}(b)}]{x = \varphi(t)} \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

来做.

例 7.3.10 求半径为 r 的圆的面积.

解 设圆的方程为

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

利用对称性,我们只求它在第一象限部分的面积.

在第一象限,它的方程是

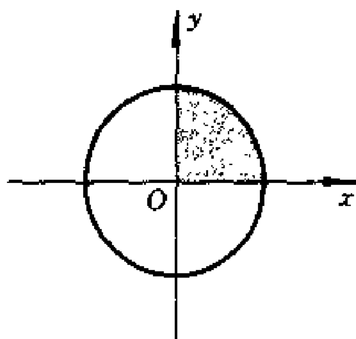


图 7.3.3

$$y=\sqrt{r^2-x^2},$$

因此,相应的面积应为 $\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\mathrm{d}x$.

令 $x=\varphi(t)=r\sin t$,于是 $\mathrm{d}x=r\cos t\mathrm{d}t$,积分区间由 $x\in[0,1]$变为 $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$,这样,原式化成了

$$\begin{aligned}\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\mathrm{d}x&=r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2t\mathrm{d}t\\&=\frac{r^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi r^2}{4}.\end{aligned}$$

由此,整个圆的面积为 $S=\pi r^2$.

在用第二类换元积分法的时候要注意:

(1)做变换时只要保证 $\varphi(t)$的值域包含在 $f(x)$的连续范围内,并在端点有 $\varphi(\alpha)=a$ 和 $\varphi(\beta)=b$,并不一定要求 $x=\varphi(t)$是一个单调的一一对应的函数.

如在上例中,要是做变换 $x=\varphi(t)=r\sin t$ 并令 t 从 π 变到$(2+\frac{1}{2})\pi$,虽然此时 $\varphi(t)$不是单调的,但由于 $\varphi(t)$的值域$[-r,r]$包含在 $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$的定义域中,且 $\varphi(\pi)=0,\varphi\left((2+\frac{1}{2})\pi\right)=r$,从而将原式化成

$$\begin{aligned}\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\mathrm{d}x&=r^2\int_\pi^{(2+\frac{1}{2})\pi}\sqrt{1-\sin^2t}\,\mathrm{d}(\sin t)\\&=r^2\int_\pi^{(2+\frac{1}{2})\pi}|\cos t|\cdot\cos t\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

也将得到正确的结论.

(2)变换后的定积分 $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$ 的上下限α 和β 必须与原来的上

下限 a 和 b 相对应，否则会出错.

同样在上例中，若变换改为 $x=\varphi(t)=r\cos t$，在区间 $x\in[0,r]$ 与 $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 之间，$x=\varphi(t)$ 是一一对应的函数. 但若贸然将原式按例 7.3.10 的步骤，依样画葫芦地化成

$$\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x = -r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,\mathrm{d}t,$$

结果将会大谬不然. 因为由定积分的保序性，$-r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,\mathrm{d}t$ 的值必小于零无疑，这么一块面积，怎么可能会是负值呢？

错误的原因就在于变换后的积分上下限颠倒了. $x=\varphi(t)=r\cos t$ 确实是把积分区间由 $x\in[0,r]$ 变为 $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$，但此时

$$\alpha=\varphi^{-1}(0)=\frac{\pi}{2},\quad \beta=\varphi^{-1}(r)=0,$$

因此要将原式化成

$$\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x = -r^2\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 t\,\mathrm{d}t$$

才对.

定积分的如下两条性质的几何意义很清楚，从定义出发严格证明也很简单. 作为一个练习，请读者改用换元积分的方法自行证明.

定理 7.3.3 设 $f(x)$ 在对称区间 $[-a,a]$ 上可积，

(1) 若 $f(x)$ 是偶函数，则成立

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2) 若 $f(x)$ 是奇函数，则成立

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

定理 7.3.4 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的可积函数，则对任意 a，

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x.$$

这些性质对讨论有些问题很有帮助，下面我们来举两个例子.

例 7.3.11 计算 $\int_0^2 \frac{(x-1)^2+1}{(x-1)^2+x^2(x-2)^2}\,\mathrm{d}x$.

先来看一个不正确的解法.

"利用求有理函数的不定积分方法，求得

$$\int \frac{(x-1)^2+1}{(x-1)^2+x^2(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = \arctan\frac{x(x-2)}{x-1}+C,$$

于是，由 Newton－Leibniz 公式，可以得到

$$\int_0^2 \frac{(x-1)^2+1}{(x-1)^2+x^2(x-2)^2}\mathrm{d}x = \arctan\frac{x(x-2)}{x-1}\Big|_0^2 = 0."$$

但这个结果是不可能的，因为被积函数在$[0,2]$连续且恒大于零，所以必有

$$\int_0^2 \frac{(x-1)^2+1}{(x-1)^2+x^2(x-2)^2}\mathrm{d}x > 0,$$

Newton－Leibniz 公式居然“失灵”了！

问题出在什么地方呢？请注意微积分基本定理的条件“$F(x)$是 $f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数，则……”，而在这个例子中，由于 $\arctan\frac{x(x-2)}{x-1}+C$ 在$[0,2]$中连最起码应具备的连续性质都没有（显然有不连续点 $x=1$），因此它决不可能是$\frac{(x-1)^2+1}{(x-1)^2+x^2(x-2)^2}$在$[0,2]$中的原函数.

为了正确求解这道题，我们先来作一下分析.

首先，在任何一个不含 $x=1$ 的区间$[a,b]$上，$\arctan\frac{x(x-2)}{x-1}+C$ 确实是$f(x)=\frac{(x-1)^2+1}{(x-1)^2+x^2(x-2)^2}$的原函数，而 $x=1$ 是它的第一类不连续点，所以有可能通过对它的适当补充定义，构造 $f(x)$的一个原函数出来.

其次，可以观察到，被积函数$\frac{(x-1)^2+1}{(x-1)^2+x^2(x-2)^2}$关于 $x=1$ 是对称的. 这就提示我们，有可能通过适当平移将积分放到对称区间进行，再利用定理 7.3.3 来得到结果.

解 对 $I=\int_0^2 \frac{(x-1)^2+1}{(x-1)^2+x^2(x-2)^2}\mathrm{d}x$ 用 $x=t+1$ 换元，将变换后的积分变量仍记作 x，则

$$I=\int_{-1}^1 \frac{x^2+1}{x^2+(x+1)^2(x-1)^2}\mathrm{d}x.$$

因为$\frac{x^2+1}{x^2+(x+1)^2(x-1)^2}$是偶函数，由定理 7.3.3，又有

$$I=2\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^2+(x+1)^2(x-1)^2}\mathrm{d}x.$$

定义函数

$$F(x)=\begin{cases}\arctan\dfrac{(x+1)(x-1)}{x}, & x\in(0,1],\\ -\dfrac{\pi}{2}, & x=0,\end{cases}$$

容易验证，$F(x)$是$\dfrac{x^2+1}{x^2+(x+1)^2(x-1)^2}$在$[0,1]$中的一个原函数. 由 Newton - Leibniz 公式，

$$I = 2\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^2+(x+1)^2(x-1)^2}\mathrm{d}x = 2\cdot F(x)\Big|_0^1 = \pi.$$

这个例子告诉我们，用 Newton - Leibniz 公式时必须把条件弄清楚，否则就有可能差之毫厘，失之千里.

例 7.3.12　证明：函数$\{1,\sin x,\cos x,\sin 2x,\cos 2x,\cdots,\sin nx,\cos nx,\cdots\}$是任意一个长度为 2π 的区间上的正交函数列.

证　首先，将 1 记为 $\cos 0x$，则对任何 $m=1,2,\cdots$和 $n=0,1,2,\cdots$，有

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x]\mathrm{d}x\\
&=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\cos(m+n)x}{m+n}+\dfrac{\cos(m-n)x}{m-n}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi}, & m=n,\\ -\dfrac{\cos 2mx}{4m}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}, & m\neq n,\end{cases}\\
&=0.
\end{aligned}$$

其次，对任何 $m=1,2,\cdots$和 $n=1,2,\cdots$，

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(m-n)x-\cos(m+n)x]\mathrm{d}x\\
&=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\sin(m-n)x}{m-n}-\dfrac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi}, & m\neq n,\\ \dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{\sin 2mx}{2m}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}, & m=n,\end{cases}\\
&=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \pi, & m=n,\end{cases}
\end{aligned}$$

同理可证，对任何 $m=0,1,2,\cdots$和 $n=0,1,2,\cdots$，有

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \pi, & m=n\neq 0,\\ 2\pi, & m=n=0,\end{cases}$$

由定义 7.3.1，这组函数确是$[-\pi,\pi]$上的正交函数列. 又由于 2π 是这些函数的公共周期，由定理 7.3.4，即知这组函数是任意一个长度为 2π 的区间

上的正交函数列.

证毕

习　题

1. 设 $f(x)$ 连续,求下列函数 $F(x)$ 的导数:

(1) $F(x)=\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$;　　(2) $F(x)=\int_a^{\ln x} f(t)\mathrm{d}t$;

(3) $F(x)=\int_a^{\int_0^x \sin^2 t\mathrm{d}t}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

2. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos t^2\mathrm{d}t}{x}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\int_{\cos x}^1 \mathrm{e}^{-w^2}\mathrm{d}w}$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x (\arctan v)^2\mathrm{d}v}{\sqrt{1+x^2}}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^{u^2}\mathrm{d}u\right)^2}{\int_0^x \mathrm{e}^{2u^2}\mathrm{d}u}$.

3. 设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的连续函数且恒有 $f(x)>0$,证明:

$$g(x)=\frac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$$

是定义在 $[0,+\infty)$ 上的单调增加函数.

4. 利用中值定理求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\quad(p\in\mathbf{N}^+)$.

5. 求下列定积分:

(1) $\int_0^1\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_1^2\frac{(x-1)(x^2-x+1)}{2x^2}\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^2(2^x+3^x)^2\mathrm{d}x$;　　(4) $\int_0^{\frac{1}{2}}x^2(1-4x^2)^{10}\mathrm{d}x$;

(5) $\int_0^1 x^2(2-x^2)\mathrm{d}x$;　　(6) $\int_0^1\frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x$;

(7) $\int_{-1}^1\frac{(x+1)\mathrm{d}x}{(x^2+2x+5)^2}$;　　(8) $\int_0^{\sqrt{\ln 2}}x^3\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$;

(9) $\int_0^1 x^2\arctan x\mathrm{d}x$;　　(10) $\int_0^1\mathrm{e}^{2\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$;

(11) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$; (12) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$;

(13) $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$; (14) $\int_0^1 x\sqrt{\frac{x}{2-x}}dx$;

(15) $\int_0^1 \arcsin x dx$; (16) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\tan^2 x dx$;

(17) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin^2 x dx$; (18) $\int_1^e \sin(\ln x)dx$;

(19) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}dx$; (20) $\int_1^{e+1} x^2\ln(x-1)dx$.

6. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}\quad(p>0)$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$.

7. 求下列定积分:

(1) $\int_0^{\pi}\cos^n x dx$; (2) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^n x dx$;

(3) $\int_0^a (a^2-x^2)^n dx$; (4) $\int_1^e x\ln^n x dx$.

8. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续,证明:

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$;

(2) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$.

9. 利用上题结果计算:

(1) $\int_0^{\pi} x\sin^4 x dx$; (2) $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$;

(3) $\int_0^{\pi}\frac{x}{1+\sin^2 x}dx$.

10. 求下列定积分:

(1) $\int_0^6 x^2[x]dx$; (2) $\int_0^2 \operatorname{sgn}(x-x^3)dx$;

(3) $\int_0^1 x\,|\,x-a\,|\,dx$; (4) $\int_0^5 [e^x]dx$.

11. 证明定理 7.3.3 和定理 7.3.4.

12. 证明:奇函数的一切原函数都是偶函数,偶函数的原函数中有一个是奇函数.

13. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积且关于 $x=T$ 对称,这里 $a<T<b$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{2T-b} f(x)\mathrm{d}x + 2\int_T^b f(x)\mathrm{d}x.$$

并给出它的几何解释.

14. 证明:

$$\int_0^a x^3 f(x^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} x f(x)\mathrm{d}x.$$

15. 设 $f(x)$ 连续,证明

$$\int_0^x f(u)(x-u)\mathrm{d}u = \int_0^x \left\{\int_0^u f(x)\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}u.$$

§4 定积分在几何中的应用

现在我们可以来进行一些几何的线、面、体的简单计算了.一元定积分大致可解决求平面图形的面积、求曲线的弧长、求某些特殊的几何体的体积、求旋转体的侧面积这四种类型的问题.至于一般几何体的体积和表面积,则要等学完多重积分后才能计算.

求平面图形的面积

求平面图形的面积(下面简称求面积)可以说是定积分最基本的用处——引进定积分的概念就是从求面积开始的,上一节中许多例子都是(或可以看作)求面积问题.

我们知道,当 $f(x)>0$ 时,由 $y=f(x)$、直线 $x=a$、$x=b$ 和 $y=0$ 即 x 轴围成的面积正是 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. 但当 $f(x)<0$ 时,$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (<0) 却是相应的那块面积的负值(图 7.4.1),所以,真正的面积应为

$$S = \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

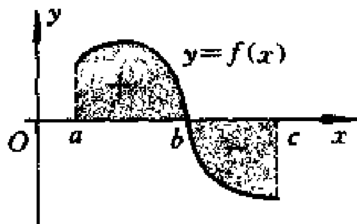


图 7.4.1

实际计算时要注意先把 $f(x)$ 变号的"关节点"找出来,再分段求积分.

推而广之,夹在 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 之间,左右由直线 $x=a$、$x=b$ 界定的那部分面积(图 7.4.2)是

$$S=\int_a^b\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x.$$

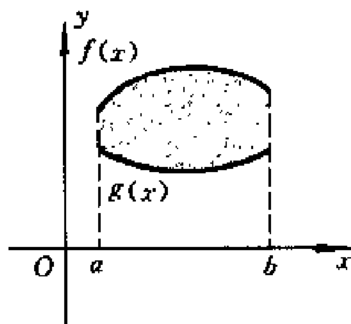


图 7.4.2

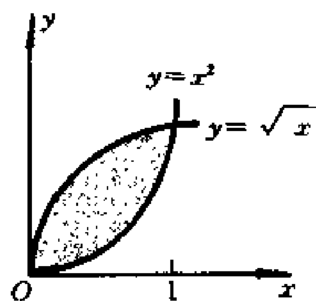


图 7.4.3

例 7.4.1　计算由曲线 $y=x^2$ 和 $x=y^2$ 围成的面积.

解　求出曲线 $y=x^2$ 和 $x=y^2$ 的交点坐标为 $(0,0)$ 和 $(1,1)$,而在 $x\in[0,1]$ 中,$\sqrt{x}\geqslant x^2$(图 7.4.3),因此,所求的面积为

$$\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\mathrm{d}x=\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}.$$

上述原则可以推广到由几条不同的曲线(或直线)围成的图形的情况.

例 7.4.2　设 (x,y) 是等轴双曲线 $x^2-y^2=1$ 上的任意一点,求分别由点 (x,y) 和 $(x,-y)$ 与原点连成的线段与双曲线围成的曲边三角形的面积 t(图 7.4.4).

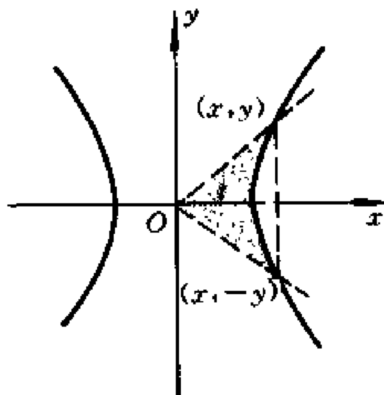


图 7.4.4

不妨设 $x>0$. 利用对称性,可求出第一象限的那一块面积再乘以 2.

这块面积是由三段曲线(或直线)围成的,可以以 $x=1$ 为界分成两部分,分别积分后再相加;也可以先求出双曲线、x 轴及过 (x,y) 并与 y 轴平行的直线围成的面积,再用以原点、$(x,0)$ 和 (x,y) 为顶点的大三角形的面积 $\frac{xy}{2}$ 减去它.

解

$$\begin{aligned} t &= 2\left(\frac{xy}{2} - \int_1^x \sqrt{u^2-1}\,\mathrm{d}u\right) \\ &= xy - \left(x\sqrt{x^2-1} - \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right) \\ &= xy - xy + \ln(x+y) \\ &= \ln(x+y). \end{aligned}$$

由此可以得知 $x+y=\mathrm{e}^t$,由于 $x^2-y^2=1$,两式相除便有 $x-y=\mathrm{e}^{-t}$,解出

$$\begin{cases} x = \dfrac{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}{2} = \operatorname{ch} t, \\ y = \dfrac{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}}{2} = \operatorname{sh} t. \end{cases}$$

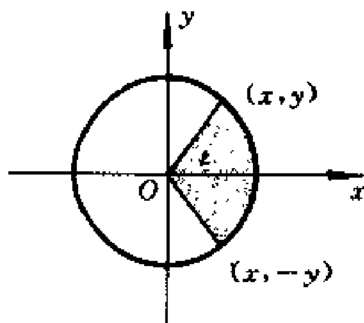


图 7.4.5

三角函数又统称为圆函数. 这是因为,若在单位圆上分别取点 (x,y) 和 $(x,-y)$,类似地与原点连接作出扇形(图 7.4.5),设扇形的面积为 t,则有熟知的结论

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$$

两相比较,就不难明白,为什么要把 $y=\operatorname{sh} x$、$y=\operatorname{ch} x$ 统称为双曲函数,并分别冠以双曲正弦和双曲余弦的名称.

若 $y=f(x)$ 是用参数形式

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t\in[T_1,T_2]$$

表达的，$x=x(t)$在 $t\in[T_1,T_2]$中可微且反函数在 $x\in[a,b]$存在，那么读者不难用换元法证明，所求的面积可表示成

$$S=\int_{x^{-1}(a)}^{x^{-1}(b)}y(t)x'(t)\mathrm{d}t.$$

例 7.4.3 求椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的面积.

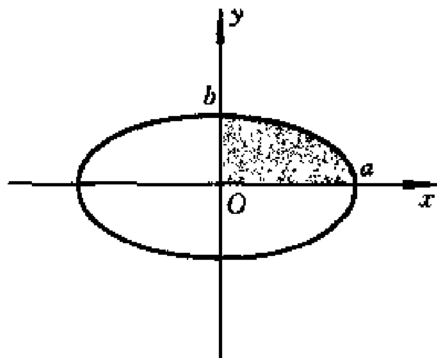


图 7.4.6

解 利用对称性，只求第一象限的那一块面积(图 7.4.6).将椭圆写成参数方程形式

$$\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t,\end{cases}$$

则当 x 从 0 变到 a 时，t 从$\frac{\pi}{2}$变到 0，所以

$$\frac{S}{4}=ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin t(\cos t)'\mathrm{d}t=ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\ \mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}ab,$$

即

$$S=\pi ab.$$

例 7.4.4 求旋轮线(摆线)$\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(t-\cos t),\end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$与 x 轴围成的面积(图 7.4.7).

解

$$\begin{aligned}S&=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\mathrm{d}t\\&=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2})\mathrm{d}t\\&=3\pi a^2.\end{aligned}$$

下面来导出极坐标下的求面积公式.

设曲线的极坐标方程 $r=r(\theta)$是 $\theta\in[\alpha,\beta]$中的连续函数，我们用与

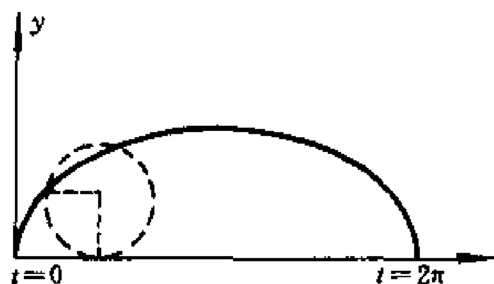


图 7.4.7

§7.1 类似的讨论来求由两条极径 $\theta=\alpha$、$\theta=\beta$ 与 $r=r(\theta)$ 围成的图形的面积 S.

在 $[\alpha,\beta]$ 中取一系列的分点 θ_i,满足

$$\alpha=\theta_0<\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_n=\beta,$$

记 $\Delta\theta_i=\theta_i-\theta_{i-1}$,在每个 $[\theta_{i-1},\theta_i]$ 上任取一点 ξ_i,用半径为 $r(\xi_i)$、圆心角为 $\Delta\theta_i$ 的小扇形的面积 $\frac{1}{2}r^2(\xi_i)\Delta\theta_i$ 近似代替相应的小曲边扇形的面积(图 7.4.8),那么

$$S\approx\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}r^2(\xi_i)\Delta\theta_i.$$

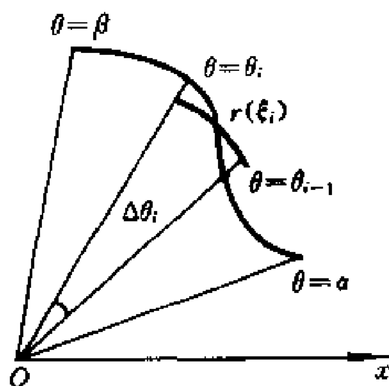


图 7.4.8

因为 $r=r(\theta)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 中连续,所以 $\frac{1}{2}r^2(\theta)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积.令小扇形的圆心角的最大值 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\Delta\theta_i)\to0$,即有

$$S=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}r^2(\xi_i)\Delta\theta_i=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta,$$

这就是极坐标下的求面积公式.

例 7.4.5 求双曲螺线 $r\theta=a$ 当 θ 从 $\frac{\pi}{4}$ 变到 $2\pi+\frac{\pi}{4}$ 时，极径 r 扫过的面积（图 7.4.9）.

解 直接套用极坐标下的求面积公式，

$$S=\frac{a^2}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}}\frac{1}{\theta^2}\mathrm{d}\theta=\frac{a^2}{2}\left(-\frac{1}{\theta}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}}=\frac{16a^2}{9\pi}.$$

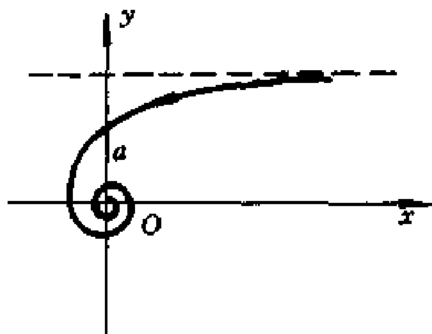


图 7.4.9

例 7.4.6 求三叶玫瑰线 $r=a\sin 3\theta,\theta\in[0,\pi]$（图 7.4.10）围成的面积.

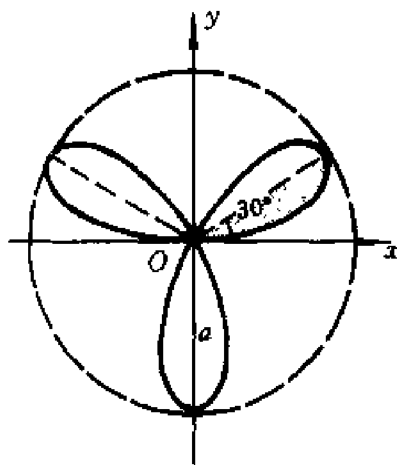


图 7.4.10

解 由对称性，我们只求它的半叶的面积，这时 θ 的变化范围是 $[0,\frac{\pi}{6}]$.

$$\begin{aligned}S&=6\cdot\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2 3\theta\mathrm{d}\theta\\&=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi a^2}{4}.\end{aligned}$$

求曲线的弧长

首先来定义什么叫一段曲线的弧长.

设平面曲线的一段可用参数方程

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [T_1, T_2]$$

表示在$[T_1, T_2]$中任意取一系列的分点 t_i 满足

$$T_1 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = T_2,$$

便得到了这段曲线上顺次的 $n+1$ 个点 $P_0, P_1, \cdots, P_n$(图 7.4.11),$P_i = (x(t_i), y(t_i))$,用$\overline{P_{i-1}P_i}$表示连接点P_{i-1}和 P_i 的直线段的长度,那么相应的折线的长度可以表示为$\sum\limits_{i=1}^{n}\overline{P_{i-1}P_i}$. 若当分点无限增多,即 $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\Delta t_i)\to 0$ 时,$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\overline{P_{i-1}P_i}$存在,则称这段曲线是可求长的,并将此极限值

$$l = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\overline{P_{i-1}P_i}$$

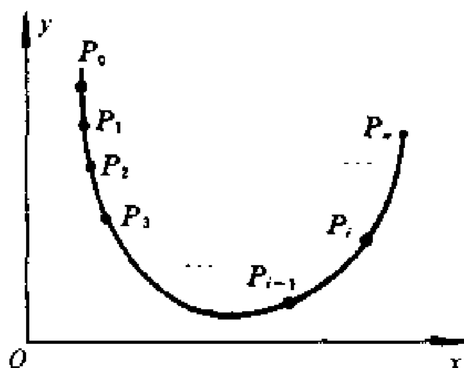


图 7.4.11

称为该段曲线的弧长.

我国古代数学家刘徽、祖冲之等人用“割圆术”求圆周率 π,用的也正是这样的思想方法.

按定义得到的和式“$\sum\limits_{i=1}^{n}\overline{P_{i-1}P_i}$”并非是 Riemann 和“$\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta t_i$”的形式. 为了能够用定积分来求弧长,首先必须将它化成 Riemann 和形式.

显然,

$$\overline{P_{i-1}P_i} = \sqrt{[x(t_i) - x(t_{i-1})]^2 + [y(t_i) - y(t_{i-1})]^2},$$

若 $x(t)$和 $y(t)$在$[T_1, T_2]$中连续,在(T_1, T_2)中可导,则由 Lagrange 中值定理,存在 η_i 和σ_i 属于(t_{i-1}, t_i),满足

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\eta_i)\Delta t_i, \quad y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(\sigma_i)\Delta t_i,$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{P_{i-1}P_i}=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[x'(\eta_i)]^2+[y'(\sigma_i)]^2}\cdot\Delta t_i.$$

由于 η_i 和 σ_i 一般不会相同,上式还不是 Riemann 和

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\xi_i)]^2}\cdot\Delta t_i\quad(\xi_i\in[t_{i-1},t_i])$$

的形式,但两者已相当接近了. 这提示我们,很有可能弧长 l 正是这一Riemann 和的极限值.

定理 7.4.1(弧长公式)　*若 $x'(t)$ 和 $y'(t)$ 在 $[T_1,T_2]$ 中连续,则由参数方程*

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}\quad t\in[T_1,T_2]$$

决定的曲线段是可求长的,其弧长为

$$l=\int_{T_1}^{T_2}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t.$$

证　利用上面的记号,则对任意的分法,有

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{i=1}^{n}\overline{P_{i-1}P_i}-\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\xi_i)]^2}\Delta t_i\right|\\
=&\left|\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[x'(\eta_i)]^2+[y'(\sigma_i)]^2}\Delta t_i-\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\xi_i)]^2}\Delta t_i\right|\\
\leqslant&\sum_{i=1}^{n}\left|\sqrt{[x'(\eta_i)]^2+[y'(\sigma_i)]^2}-\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\xi_i)]^2}\right|\Delta t_i.\end{aligned}$$

由三角不等式,即有

$$\begin{aligned}\left|\sqrt{x_1^2+x_2^2}-\sqrt{y_1^2+y_2^2}\right|&\leqslant\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}\\
&\leqslant|x_1-y_1|+|x_2-y_2|,\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\text{上式}&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left|x'(\eta_i)-x'(\xi_i)\right|\Delta t_i+\sum_{i=1}^{n}\left|y'(\sigma_i)-y'(\xi_i)\right|\Delta t_i\\
&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\bar{\omega}_i\Delta t_i+\sum_{i=1}^{n}\tilde{\omega}_i\Delta t_i,\end{aligned}$$

$\bar{\omega}_i$ 和 $\tilde{\omega}_i$ 分别是 $x'(t)$ 和 $y'(t)$ 在 $[t_{i-1},t_i]$ 中的振幅.

因为 $x'(t)$ 和 $y'(t)$ 在 $[T_1,T_2]$ 中可积,由定积分存在的充分必要条件,当 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\Delta t_i)\to0$,有

$$\sum_{i=1}^{n}\bar{\omega}_i\Delta t_i\to0,\qquad\sum_{i=1}^{n}\tilde{\omega}_i\Delta t_i\to0,$$

所以

$$l=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\overline{P_{i-1}P_i}=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\xi_i)]^2}\Delta t_i$$
$$=\int_{T_1}^{T_2}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t.$$

证毕

我们将

$$\mathrm{d}l=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t$$

称为**弧长的微分**,请读者自行考虑它的几何意义.

当曲线采用直角坐标系下的显式方程 $y=f(x),x\in[a,b]$和极坐标方程 $r=r(\theta),\theta\in[\alpha,\beta]$时,容易得到相应的弧长公式

$$l=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x$$

和

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\mathrm{d}\theta,$$

证明留给读者.

例 7.4.7 求半径为 a 的圆的周长.

解一 采用直角坐标系下的显式方程 $y=\sqrt{a^2-x^2}$,只求第一象限部分.

$$l=4\int_0^a\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x=4a\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$
$$=4a\cdot\arcsin\frac{x}{a}\Big|_0^a=2\pi a.$$

解二 采用直角坐标系下的参数方程

$$\begin{cases}x=a\cos t,\\y=a\sin t,\end{cases}$$

同样只求第一象限部分,

$$l=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2t+\sin^2t}\ \mathrm{d}t=2\pi a.$$

解三 采用极坐标方程 $r(\theta)=a,\theta\in[0,2\pi]$,这时 $r'(\theta)=0$,因此

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\mathrm{d}\theta=a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=2\pi a.$$

可见采用不同形式的方程时,求积分的难易程度会有所差别.

例 7.4.8 求旋轮线一拱的弧长(见图 7.4.7).

解 $l=a\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2t}\mathrm{d}t=\sqrt{2}a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}\mathrm{d}t$

$$= 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt = 8a.$$

用定理 7.4.1 同样的方法,可将定理结论推广到求空间曲线的弧长中去.比如,若 $x'(t)$、$y'(t)$、$z'(t)$在 $t\in[T_1,T_2]$中连续,则由参数方程

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t \in [T_1, T_2] \\ z = z(t), \end{cases}$$

决定的曲线段的弧长为

$$l = \int_{T_1}^{T_2}\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}dt.$$

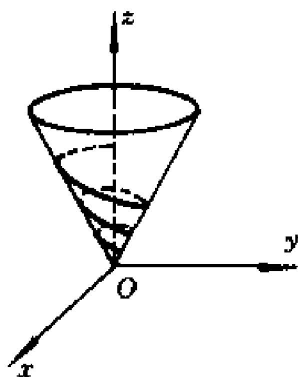


图 7.4.12

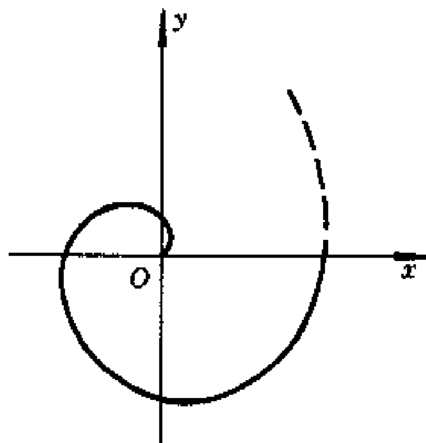


图 7.4.13

例 7.4.9　求圆锥螺线

$$\begin{cases} x = at\cos t, \\ y = -at\sin t, \\ z = bt, \end{cases}$$

(图 7.4.12)第一圈的长度.

解 $l = \int_0^{2\pi}\sqrt{a^2[\cos t - t\sin t]^2 + a^2[-\sin t - t\cos t]^2 + b^2}dt$

$$= \int_0^{2\pi}\sqrt{a^2t^2 + a^2 + b^2}dt \qquad (记\frac{b^2}{a^2} + 1 = s^2)$$

$$= \frac{a}{2}\left(t\sqrt{t^2 + s^2} + s^2\ln\left|t + \sqrt{t^2 + s^2}\right|\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= a\left(\pi\sqrt{4\pi^2 + s^2} + \frac{s^2}{2}\ln\frac{2\pi + \sqrt{4\pi^2 + s^2}}{s}\right).$$

当 $b=0$ 时,圆锥螺线退化为平面上的阿基米德螺线(图 7.4.13),此时 $s^2=1$,因此

$$l = \frac{a}{2}[2\pi\sqrt{4\pi^2+1} + \ln(2\pi+\sqrt{4\pi^2+1})],$$

这正是阿基米德螺线 $r = a\theta$ 第一圈的长度(见习题3的(7)).

求某些特殊形状的几何体的体积

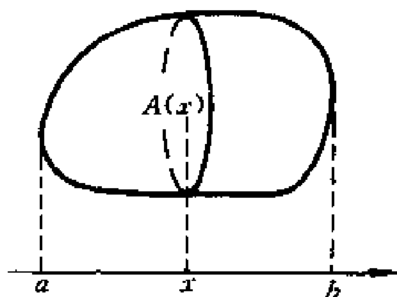


图 7.4.14

设三维空间中的一个几何体夹在平面 $x=a$ 和 $x=b$ 之间,$\forall x\in[a,b]$,过 x 且与 x 轴垂直的平面截得的该几何体的截面积 $A(x)$ 都是已知的,而 $A(x)$ 又是 $[a,b]$ 上的连续函数,就可以用一元定积分算出它的体积(图 7.4.14).

在 $[a,b]$ 中取一系列的分点 x_i,满足

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

记小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 的长度为

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1},$$

在每个小区间上取一点 ξ_i,用底面积为 $A(\xi_i)$、高为 Δx_i 的柱体体积近似代替夹在平面 $x=x_{i-1}$ 和 $x=x_i$ 之间的那块小的体积,那么这些小体积之和

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} A(\xi_i)\Delta x_i$$

就是整个几何体的体积的近似. 由于 $A(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,当 $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\Delta x_i)\to 0$ 时,即知

$$V = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} A(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b A(x)\mathrm{d}x$$

就是所要求的几何体的体积.

据《九章算术》记载,我国南北朝时的数学家祖暅(祖冲之之子)在求出球的体积的同时,得到了一个重要的结论(后人称之为"祖暅原理"):"夫叠棊成立积,缘幂势既同,则积不容异."用现在的话来讲,一个几何体("立积")是由一系列很薄的小片("棊")叠成的;若两个几何体相应的小片的截面积("幂势")都相同,那它们的体积("积")必然相等. 这一结论与上述求体积公式的推导思想是相同的.

意大利数学家 Cavalieri 在 1635 年得到了同样的结论,但比祖暅迟了一千多年.

例 7.4.10 已知一个直圆柱体的底面半径为 a,平面 P_1 过其底面圆周上的一点,且与其底面所在的平面 P_2 成夹角 θ,求圆柱体被 P_1 与 P_2 所截得的那部分的体积.

解 先建立坐标系.将平面 P_2 取成 xy 平面,并使得圆柱体底面的圆心与原点重合,同时让 P_1 与圆柱体底面圆周的交点落在 y 轴上(图 7.4.15).

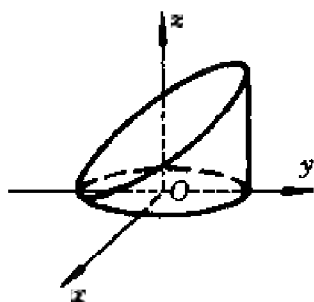


图 7.4.15

$\forall y\in[-a,a]$,过 y 且与 y 轴垂直的平面与该部分的截面是一个竖立的矩形,它的底为 $2\sqrt{a^2-y^2}$,高为 $(y+a)\tan\theta$,于是

$$A(y)=2\sqrt{a^2-y^2}(y+a)\tan\theta,$$

因此,所求的体积为

$$V=2\tan\theta\left(\int_{-a}^{a}y\sqrt{a^2-y^2}\mathrm{d}y+a\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-y^2}\mathrm{d}y\right).$$

容易看出,括号内的第一项是一个奇函数在对称区间上的积分,其值为 0.第二项中的积分恰为上半个圆的面积,即得到

$$V=\pi a^3\tan\theta.$$

若采用与 x 轴垂直的平面与该部分相截,截面是一个直角梯形,处理就会烦很多.由此可见,对几何体作截面的方式与计算是否简便关系很大,同此实际计算时要根据具体情况仔细分析,找到事半功倍的方案.

公式

$$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x$$

的一个很重要的用途是计算旋转体的体积.

对于由 $0\leqslant y\leqslant f(x)$,$a\leqslant x\leqslant b$ 界定的那块面积绕轴旋转一周(一般就简称曲线 $y=f(x)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 绕 x 轴旋转一周)所得的旋转体,若用过 x 且与

x 轴垂直的平面去截，得到截面显然是一个半径为 $f(x)$ 的圆(图 7.4.16). 因此

$$A(x) = \pi[f(x)]^2,$$

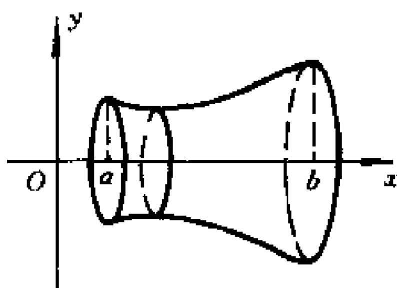


图 7.4.16

所以，旋转体的体积公式为

$$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2 \mathrm{d}x.$$

在参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ 下，对上式作变量代换，即得到相应的旋转体的体积公式

$$V = \pi\int_{T_1}^{T_2} y^2(t)x'(t)\mathrm{d}t,$$

请读者考虑 T_1 和 T_2 应如何定.

例 7.4.11 求半径为 a 的球的体积.

解 即求上半圆周 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 与 x 轴围成的那半个圆绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积，

$$V = \pi\int_{-a}^{a}(a^2 - x^2)\mathrm{d}x = \pi\left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

例 7.4.12 求旋轮线一拱(见图 7.4.7)绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积.

解 将旋轮线的参数方程代入求旋转体体积的公式

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_{T_1}^{T_2} y^2(t)x'(t)\mathrm{d}t \\ &= \pi a^3\int_0^{2\pi}(1 - \cos t)^3 \mathrm{d}t \\ &= 5\pi^2 a^3. \end{aligned}$$

极坐标下由 $0\leqslant r\leqslant r(\theta),\theta\in[\alpha,\beta]\subset[0,\pi]$所表示的区域绕极轴旋转一周所得的旋转体的体积为

$$V=\frac{2}{3}\pi\int_{\alpha}^{\beta}r^3(\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta,$$

请读者自行证明.

求旋转体的侧面积

设

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}\quad t\in[T_1,T_2]$$

是平面上一段可求长的曲线,利用讨论求曲线长度时的记号,在曲线上顺次任意取 $n+1$ 个点 $P_0,P_1,\cdots,P_n,P_i=(x(t_i),y(t_i))$,记 Δs_i 是连接P_{i-1}和 P_i 的直线段绕 x 轴旋转一周得到的圆台的侧面积,则由相应的面积公式,

$$\Delta s_i=\pi[y(t_{i-1})+y(t_i)]\cdot\overline{P_{i-1}P_i}.$$

若当 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\Delta t_i)\to 0$ 时,极限

$$S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta s_i=\pi\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[y(t_{i-1})+y(t_i)]\cdot\overline{P_{i-1}P_i}$$

存在,则称 S 为该段曲线绕轴旋转一周所得到的**旋转体的侧面积**.

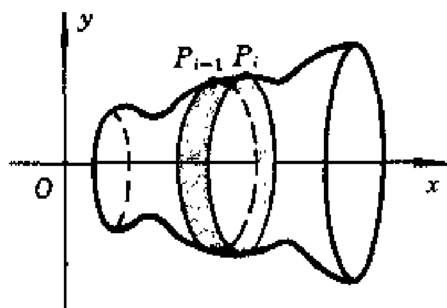


图 7.4.17

这也不是 Riemann 和的形式,但由求曲线长度时的同样讨论,可以得到

$$S=2\pi\int_{T_1}^{T_2}y(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t,$$

严格证明留给读者完成.

利用弧长的微分公式,也可以将上式写成

$$S=2\pi\int_{T_1}^{T_2}y(t)\mathrm{d}l,$$

请读者考虑它的几何意义,并由此入手导出直角坐标方程 $y=f(x)$和极坐标

方程 $r=r(\theta)$的相应公式.

例7.4.13 求半径为 a 的球的表面积.

解 此即为求半径为 a 的圆的上半部分 $y=\sqrt{a^2-x^2}$绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的侧面积.因此,

$$S=2\pi\int_{-a}^{a}f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x=2\pi a\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=4\pi a^2.$$

例 7.4.14 求旋轮线一拱(见图 7.4.7)绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的侧面积.

解 将旋轮线的参数方程代入求旋转体侧面积的公式

$$\begin{aligned}S&=2\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t\\&=2\sqrt{2}\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{1-\cos t}\,\mathrm{d}t\\&=16\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\mathrm{d}\left(\frac{t}{2}\right)=\frac{64}{3}\pi a^2.\end{aligned}$$

我们将本节得到的计算公式列成下面的简表,读者在套用这些公式的时候务必注意它们的使用范围和条件,尤其是采用参数方程时积分上下限的取法.

	直角坐标显式方程 $y=f(x),x\in[a,b]$	直角坐标参数方程 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$ t 在 T_1 和 T_2 之间	极坐标方程 $r=r(\theta),\theta\in[\alpha,\beta]$.
平面图形面积	$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$	$\int_{T_1}^{T_2}y(t)x'(t)\mathrm{d}t$	$\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\mathrm{d}\theta$
弧长的微分	$\mathrm{d}l=\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x$	$\mathrm{d}l=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t$	$\mathrm{d}l=\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$
曲线弧长	$\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x$	$\int_{T_1}^{T_2}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t$	$\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$
旋转体体积	$\pi\int_a^b[f(x)]^2\mathrm{d}x$	$\pi\int_{T_1}^{T_2}y^2(t)x'(t)\mathrm{d}t$	$\frac{2}{3}\pi\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta$
旋转体侧面积	$2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x$	$2\pi\int_{T_1}^{T_2}y\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t$	$2\pi\int_\alpha^\beta\sin\theta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$

习　题

1. 求下列曲线所围的图形面积：

(1) $y=\frac{1}{x}, y=x, x=2$;

(2) $y^2=4(x+1), y^2=4(1-x)$;

(3) $y=x,\ y=x+\sin^2 x, x=0, x=\pi$;

(4) $y=\mathrm{e}^x,\ y=\mathrm{e}^{-x},\ x=1$;

(5) $y=|\ln x|,\ y=0,\ x=0.1,\ x=10$;

(6)叶形线 $\begin{cases}x=2t-t^2,\\ y=2t^2-t^3,\end{cases}\quad 0\leqslant t\leqslant 2$;

(7)星形线 $\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t,\end{cases}\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$;

(8)圆的渐开线 $\begin{cases}x=a(\cos t+t\sin t),\\ y=a(\sin t-t\cos t),\end{cases}\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$;

(9)阿基米德螺线 $r=a\theta, \theta=0, \theta=2\pi$;

(10)对数螺线 $r=a\mathrm{e}^{\theta}, \theta=0, \theta=2\pi$;

(11)蚌线 $r=a\cos\theta+b(b\geqslant a>0)$;

(12) $r=3\cos\theta, r=1+\cos\theta$;

(13)双纽线 $r^2=2a^2\cos 2\theta$;

(14)Descartes 叶形线 $x^3+y^3=3axy$;

(15) $x^4+y^4=a^2(x^2+y^2)$;

(16)四叶玫瑰线 $r=a\cos 2\theta$.

2. 求由抛物线 $y^2=4ax$ 与过其焦点的弦所围的图形面积的最小值.

3. 求下列曲线的弧长：

(1) $y=x^{3/2},\quad 0\leqslant x\leqslant 4$;

(2) $x=\frac{y^2}{4}-\frac{\ln y}{2},\quad 1\leqslant y\leqslant \mathrm{e}$;

(3) $y=\ln\cos x,\quad 0\leqslant x\leqslant a<\frac{\pi}{2}$;

(4)星形线 $\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t,\end{cases}\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$;

(5)圆的渐开线 $\begin{cases}x=a(\cos t+t\sin t),\\ y=a(\sin t-t\cos t),\end{cases}\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$;

(6)心脏线 $r=a(1-\cos\theta)$,$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$;

(7)阿基米德螺线 $r=a\theta$,$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$;

(8)$r=a\sin^3\dfrac{\theta}{2}$,$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.

4. 在旋轮线的第一拱上,求分该拱的长度为 1:3 的点的坐标.

5. 求下列几何体的体积:

(1)正椭圆台:上底是长半轴为 a、短半轴为 b 的椭圆,下底是长半轴为 A、短半轴为 B 的椭圆($A>a$,$B>b$),高为 h;

(2)椭球体$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$;

(3)直圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 和 $x^2+z^2=a^2$ 所围的几何体;

(4)球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 和直圆柱面 $x^2+y^2=ax$ 所围的几何体.

6. 证明以下旋转体的体积公式:

(1)设 $f(x)\geqslant 0$ 是连续函数,由 $a\leqslant x\leqslant b$,$0\leqslant y\leqslant f(x)$所表示的区域绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积为

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x;$$

(2)在极坐标下,由 $0\leqslant\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta\leqslant\pi$,$0\leqslant r\leqslant r(\theta)$所表示的区域绕极轴旋转所成的旋转体的体积为

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta.$$

7. 求下列旋转体的体积:

(1)$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$,绕 x 轴;

(2)$y=\sin x$,$y=0$,$0\leqslant x\leqslant\pi$,

①绕 x 轴,　　②绕 y 轴;

(3)星形线$\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t,\end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant\pi$,绕 x 轴;

(4)旋轮线$\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t),\end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$,$y=0$,

①绕 y 轴,　②绕直线 $y=2a$,　③绕直线 $y=x$;

(5)$x^2+(y-b)^2=a^2(0<a\leqslant b)$,绕 x 轴;

(6)心脏线 $r=a(1-\cos\theta)$,绕极轴;

(7)对数螺线 $r=a\mathrm{e}^\theta$,$0\leqslant\theta\leqslant\pi$,绕极轴;

(8)$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$,绕 x 轴.

8. 将抛物线 $y=x(x-a)$ 在 $x\in[0,a]$ 和 $x\in[a,c]$ 的弧段分别绕 x 轴旋转后,所得到旋转体的体积相等,求 c 与 a 的关系.

9. 记 $V(\xi)$ 是曲线 $y=\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}$ 在 $x\in[0,\xi]$ 的弧段绕 x 轴旋转所得到的体积,求常数 a 使得满足

$$V(a)=\frac{1}{2}\lim_{\xi\to+\infty}V(\xi).$$

10. 将椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 绕 x 轴旋转得到一个旋转椭球体,再沿 x 轴方向用半径为 $r(r<b)$ 的钻头打一个穿心的圆孔,剩下的体积恰为原来椭球体体积的一半,求 r 的值.

11. 求下列旋转曲面的侧面积:

(1) $x^2=2py+a$, $0\leqslant x\leqslant a(a>1)$,

①绕 x 轴，　②绕 y 轴;

(2) $y=\sin x$, $0\leqslant x\leqslant\pi$,绕 x 轴;

(3) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$,绕 x 轴;

(4) 星形线 $\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t,\end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant\pi$,绕 x 轴;

(5) 心脏线 $r=a(1-\cos\theta)$,绕极轴;

(6) 双纽线 $r^2=2a^2\cos 2\theta$,

①绕极轴，　②绕射线 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，　③绕射线 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$.

12. 证明:由空间曲线

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t), & t\in[T_1,T_2]\\ z=z(t),\end{cases}$$

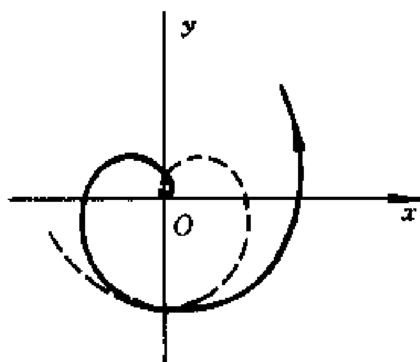
垂直投影到 Oxy 平面所形成的柱面的面积公式为

$$S=\int_{T_1}^{T_2}z(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t,$$

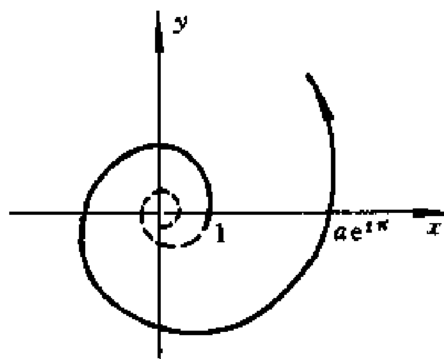
这里假设 $x'(t),y'(t),z'(t)$ 在 $t\in[T_1,T_2]$ 中连续.

附录 常用几何曲线图示

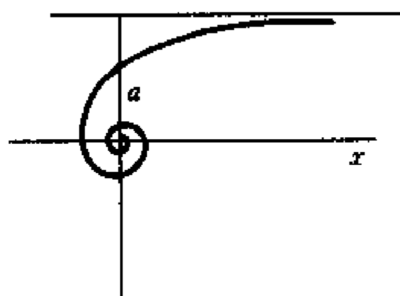
(1)阿基米德螺线 $r=a$；
(又称等速螺线)；



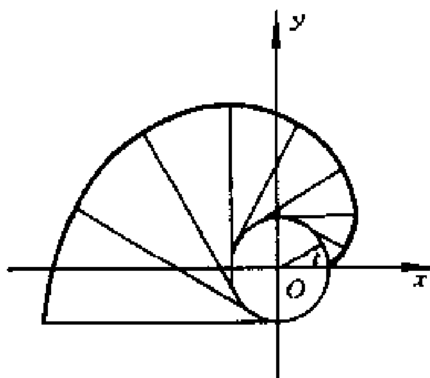
(2)对数螺线 $r=ae^{\theta}$；
(又称等角螺线)



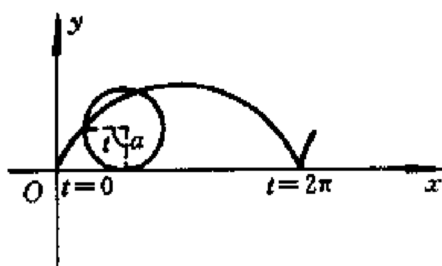
(3)双曲螺线 $r\theta=a$；



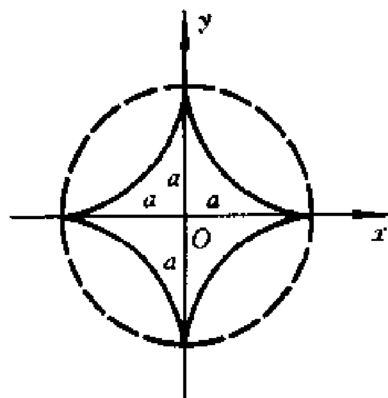
(4)圆的渐开线 $\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t), \\ y=a(\sin t-t\cos t); \end{cases}$



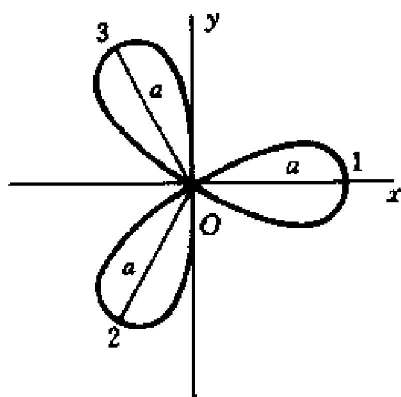
(5)摆线 $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$
(又称旋轮线)；



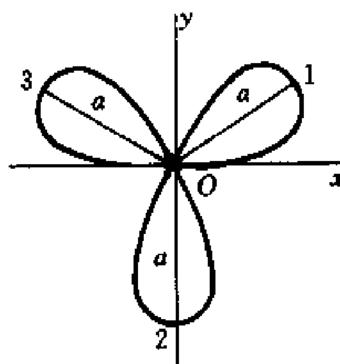
(6)星形线 $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$ (或 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$)；



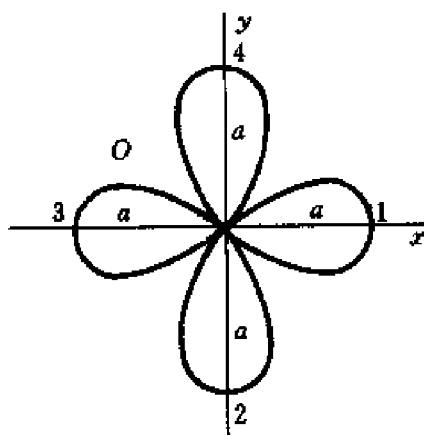
(7)三叶玫瑰线 $r=a\cos 3\theta$;



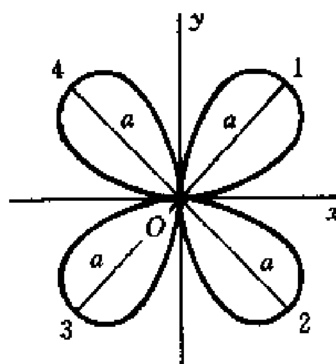
(8)三叶玫瑰线 $r=a\sin 3\theta$;



(9)四叶玫瑰线 $r=a\cos 2\theta$;

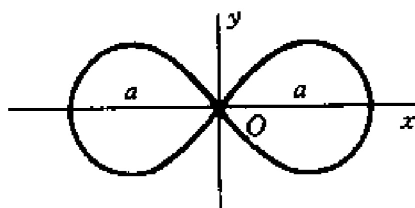


(10)四叶玫瑰线 $r=a\sin 2\theta$;



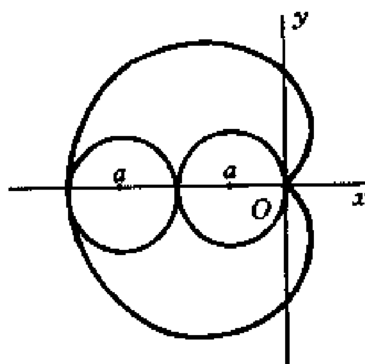
(11)双纽线 $r^2=2a^2\cos 2\theta$

(或$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$);

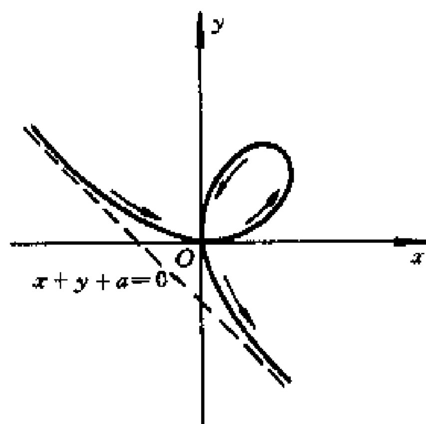


(12)心脏线 $r=a(1-\cos\theta)$

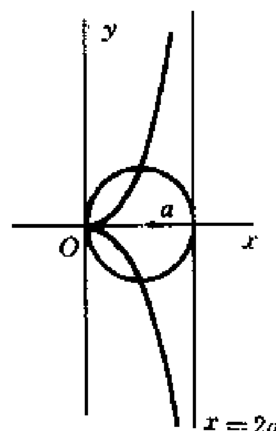
(或 $x^2+y^2+ax=a\sqrt{x^2+y^2}$);



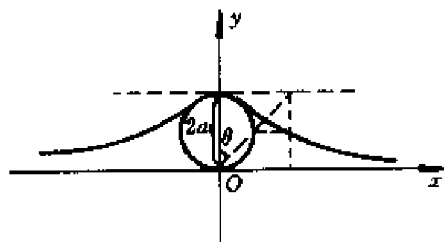
(13)Descartes 叶形线 $x^3+y^3=3axy$ $\left(\text{或}\begin{cases}x=\dfrac{3at}{1+t^2},\\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^2}(=tx)\end{cases}\right)$；



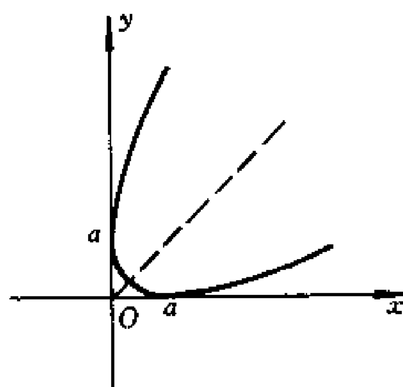
(14)蔓叶线 $y^2(2a-x)=x^3$；



(15)箕舌线 $y=\dfrac{8a^3}{x^2+4a^2}$ $\left(\text{或}\begin{cases}x=2a\tan\theta,\\ y=2a\cos^2\theta\end{cases}\right)$；

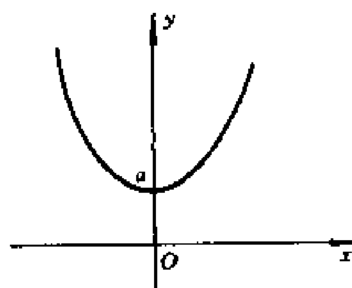


(16)斜抛物线 $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$ $\left(\text{或}\begin{cases}x=a\cos^4 t\\ y=a\sin^4 t\end{cases}\right)$；

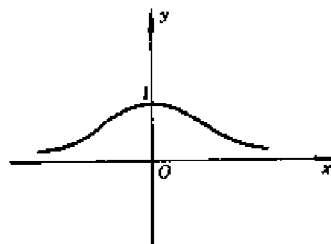


(17)悬链线 $y=a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$

$$=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}});$$



(18)概率曲线 $y=e^{-x^2}$.



§5 微积分实际应用举例

微元法

我们发现,在解决诸如本章§1中的求曲边梯形的面积这一类问题时,要先对区间$[a,b]$作分割

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

若将任意分点x_{i-1}和x_i记为x和$x+\Delta x$,将Δx乘上小区间$[x,x+\Delta x]$中的某一点的函数值$f(\xi_i)$,就得到了一小块面积$\Delta S \approx f(\xi_i)\Delta x$.当$\Delta x \to 0$时,这种分割就是对自变量作微分,$\Delta x$就变成了$\mathrm{d}x$,而$\xi_i \to x$,因此,上述近似的乘积就变为微分形式下的严格的等式$\mathrm{d}S = f(x)\mathrm{d}x$.

最后,我们将所有的$f(\xi_i)\Delta x$相加再取极限,得到

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

这可以看成直接将微分形式$f(x)\mathrm{d}x$在$[a,b]$求定积分所得到的结果.

因此,在解决实际问题时,可以简捷地按照

$$\xrightarrow[\text{分割}]{\text{自变量}} \Delta x \xrightarrow[\text{规律}]{\text{科学}} \Delta S \approx f(x)\Delta x \xrightarrow[\text{微分}]{\text{转为}} \mathrm{d}S = f(x)\mathrm{d}x \xrightarrow[\text{积分}]{\text{直接}} S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

来直接导出问题的数学形式并求解.

了解了方法的实质以后,上述过程还可以进一步简化:即一开始就将小区间形式地取为$[x,x+\mathrm{d}x]$,进而由$\mathrm{d}x$(称为**微元**)直接得到微分形式$\mathrm{d}S = f(x)\mathrm{d}x$,再在$[a,b]$上积分,即

$$\mathrm{d}x \longrightarrow \mathrm{d}S = f(x)\mathrm{d}x \longrightarrow S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

在这一过程中,微元$\mathrm{d}x$的作用实际上具有两重性.首先,$\mathrm{d}x$被当作一个相对静止的有限量,就可以根据所考虑的具体问题建立关于$\mathrm{d}S$的关系式.然后再将$\mathrm{d}x$看成无穷小量,这时关系式

$$\mathrm{d}S = f(x)\mathrm{d}x$$

精确成立,便可顺理成章地对其积分了.

这种处理问题和解决问题的方法称为**微元法**.微元法略去了$\Delta x \to 0$的极限过程以及在运算过程中可能出现的高阶无穷小量,使用起来非常方便,而且有上述严格的数学基础,在解决实际问题中应用得极为广泛.如§4中计算弧长、面积、体积的公式也可以直接用微元法来导出,下面我们举一些其它类型的例子.

由静态分布求总量

我们首先考虑静态分布问题.设一根长度为l的直线段上分布着某种物

理量(如质量、力、热量、电荷量等等),将其平放在 x 轴的正半轴上,使其左端与原点重合.若它在 x 处的密度(称为线密度)可由某个连续的**分布函数**$\rho(x)$表示($x\in[0,l]$).由微元法,它在$[x,x+\mathrm{d}x]$上的量 $\mathrm{d}Q$ 为

$$\mathrm{d}Q=\rho(x)\mathrm{d}x.$$

两边在$[0,l]$上积分,就得到由分布函数求总量的公式:

$$Q=\int_0^l\rho(x)\mathrm{d}x.$$

例 7.5.1 如图 7.5.1 的一根金属棒,其密度分布满足 $\rho(x)=2x^2+3x+6(\mathrm{kg/m})$,求这根金属棒的质量 M.



图 7.5.1

解

$$M=\int_0^6(2x^2+3x+6)\mathrm{d}x=\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+6x\right)\Big|_0^6=234(\mathrm{kg}).$$

这个问题可以作以下方面的推广:

(1)假定物理量分布在一个平面区域上,x 的变化范围在$[a,b]$之间.若任何垂直于 x 轴的直线 $x=c(a\leqslant c\leqslant b)$与该平面区域之交的线段上的物理量可以用 $f(c)$表示,那么由类似的讨论,可以得到这个区域上的总物理量为

$$Q=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

例 7.5.2 求圆心在水下 10 m,半径为 1 m 的竖直放置的圆形铁片(图 7.5.2)所受到的水压力.

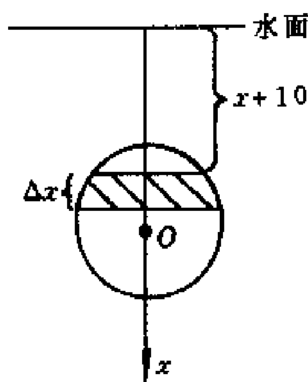


图 7.5.2

解 由物理定律,浸在液体中的物体在深度为 h 的地方所受到的压强为

$$p = h \cdot \rho g,$$

这里,ρ 是液体的密度,g 是重力加速度.

以铁片的圆心为原点、重垂线方向为 x 轴的正向建立坐标系,于是铁片在 x 处($-1 \leqslant x \leqslant 1$)受到的压强为$(10+x)g$,截取圆铁片上与水面平行、宽度为 $\mathrm{d}x$ 的一长条为微元,则微元的面积为

$$\mathrm{d}S = 2\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x,$$

所以微元上所受到的压力为,

$$\mathrm{d}F = 2g\sqrt{1-x^2}(10+x)\mathrm{d}x,$$

于是铁片所受到的水压力为

$$F = 2g\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}(10+x)\mathrm{d}x = 196\pi \quad (\mathrm{N})$$

这个结论还可以推广到立体区域去,请读者自行思考.(事实上,§4 中第三部分中,求三维空间中夹在平面 $x=a$ 和 $x=b$ 之间,过 x 且与 x 轴垂直的平面截得的该几何体的截面积为 $A(x)$ 的几何体的体积公式

$$V = \int_a^b A(x)\mathrm{d}x,$$

就可以看成是应用本方法的一个特例,其分布的物理量是面积.)

(2)假定物理量是分布在一条平面曲线

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [T_1, T_2],$$

上,分布函数为 $f(x)$,那么在 $x(t),y(t)$ 处截取一段长度为 $\mathrm{d}l$ 的弧,这段弧上的量 $\mathrm{d}Q$ 为

$$\mathrm{d}Q = f(t)\mathrm{d}l.$$

利用弧长的微分公式,

$$\mathrm{d}Q = f(t)\mathrm{d}l = f(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t,$$

在$[T_1, T_2]$上积分,就得到

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} f(t)\mathrm{d}l = \int_{T_1}^{T_2} f(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t.$$

这个结论可以推广到空间曲线的情况,今后我们将给出严格的证明.

例 7.5.3　若上半个金属环 $x^2+y^2=R^2(y \geqslant 0)$上任何一点处的电荷的线密度等于该点到 y 轴的距离的平方,求环上的总电量.

解　将金属环的方程写成参数形式

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases} \quad t \in [0, \pi],$$

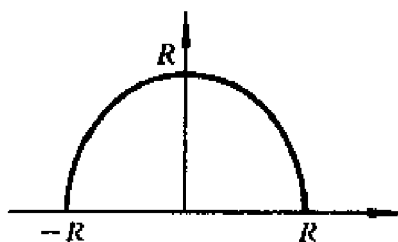


图 7.5.3

于是 $\mathrm{d}l=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t=R\mathrm{d}t$；分布函数 $f(t)=[x(t)]^2=R^2\cos^2 t$，因此

$$\mathrm{d}Q=f(t)\mathrm{d}l=R^3\cos^2 t\,\mathrm{d}t,$$

所以环上的总电量为

$$Q=R^3\int_0^{\pi}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{R^3\pi}{2}.$$

§4 中第四部分求旋转体的侧面积也是本方法的一个特殊情况，请读者考虑其分布函数的物理意义是什么.

(3)由静态分布求总量这种类型的问题远非只局限于物理学的范畴，无论是自然科学还是社会科学中，但凡给出的是自变量的某个范围的分布“密度”(比如，人口问题中的某时间段中的出生密度、交通问题中的车流密度等等)而需要求总量，都可以用上述的思路求解.

(4)在需要求平均密度的场合，只要先用上面的方法求出总量，再去除以长度、面积、体积、时间等物理量就可以了.

求动态效应

除了上述这些静态的物理量之外，还有一类物理量是由运动而产生的，是一个物理量持续作用的效果，比如，“位移”是速度作用了一段时间的结果；“功”是力作用了一段距离的结果，等等.

在§1 中已经知道，以速度 $v(t)$ 做变速运动的物体在 $[T_1,T_2]$ 走过的路程为

$$S=\int_{T_1}^{T_2}v(t)\mathrm{d}t,$$

这可以用微元法来理解：在每个小区间 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 上速度可看作就是 $v(t)$，因此走过的一小段路程为

$$\mathrm{d}S=v(t)\mathrm{d}t,$$

两边求积分，就得到了前面的结果.

这样的思路可以运用到所有这类问题中去.

例 7.5.4 一个内半径为 R 的圆柱形汽缸，点火后于 t_0 到 t_1 时刻将活塞从 $x=a$ 处推至 $x=b$ 处（t_0 与 t_1 非常接近），求它在这段时间中的平均功率.

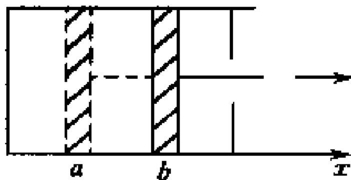


图 7.5.4

解 由于 t_0 与 t_1 非常接近，可以认为在这段时间内汽缸中的温度没有变化，由物理学定律，汽缸中气体的压强 p 与体积 V 成反比，即

$$p = \frac{C}{V},$$

C 是点火瞬间汽缸中气体的压强 p_0 与体积 aS 的乘积（S 为活塞的截面积 πR^2）. 所以当活塞在 x 处时，作用在活塞上的压力为

$$F = pS = \frac{C}{V}S = \frac{C}{Sx}S = \frac{C}{x},$$

利用微元法，活塞移动 $\mathrm{d}x$ 距离所做的功为

$$\mathrm{d}W = F\mathrm{d}x = \frac{C}{x}\mathrm{d}x,$$

于是，所求的平均功率为

$$N = \frac{W}{T} = \frac{C}{t_1 - t_0}\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{ap_0S}{t_1 - t_0}\ln\frac{b}{a}.$$

简单数学模型和求解

我们在第五章的§5中已经指出，要用数学技术去解决实际问题，首先必须建立数学模型. 由于最重要的数学建模工具是微分，而微分与积分互为逆运算，积分便理所当然地成为求解数学模型的有力手段. 将微分与积分结合起来，就可以为许多实际问题建立起相应的数学关系.（我们这里只考虑能直接用积分求解的情况，而不涉及一般的方法.）

比如，对例 5.5.7 给出的 Malthus 人口模型

$$\begin{cases} p'(t) = \lambda p(t), \\ p(t_0) = p_0, \end{cases}$$

在学习了积分以后，我们可以直接将微分形式

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = \lambda\mathrm{d}t$$

的两边在$[t_0,t]$上求积分,这时 p 的变化范围相应地为$[p_0,p]$,

$$\int_{p_0}^{p}\frac{\mathrm{d}p}{p}=\lambda\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t,$$

于是

$$\ln\frac{p}{p_0}=\lambda(t-t_0),$$

即

$$p=p_0\mathrm{e}^{\lambda(t-t_0)}.$$

下面再举几个简单的例子.

例 7.5.5(跟踪问题模型) 设 A 在初始时刻从坐标原点沿 y 轴正向前进,与此同时 B 于$[a,0]$处始终保持距离 a 对 A 进行跟踪(B 的前进方向始终对着A 当时所在的位置),求 B 的运动轨迹.

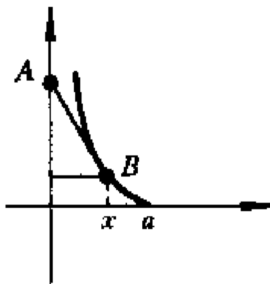


图7.5.5

解 设 B 的运动轨迹为

$$y=y(x)$$

利用跟踪的要求和导数的几何意义,容易得到数学模型

$$\begin{cases}y'=-\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{x},\\ y(a)=0.\end{cases}$$

两边求定积分

$$\int_0^y\mathrm{d}y=-\int_a^x\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\mathrm{d}x,$$

即得到 B 的运动轨迹方程为

$$y=a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\sqrt{a^2-x^2}.$$

这也可以看成一个重物 B 被A 用一根长度为a 的绳子拖着走时留下的轨迹,所以该曲线又被称为**曳线**.

例 7.5.6(火箭飞行的运动规律)　火箭是靠将燃料变成气体向后喷射,即甩去一部分质量来得到前进的动力的.

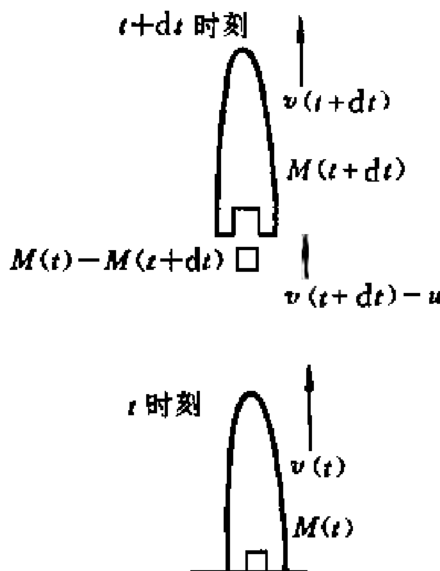


图 7.5.6

设 t 时刻火箭总质量为 $M(t)$,速度为 $v(t)$,从而其动量为 $M(t)v(t)$. 在从 t 到 $t+\mathrm{d}t$ 时间段中,有部分燃料以相对于火箭的常速度 u 被反向喷射出去(u 是由火箭的推进器的结构和性能决定的,与火箭本身的飞行速度无关),在 $t+\mathrm{d}t$ 时刻火箭的质量为 $M(t+\mathrm{d}t)$,速度为 $v(t+\mathrm{d}t)$,相应地,喷掉的燃料质量为 $M(t)-M(t+\mathrm{d}t)$,而其速度为 $v(t+\mathrm{d}t)-u$,且此时系统的动量等于火箭剩余部分的动量与燃料的动量之和.

因此在 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 中,系统动量的改变量为

$$\begin{aligned}&\{M(t+\mathrm{d}t)v(t+\mathrm{d}t)+[M(t)-M(t+\mathrm{d}t)][v(t+\mathrm{d}t)-u]\}-M(t)v(t)\\=&\ M(t)[v(t+\mathrm{d}t)-v(t)]+[M(t+\mathrm{d}t)-M(t)]u\\=&\ M(t)v'(t)\mathrm{d}t+uM'(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

再由冲量定律,上述动量的改变量应等于力与作用时间的乘积,即冲量 $F\mathrm{d}t$,这样,就得到火箭运动的微分方程为

$$M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=F-u\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t},$$

这里 F 是作用于火箭系统的外力,$M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 称为火箭的反推力.

特别地,当火箭在地球表面垂直向上发射时,$F=-Mg$,方程成为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-g-u\dfrac{1}{M}\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t},\\ v(0)=0,M(0)=M_0,\end{cases}$$

两边在$[0,t]$上积分，

$$\int_0^t v'(t)\mathrm{d}t = -\int_0^t g\mathrm{d}t - u\int_0^t \frac{M'(t)}{M(t)}\mathrm{d}t,$$

就得到

$$v(t) = u\ln\frac{M_0}{M(t)} - gt.$$

例 7.5.7(Logistic 人口模型) Malthus 人口模型的解

$$p = p_0 e^{\lambda(t-t_0)}$$

当$t\to\infty$时有$p(t)\to\infty$，这显然是荒谬的，因为人口的数量增加到一定程度后，自然资源和环境条件就会对人口的继续增长起制约作用，并且制约的力度随人口的增加而越来越强．也就是说，在任何一个给定的环境和资源条件下，人口的增长不可能是无限的，它必定有一个上界$p_{\max}$.

因此，荷兰生物数学家 Verhulst 认为，人口的增长速率应随着$p(t)$接近$p_{\max}$而越来越小，他提出了一个修正的人口模型

$$\begin{cases} p'(t) = \lambda\left[1 - \dfrac{p(t)}{p_{\max}}\right]p(t), \\ p(t_0) = p_0. \end{cases}$$

将含有p的项全部集中到左边，两边在$[t_0,t]$上积分，

$$\int_{p_0}^{p}\frac{\mathrm{d}p}{p_{\max}\cdot p - p^2} = \frac{\lambda}{p_{\max}}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t,$$

利用有理函数的积分公式，即可解出

$$p = \frac{p_{\max}}{1 + \left(\dfrac{p_{\max}}{p_0} - 1\right)e^{-\lambda(t-t_0)}},$$

当$t\to\infty$时有$p(t)\to p_{\max}$.

这个模型就是所谓的 Logistic 人口模型，美国和法国都曾用这个模型预测过人口，结果是令人满意的.

从 Kepler 行星运动定律到万有引力定律

最后，我们用 Kepler 的行星运动三大定律及 Newton 第二运动定律来导出万有引力定律，以作为本节的结束.

对任意一个确定的行星，由 Kepler 第一定律，以太阳(即椭圆的一个焦点)为极点，椭圆的长轴为极轴建立极坐标，则行星的轨道方程为

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\theta},$$

这里$p=\dfrac{b^2}{a}$是焦参数，$e=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}$是离心率，$a$ 和b 分别是椭圆的半长轴和半短轴.

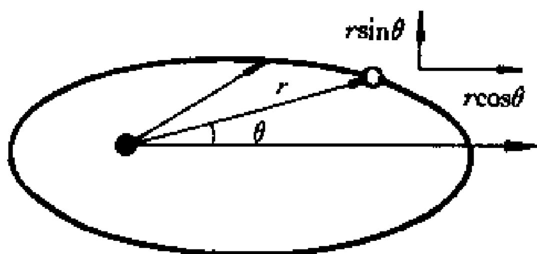


图 7.5.7

设在 t 时刻行星与太阳的距离为 $r=r(t)$，它们的连线与极轴的夹角为 $\theta=\theta(t)$，则行星的坐标可以用向量记号表示成 $\boldsymbol{r}=(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

记 $\mathrm{d}A$ 是极径转过角度 $\mathrm{d}\theta$ 所扫过的那块椭圆的面积(阴影部分)，由极坐标下的面积公式，

$$\mathrm{d}A=\frac{1}{2}r^2\mathrm{d}\theta,$$

由 Kepler 第二定律，单位时间中扫过的面积

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}r^2\omega=\text{常数},$$

这里 $\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ 表示行星运动的角速度.

记行星绕太阳运行一周的时间为 T，则经过 T 时间极径所扫过的面积恰为整个椭圆的面积 πab，即

$$\pi ab=\int_0^T\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}r^2\omega T,$$

因此常数

$$r^2\omega=\frac{2\pi ab}{T},$$

两边求导后得到

$$(r^2\omega)'=2r\dot{r}\omega+r^2\dot{\omega}=0,$$

即

$$2\dot{r}\omega+r\dot{\omega}=0.$$

记行星沿极径方向的速度和加速度分别为 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\equiv\dot{r}$ 和 $\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\equiv\ddot{r}$（称为**径向速度**和**径向加速度**），角加速度为 $\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\equiv\dot{\omega}$（用字母上面加点表示对 t 的导数是 Newton 的记号），则行星在 x 方向和 y 方向上的加速度分量分别为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2(r\cos\theta)}{\mathrm{d}t^2}&=\ddot{r}\cos\theta-2\dot{r}\omega\sin\theta-r[\dot{\omega}\sin\theta+\omega^2\cos\theta]\\&=(\ddot{r}-r\omega^2)\cos\theta-(2\dot{r}\omega+r\dot{\omega})\sin\theta\\&=(\ddot{r}-r\omega^2)\cos\theta;\end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2(r\sin\theta)}{\mathrm{d}t^2}=\ddot{r}\sin\theta-2\dot{r}\omega\cos\theta-r[\dot{\omega}\cos\theta+\omega^2\sin\theta]$$
$$=-(2\dot{r}\omega+r\dot{\omega})\cos\theta+(\ddot{r}-r\omega^2)\sin\theta$$
$$=(\ddot{r}-r\omega^2)\sin\theta,$$

记 $\boldsymbol{r}_0=\frac{\boldsymbol{r}}{r}=(\cos\theta,\sin\theta)$是 $\boldsymbol{r}$ 方向上的单位向量,于是,得到加速度向量

$$\boldsymbol{a}=(\ddot{r}-r\omega^2)\boldsymbol{r}_0,$$

即行星在任一点的加速度的方向恰与它的极径同向,加速度的值为 $\ddot{r}-r\omega^2$.

为了求出 $\ddot{r}-r\omega^2$,将椭圆方程

$$p=r(1-e\cos\theta)$$

两边求二阶导数,注意到 p 是焦参数即常数,

$$0=\ddot{p}=\ddot{r}(1-e\cos\theta)+2\dot{r}(e\omega\sin\theta)+re(\dot{\omega}\sin\theta+\omega^2\cos\theta)$$
$$=\ddot{r}-(\ddot{r}-r\omega^2)e\cos\theta+(2\dot{r}\omega+r\dot{\omega})e\sin\theta$$
$$=\ddot{r}-(\ddot{r}-r\omega^2)e\cos\theta$$
$$=(\ddot{r}-r\omega^2)(1-e\cos\theta)+r\omega^2$$
$$=\frac{\ddot{r}-r\omega^2}{r}\cdot p+r\omega^2,$$

所以

$$\ddot{r}-r\omega^2=-\frac{(r^2\omega)^2}{r^2}\cdot\frac{1}{p}=-\frac{4\pi^2a^2b^2}{T^2}\frac{a}{b^2}\cdot\frac{1}{r^2}$$
$$=-4\pi^2\cdot\frac{a^3}{T^2}\cdot\frac{1}{r^2}.$$

最后,由 Newton 第二运动定律和 Kepler 第三定律即$\frac{a^3}{T^2}$= 常数,便有

$$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}=m(\ddot{r}-r\omega^2)\boldsymbol{r}_0=-\left(\frac{4\pi^2}{M}\cdot\frac{a^3}{T^2}\right)\cdot\frac{Mm}{r^2}\boldsymbol{r}_0$$
$$=-\left(\frac{4\pi^2}{M}\cdot\frac{a^3}{T^2}\right)\cdot\frac{Mm}{r^2}\boldsymbol{r}_0=-G\frac{Mm}{r^2}\boldsymbol{r}_0,$$

这里 M 是太阳的质量,

$$G=\frac{4\pi^2}{M}\frac{a^3}{T^2}\approx 6.67\times10^{-11}(\mathrm{m}^3/\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2)$$

称为**万有引力常数**,G 前面的负号表示力的方向指向太阳.

万有引力定律是人类历史上最成功的数学模型之一,它的结论为以后一系列的观测和实验数据所证实(其中最为人津津乐道的是发现海王星),它的适用范围从天体运动一直延展到微观世界,令人信服地定量地解释了许多物理现象,并成为探索未知世界的有力工具.

习 题

1. 一根 10 m 长的轴,密度分布为 $\rho(x)=0.3x+6(\mathrm{kg/m})(0\leqslant x\leqslant10)$,

求轴的质量.

2. 已知抛物线状电缆 $y=x^2(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 上的任一点处的电荷线密度与该点到 y 轴的距离成正比,在(1,1)处的密度为 q,求此电缆上的总电量.

3. 水库的闸门是一个等腰梯形,上底 36m,下底 24m,高 16m,水平面距上底 4m,求闸门所受到的水压力(水的密度为 1 000kg/m^3).

4. 一个弹簧满足圆柱螺线方程

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \quad (a>0, b>0, t>0), \\ z = bt \end{cases}$$

其上任一点处的密度与它到 Oxy 平面的距离成正比,试求其第一圈的质量.

5. 一个圆柱形水池半径 10m,高 30m,内有一半的水,求将水全部抽干所要做的功.

6. 半径为 r 的球恰好没于水中,球的比重为 ρ,现在要将球吊出水面,最少要做多少功?

7. 半径为 r 密度为 ρ 的球壳以角速度 ω 绕其直径旋转,求它的动能.

8. 使某个长度为 1m 的自由弹簧伸长 2.5cm 需费力 15N,现将它从 1.1m 拉至 1.2m,问要做多少功?

9. 一物体的运动规律为 $s=3t^3-t$,介质的阻力与速度的平方成正比,求物体从 $t=1$ 运动至 $t=T$ 时阻力所做的功.

10. 半径为 1m,高为 2m 的直立的圆柱形容器中充满水,拔去底部的一个半径为 1cm 的塞子后水开始流出,试导出水面高度 h 随时间变化的规律,并求水完全流空所需的时间.(水面比出水口高 h 时,出水速度 $v=0.6\times\sqrt{2gh}$.)

11. 上题中的圆柱形容器改为何种旋转体容器,才能使水流出时水面高度下降是匀速的.

12. 镭的衰变速度与它的现存量成正比,设 t_0 时有镭 Q_0g,经 1 600 年它的量减少了一半,求镭的衰变规律.

13. 将 A 物质转化为 B 物质的化学反应速度与 B 物质的浓度成反比,设反应开始时有 B 物质 20%,半小时后有 B 物质 25%,求 B 物质的浓度的变化规律.

14. 设$[t,t+\mathrm{d}t]$中的人口增长量与 $p_{\max}-p(t)$ 成正比,试导出相应的人口模型,画出人口变化情况的草图并与 Malthus 和 Verhulst 人口模型加以比较.

15. 核反应堆中,t 时刻中子的增加速度与当时的数量 $N(t)$ 成正比.设 $N(0)=N_0$,证明

$$\left[\frac{N(t_2)}{N_0}\right]^{t_1} = \left[\frac{N(t_1)}{N_0}\right]^{t_2}.$$

16. 一个 1 000 m^3 的大厅中的空气内含有 a% 的废气，现以 1 m^3/min 的速率注入新鲜空气，混合后的空气又以同样的速率排出，求 t 时刻空气内含有的废气浓度，并求使废气浓度减少一半所需的时间.

§6 定积分的数值计算

数值积分

尽管 Newton－Leibniz 公式给出了求定积分的一条捷径，但对于解决实际问题来说，光有它是远远不够的. 前面我们已经指出，在整个可积函数类中，能够用初等函数表示不定积分的只占很小一部分，也就是说，对绝大部分理论上存在定积分的函数，并不能用 Newton－Leibniz 公式求得其定积分之值.

进一步，前面引进插值多项式时已指出，实际问题中，许多函数只是通过测量、试验等方法给出了若干个离散点上的函数值，如果问题的最后解决有赖于求出这个未知函数在某个区间上的积分值(这种例子比比皆是)，那么 Newton－Leibniz 公式是难有用武之地的.

所以需要寻找求定积分的各种近似方法，**数值积分**是其中最重要的一种.

从数值计算的观点来看，若能在$[a,b]$上找到一个具有足够精度的替代 $f(x)$的可积函数 $p(x)$，而 $p(x)$的原函数可以用初等函数表示，比如，$p(x)$为 $f(x)$的某个插值多项式，那么便可用 $p(x)$的积分值近似地代替 $f(x)$的积分值，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \int_a^b p(x)\mathrm{d}x = P(x)\Big|_a^b.$$

此外，从定积分的几何意义知道，将积分区间分得越细，小块近似面积之和与总面积就越是接近. 因此，用简单函数替代被积函数，并将积分区间细化是数值积分的主要思想.

Newton－Cotes 求积公式

这是一个取等距结点的数值积分公式.

将积分区间$[a,b]$以步长 $h=\dfrac{b-a}{n}$分成 n 等份，以分点

$$x_i = a + ih,\quad i = 0,1,2,\cdots,n-1,n,$$

为结点作 $f(x)$的 Lagrange 插值多项式

$$f(x) \approx p_n(x) = \sum_{i=0}^{n}\Big[\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\Big]f(x_i),$$

两边在$[a,b]$上积分，便有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \int_a^b p_n(x)\mathrm{d}x = (b-a)\sum_{i=0}^{n} C_i^{(n)} f(x_i).$$

这里，

$$C_i^{(n)} = \frac{1}{b-a}\int_a^b \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}\mathrm{d}x \qquad (\text{令 } x = a + th)$$

$$= \frac{h}{b-a}\int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{t-j}{i-j}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{n}\frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}\int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (t-j)\mathrm{d}t.$$

这就是 **n 步 Newton－Cotes 求积公式**，计算时需取 $n+1$ 个结点，相应的 $C_i^{(n)}$ 称为 **Cotes 系数**，它与积分区间和被积函数无关，可通过求多项式的积分事先算好.

容易看出，Cotes 系数具有如下性质：

1. 对称性. 可从 $C_i^{(n)}$ 的表达式直接算出

$$C_i^{(n)} = C_{n-i}^{(n)}, \qquad i = 0,1,2,\cdots,n-1,n.$$

2. 规范性. 由于 Newton－Cotes 公式对 $f(x)\equiv 1$ 是精确成立的，因此

$$\int_a^b 1\cdot\mathrm{d}x = (b-a)\sum_{i=0}^{n} C_i^{(n)}$$

即

$$\sum_{i=0}^{n} C_i^{(n)} = 1.$$

Newton－Cotes 公式将求定积分问题近似地转化为一个求和问题，下面是几个常用的情况.

(1)梯形公式

当 $n=1$ 时，由 Cotes 系数的性质，即知

$$C_0^{(1)} = C_1^{(1)} = \frac{1}{2},$$

因此

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)].$$

它的几何意义是用以$(a,0)$，$(a,f(a))$，$(b,f(b))$，$(b,0)$为顶点的直角梯形的面积近似代替由 $y=f(x)$，$x=a$，$x=b$ 和 x 轴所围成的曲边梯形的面积(图 7.6.1)，所以称为**梯形公式**.

(2)Simpson 公式

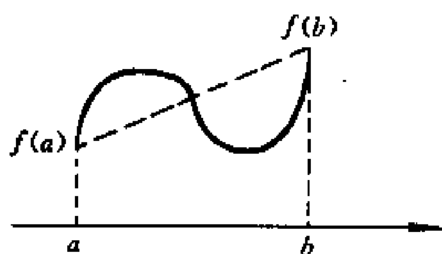


图 7.6.1

当 $n=2$ 时,

$$C_0^{(2)}=\frac{1}{4}\int_0^2(t-1)(t-2)\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{6}=C_2^{(2)},$$
$$C_1^{(2)}=1-C_0^{(2)}-C_2^{(2)}=\frac{4}{6},$$

因此得到 **Simpson 公式**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right].$$

它的几何意义是用过点 $(a,f(a))$, $\left(\frac{a+b}{2},f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$, $(b,f(b))$ 的抛物线 $p_2(x)$ 与 $x=a$, $x=b$ 和 x 轴所围成的曲边梯形的面积,近似代替由 $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$ 和 x 轴所围成的曲边梯形的面积(图 7.6.2),所以 Simpson 公式也称为抛物线公式.

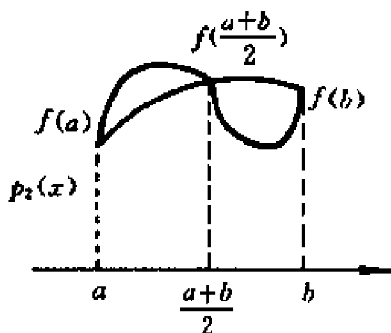


图 7.6.2

(3) Cotes 公式

当 $n=4$ 时,

$$C_0^{(4)} = \frac{1}{96}\int_0^4 (t-1)(t-2)(t-3)(t-4)\mathrm{d}t = \frac{7}{90} = C_4^{(4)},$$

$$C_1^{(4)} = -\frac{1}{24}\int_0^4 t(t-2)(t-3)(t-4)\mathrm{d}t = \frac{32}{90} = C_3^{(4)},$$

$$C_2^{(4)} = 1 - 2(C_0^{(4)} + C_1^{(4)}) = \frac{12}{90},$$

于是得到 **Cotes 公式**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{90}\{7[f(x_0)+f(x_4)] + 32[f(x_1)+f(x_3)] + 12f(x_2)\},$$

这里

$$x_i = \frac{(4-i)a+ib}{4}, \qquad i = 0,1,2,3,4.$$

例 7.6.1 分别用以上三个公式求 $\int_{-1}^{1} e^x \mathrm{d}x$ 的近似值.

解 梯形公式: $I_1 = e^1 + e^{-1} + = 3.086\ 161\ 27\cdots$;

Simpson 公式: $I_2 = \frac{1}{3}(e^1 + 4e^0 + e^{-1}) = 2.362\ 053\ 737\cdots$;

Cotes 公式: $I_4 = \frac{1}{45}[7(e^1 + e^{-1}) + 32(e^{\frac{1}{2}} + e^{-\frac{1}{2}}) + 12e^0)]$
$= 2.350\ 470\ 904\cdots$,

而积分的精确值为

$$I = \int_{-1}^{1} e^x \mathrm{d}x = e - \frac{1}{e} = 2.350\ 492\ 387\cdots.$$

所以,Cotes 公式的精度最高,但它要计算 5 个函数值,而梯形公式只要计算两个就够了.

定理 7.6.1(Newton - Cotes 公式误差估计定理) 设 $f^{(n+1)}(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,则用 Newton - Cotes 公式计算 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的误差 $R_n(f)$ 满足估计式

$$|R_n(f)| \leqslant \frac{M_f h^{n+2}}{(n+1)!}\int_0^n \left|\prod_{j=0}^{n}(t-j)\right| \mathrm{d}t,$$

这里

$$M_f = \max_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

证

$$R_n(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - (b-a)\sum_{i=1}^{n} C_i^{(n)} f(x_i)$$
$$= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b p_n(x)\mathrm{d}x$$
$$= \int_a^b [f(x) - p_n(x)]\mathrm{d}x.$$

由插值多项式余项定理,

$$R_n(f)=\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\mathrm{d}x,\qquad \xi\in(x_{\min},x_{\max})$$

于是

$$\begin{aligned}|R_n(f)|&\leqslant\int_a^b\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right|\mathrm{d}x\\&\leqslant\frac{M_f}{(n+1)!}\int_a^b\left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right|\mathrm{d}x\qquad(\text{令 }x=a+th)\\&\leqslant\frac{M_fh^{n+2}}{(n+1)!}\int_0^n\left|\prod_{i=0}^{n}(t-j)\right|\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

证毕

定义 7.6.1 *若一个数值求积公式在被积函数是不高于 n 次的任意多项式时都精确成立,而存在着一个 $n+1$ 次多项式使公式不能精确成立,则称该求积公式具有* **n 次代数精度**.

从某种意义上说,代数精度的次数越高越好.

由上述定义和定理 7.6.1 即可得到以下推论:

推论 1 *n 步 Newton - Cotes 求积公式的代数精度至少为 n.*

但若 n 为偶数时,推论 1 的结果还可以改进.

推论 2 *$n=2k$ 步的 Newton - Cotes 求积公式的代数精度至少为 $2k+1$.*

证 我们只要证明 $n=2k$ 步的 Newton - Cotes 求积公式对 $f(x)=x^{2k+1}$ 精确成立就可以了.

此时,$f^{(2k+1)}(x)\equiv(2k+1)!$,由定理 7.6.1 证明的中间过程得到

$$\begin{aligned}\frac{R_{2k}(f)}{h^{2k+2}}&=\int_0^{2k}\prod_{j=0}^{2k}(t-j)\mathrm{d}t\qquad(\text{令 }u=t-k)\\&=\int_{-k}^{k}\prod_{j=-k}^{k}(u+j)\mathrm{d}u\qquad(\text{令 }v=-u)\\&=(-1)^{2k+1}\int_{-k}^{k}\prod_{j=-k}^{k}(v-j)\mathrm{d}v\\&=-\int_{-k}^{k}\prod_{j=-k}^{k}(v+j)\mathrm{d}v\\&=-\frac{R_{2k}(f)}{h^{2k+2}},\end{aligned}$$

所以

$$R_{2k}(f)=0.$$

证毕

实际上可以验证,当 n 分别为奇数和偶数时,n 步 Newton - Cotes 求积公式的代数精度恰为 n 和 $n+1$.

特别地,当 $n=2$ 时,Simpson 公式具有三次代数精度,这就是一般不采用 3 步 Newton - Cotes 公式的缘故.

复化求积公式

要提高数值积分的精度,不能采用一味提高 Newton－Cotes 公式的步数的办法.理论上已经证明,n 较大时,Newton－Cotes 公式的计算过程中将产生不稳定,因此实际使用时,几乎不会有人将 n 取得大于 4.

既然此路不通,那就得另谋出路.一个自然的思路是,先将积分区间分成若干等份,再在每一个小区间上使用低步数的 Newton－Cotes 公式,最后将各小区间上的积分近似值加起来.

(1)复化梯形公式

将$[a,b]$以步长 $h=\frac{b-a}{m}$作 m 等分$x_i=a+ih, i=0,1,2,\cdots,m-1,m$.在每一个小区间$[x_{i-1},x_i]$使用梯形公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{m}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{h}{2}\sum_{i=1}^{m}[f(x_{i-1})+f(x_i)].$$

记

$$T_m^{(1)}=\frac{h}{2}[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{m-1}f(x_i)],$$

则 $T_m^{(1)}$ 称为将区间 m 等分的**复化梯形公式**.

可以证明,复化梯形公式与$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的误差为$O((b-a)h^2)$,与对整个区间直接使用梯形公式时的误差 $O((b-a)^3)$(定理 7.6.1)相比,精度大大提高了.

(2)复化 Simpson 公式和复化 Cotes 公式

记 $x_{i-\frac{1}{2}}$为区间$[x_{i-1},x_i]$的中点,可以完全类似地得到**复化 Simpson 公式**,

$$\begin{aligned}T_m^{(2)}\equiv S_m&=\frac{h}{6}\sum_{i=1}^{m}[f(x_{i-1})+4f(x_{i-\frac{1}{2}})+f(x_i)]\\&=\frac{h}{6}[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{m-1}f(x_i)+4\sum_{i=1}^{m}f(x_{i-\frac{1}{2}})].\end{aligned}$$

实际计算时并不是直接按这个公式去求 $T_m^{(2)}$ 的.容易验证,复化 Simpson 公式与复化梯形公式之间存在着如下关系:

$$T_m^{(2)}=\frac{4T_{2m}^{(1)}-T_m^{(1)}}{4-1},$$

将它与第五章§4 的外推公式相比较,就知道复化 Simpson 公式实质上是对复化梯形公式做了一次外推的结果.但复化 Simpson 公式的误差为 $O((b-a)h^5)$,远远好于 $T_m^{(1)}$ 和 $T_{2m}^{(1)}$,这一现象符合我们在前面所说的,两

个低精度的近似值进行适当外推后，可产生一个精度高得多的近似值.

读者可以仿照以上过程自行导出复化Cotes公式 $T_m^{(3)}$，并验证其满足

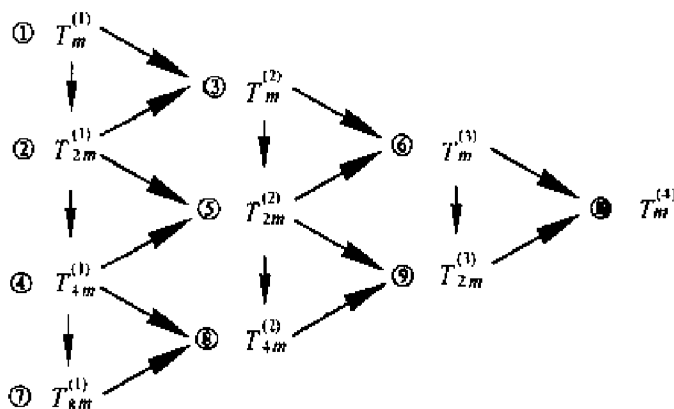
$$T_m^{(3)}=\frac{4^2T_{2m}^{(2)}-T_m^{(2)}}{4^2-1}.$$

(3)Romberg方法

将上面的外推的思想推广到一般的 $T_m^{(k)}$，记

$$T_m^{(k+1)}=\frac{4^kT_{2m}^{(k)}-T_m^{(k)}}{4^k-1},$$

就成了数值积分的**Romberg方法**，它的具体过程如下图所示.先取适当的初始值 m，再按①、②、③、……次序逐个计算，向下的箭头表示区间再细化一半，向右的箭头表示外推.



Romberg方法是在计算机上实际使用的求数值积分的最重要的方法之一.具体执行时一般从 $m=1,k=1$ 开始，逐个计算 $T_m^{(k)}$.若对某个 k 有 $|T_m^{(k)}-T_m^{(k-1)}|$ 小于预先设定的精度要求时，就将 $T_m^{(k)}$ 作为积分的近似值，计算结束；否则将小区间长度细小二分之一，重新由复化梯形公式开始，一直到算出 $T_m^{(k+1)}$，再作上述的比较.这种根据预置的精度要求，由计算机在计算过程中自动将区间划分到最合适程度的算法称为**自适应算法**.

例7.6.2 用Romberg方法计算 $\int_{-1}^{1}e^x\mathrm{d}x$ 的近似值.

解 计算结果见下表：

m	$T_m^{(1)}$	$T_m^{(2)}$	$T_m^{(3)}$	$T_m^{(4)}$
1	①3.086 161 270			
		③2.362 053 757		
2	②2.543 080 635		⑥2.350 470 904	
		⑤2.351 194 823		⑩2.350 402 494
4	④2.399 166 283		⑨2.350 403 568	
		⑧2.350 453 017		
8	⑦2.362 631 334			

请读者自行与积分的精确值以及例7.6.1比较.

Gauss 型求积公式

Newton - Cotes 公式是采用 $f(x)$在$[a,b]$中等距的 $n+1$ 个点处的函数值求积分的近似公式.很自然地,我们要问,能否通过适当地选取求积公式中的结点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

和系数 $a_i^{(n)}$,来达到尽可能高的计算精度呢?

回答是肯定的——这就是下面的 Gauss 型求积公式的概念.

定义 7.6.1 设使用$[a,b]$上 $n+1$ 个结点$\{x_i\}_{i=0}^n$的近似求积公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^n a_i^{(n)} f(x_i)$$

对于 $2n+1$ 次的任意多项式 $p_{2n+1}(x)$,都有

$$\int_a^b p_{2n+1}(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^n a_i^{(n)} p_{2n+1}(x_i)$$

则称该求和公式为$[a,b]$上的 **Gauss 型求积公式**.

显然,对任意给定的 $n+1$ 个结点$\{x_i\}_{i=0}^n$,特殊地构造 $2n+2$ 次多项式

$$f(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)^2$$

代入上式,即有左式恒大于零而右式恒等于零.这个例子告诉我们,不存在使用 $n+1$ 个结点,而对于所有的 $2n+2$ 次多项式都精确成立的近似求积分公式.从这个意义上讲,Gauss 型求积公式是精度最高的数值求积公式.

Gauss 型求积公式有很多种类型,下面介绍最常用的一类.

先设$[a,b]$为$[-1,1]$的情况,考虑第五章和第七章中出现过的 n 次 Legendre 多项式

$$p_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n, \quad n = 0,1,2,\cdots,$$

已经知道,它在$(-1,1)$上恰有 n 个不同的实根,并且$\{p_n(x)\}$是$[-1,1]$上的正交多项式.

利用这两个性质可以证明:

若用 $n+1$ 次 Legendre 多项式 $p_{n+1}(x)$的根$\{x_i^*\}_{i=0}^n$作为插值结点,作$f(x)$的 Lagrange 插值多项式并在$[-1,1]$上积分,由此得到的数值积分公式$\sum\limits_{i=0}^n a_i^{(n)} f(x_i^*)$是$[-1,1]$上的 Gauss 型求积公式,一般称为 **Gauss - Legendre** *求积公式.*

严格证明这个结论已超出了本书的范围,此处从略,有兴趣的读者可参阅数值逼近方面的教材.

具体计算时,可以先对 $p_{n+1}(x)$利用函数求根的方法求出$\{x_i^*\}_{i=0}^n$,再按关系式

$$a_i^{(n)} = \int_{-1}^1 \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^n \frac{x - x_j^*}{x_i^* - x_j^*}\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \frac{p_{n+1}(x)}{(x - x_i^*)[p_{n+1}'(x_i^*)]}\mathrm{d}x,$$

$$i = 0,1,2,\cdots,n-1,n$$

算出其系数.

下表给出了结点个数 $n+1 \leqslant 5$ 时的 Gauss - Legendre 求积公式的结点$\{x_i^*\}_{i=0}^n$和系数 $a_i^{(n)}$ 的值.

n	x_i^*	$a_i^{(n)}$
1	$\pm\sqrt{\frac{1}{3}}\approx\pm0.577\,350\,269\,2$	1
2	$\pm\sqrt{\frac{3}{5}}\approx\pm0.774\,596\,669\,2$ 0	$\frac{5}{9}\approx0.555\,555\,555\,6$ $\frac{8}{9}\approx0.888\,888\,888\,9$
3	$\pm\frac{\sqrt{3-4\sqrt{0.3}}}{\sqrt{7}}\approx\pm0.339\,981\,043\,6$ $\pm\frac{\sqrt{3+4\sqrt{0.3}}}{\sqrt{7}}\approx\pm0.861\,136\,311\,6$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{12}\sqrt{\frac{10}{3}}\approx0.652\,145\,154\,9$ $\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\sqrt{\frac{10}{3}}\approx0.347\,854\,845\,1$
4	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{5-2\sqrt{\frac{10}{7}}}\approx\pm0.538\,469\,310\,1$ $\pm\frac{1}{3}\sqrt{5+2\sqrt{\frac{10}{7}}}\approx\pm0.906\,179\,845\,9$ 0	$\frac{3(-0.7+5\sqrt{0.7})}{10(-2+5\sqrt{0.7})}\approx0.478\,628\,670\,5$ $\frac{3(0.7+5\sqrt{0.7})}{10(2+5\sqrt{0.7})}\approx0.236\,926\,885\,1$ $\frac{128}{225}\approx0.568\,888\,888\,9$

Legendre 多项式的根全部落在$(-1,1)$中(从表中可以看到,点集$\{x_i^*\}_{i=0}^n$中不包含$x=\pm1$两点),也就是说,用 Gauss-Legendre 公式计算积分的近似值时,是用不到$f(x)$在积分区间的端点处的函数值的.事实上,这是所有的 Gauss 型公式的特点.学了广义积分以后会知道,对于实际计算来说,这个特性具有极为重要的意义.

例 7.6.3 用 Gauss-Legendre 公式计算$\int_{-1}^{1}e^x dx$ 的近似值.

解: $n=1$: $I_1=e^{0.577\,350\,269\,2}+e^{-0.577\,350\,269\,2}=2.342\,696\,08\cdots$;

$n=2$: $I_2=\frac{1}{9}[5(e^{0.774\,596\,669\,2}+e^{-0.774\,596\,669\,2})+8e^0]=2.350\,336\,928\cdots$;

$n=4$: $I_4=0.236\,926\,885\,1(e^{0.906\,179\,845\,9}+e^{-0.906\,179\,845\,9})+$

$+0.478\,628\,670\,5(e^{0.538\,469\,310\,1}+e^{-0.538\,469\,310\,1})+0.568\,888\,888\,9e^0$

$=2.350\,402\,386\,58\cdots$.

它们所花的代价与例 7.6.1 用的梯形公式、Simpson 公式、Cotes 公式完全相同,但精度却大为提高.如$n=4$时,在同样只计算 5 个函数值情况下,绝对误差从$O(10^{-4})$一下子提高到$O(10^{-9})$!

当积分区间为$[a,b]$时,可以先作一个变换

$$t=\frac{b-a}{2}x+\frac{b+a}{2},$$

于是

$$\int_a^b f(t)dt=\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1}f\left(\frac{b-a}{2}x+\frac{b+a}{2}\right)dx,$$

就可以用 Gauss-Legendre 公式求解了.因此在$[-1,1]$上建立的 Gauss-Legendre 公式可

以推广到一般的积分区间上去.

除了 Gauss－Legendre 求积公式之外,还可以构造其它类型 Gauss 型求积公式,它们的基础都是定义在某个区间上的某一类特定的正交多项式,这里就不一一介绍了.

计算实习题

（在教师的指导下,编制程序在电子计算机上实际计算）

1. 利用 $\pi = 4\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$,

(1)用普通的梯形公式、Simpson 公式和 Cotes 公式,计算圆周率 π 的近似值并与精确值加以比较;

(2)将区间[0,1]分成 4、8 等份,用复化梯形公式和复化 Simpson 公式计算 π 的近似值,并与精确值加以比较;

(3)用 Romberg 方法计算 π 的近似值,使它的精度达到 $O(10^{-8})$;

(4)分别用 $n=1,2,4$ 的 Gauss－Legendre 公式计算 π 的近似值,并与前面的计算结果加以比较.

2. 设河面宽 20 m,从河的一岸向另一岸每隔 2 m 测得的水深如下:(单位:m)

x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
y	0	0.6	1.4	2.0	2.3	2.1	2.5	1.9	1.2	0.7	0

求河流的横断面积(图 7.6.3).

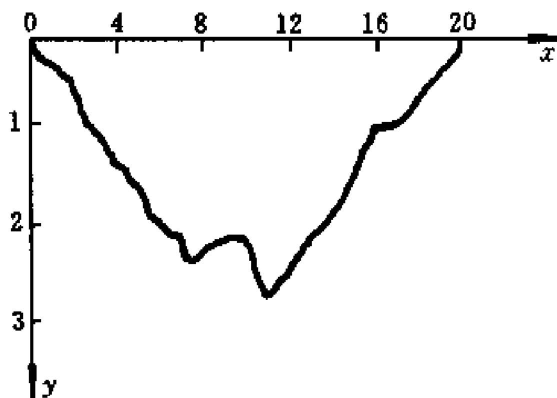


图 7.6.3

3. 分别用复化梯形公式和复化 Simpson 公式计算下列积分:

(1) $\int_0^1 e^{x^2}dx$， $m = 16$;

(2) $\int_0^{\pi} \frac{1-\cos x}{x}dx$， $m = 8$;

(可看成连续函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 的积分.)

(3) $\int_0^1 \sqrt{1-x^3}dx$； $m = 8$;

(4) $\int_0^2 \frac{e^{-x}}{1+x^2}dx$， $m = 8$.

4. 用 Romberg 方法计算 $\int_1^2 \frac{dx}{x}$，精确到小数点后第8位.

5. 用一般的积分区间上的 Gauss - Legendre 公式(取 $n = 4$)计算积分 $I(N) = \int_0^N e^{-x^2}dx$：

(1) $N=1$;

(2) $N=3$;

(3) $N=10$;

并与

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

的结果相比较.

6. 按第3题(2)同样的观点，计算 $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$ ($x = \frac{k\pi}{3}, k = 1,2,\cdots,6$)，并作出 $f(x)$ 的大致图形.

第八章 反常积分

§1 反常积分的概念和计算

反常积分

前面讨论 Riemann 积分时,首先假定了积分区间$[a,b]$有限且被积函数$f(x)$在$[a,b]$上有界,但在实际中经常会碰到不满足这两个条件,却确实需要求出某种形式的积分的情况. 所以,我们有必要突破 Riemann 积分的限制条件,考虑积分区间无限或被积函数无界的积分问题,这样的积分称为**反常积分(或广义积分)**,而以前的积分相应地称为**正常积分或常义积分**.

先来看下面的一个实际例子.

例 8.1.1 由万有引力定律导出物体脱离地球引力范围的最低初速度即第二宇宙速度.

解 设从地面垂直向上发射质量为 m 的物体飞出地球引力范围所需的最低初速度为 v_0,若它飞到无穷远处克服地球引力所做的功为 W,则由功能原理,v_0 须满足

$$\frac{1}{2}mv_0^2 \geqslant W,$$

因此,要求出第二宇宙速度,必须先求出物体从地球表面到无穷远处克服地球引力所做的功.

以地球质心为原点建立一维坐标,记地球半径为 R,设物体在 r 处所受到的地球引力为$F(r)(r\geqslant R)$,则由功的定义和微元法,有

$$\mathrm{d}W = -F(r)\mathrm{d}r$$

比照第 7 章§5 中微积分应用实例不难知道,求 W 就是求函数 $-F(r)$在无穷区间$[a,+\infty)$上的积分值,沿用前面的记号,我们可以将它形式地写成

$$W = -\int_R^{+\infty} F(r)\mathrm{d}r.$$

为了求出这个积分,我们换个角度来考虑(图 8.1.1). 物体从地面($r=R$)飞到 $r=x$ 处($x>R$)克服地球引力做的功为

$$W(x) = -\int_R^x F(r)\mathrm{d}r.$$

记 M 为地球的质量,由万有引力定律,有

$$F(r) = -G\frac{Mm}{r^2} \quad (G \text{ 为万有引力常数}).$$

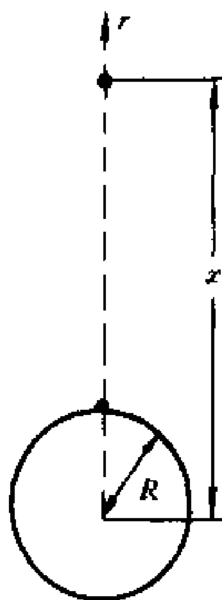


图 8.1.1

而在地表上，地球的引力即为重力，记 g 是重力加速度，有

$$F(R) = -G\frac{Mm}{R^2} = -mg,$$

解得 $G=\frac{R^2g}{M}$，从而克服地球引力需做的功为

$$W(x) = R^2mg\int_R^x \frac{1}{r^2}\mathrm{d}r = R^2mg(-\frac{1}{r})\Big|_R^x = R\,mg(1-\frac{R}{x}).$$

显然，$W=\lim\limits_{x\to+\infty}W(x)$，因此

$$W = -\int_R^{+\infty}F(r)\mathrm{d}r = \lim_{x\to+\infty}(-\int_R^x F(r)\mathrm{d}r) = \lim_{x\to+\infty}R\,mg(1-\frac{R}{x}) = R\,mg.$$

将 W 以及 $g=9.8\mathrm{m/s^2}$，地球半径 $R\approx 6\,371\mathrm{km}$ 代入关于 v_0 的不等式，得到

$$\begin{aligned} v_0 &\geqslant \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{2Rg} \\ &= \sqrt{2\times 6\,371\times 9.8\times 10^{-3}} \\ &\approx 11.2(\mathrm{km/s}). \end{aligned}$$

这就是第二宇宙速度.

需要求无穷区间上积分的类似例子在实际应用中还很多(见习题)，这正是我们要讨论的一类反常积分，它有三种形式：$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$、$\int_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$. 但是由于

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x \overset{x=-t}{=} -\int_{-\infty}^{-a} f(-t)\mathrm{d}t = \int_{-a}^{+\infty} f(-t)\mathrm{d}t$$

和

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x,$$

因此下面的讨论仅就$\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$的形式来展开.

定义 8.1.1　设函数 $f(x)$在$[a,+\infty)$有定义,且在任意有限区间$[a,A]\subset[a,+\infty)$上可积.若极限

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{a}^{A} f(x)\mathrm{d}x$$

存在,则称反常积分$\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ **收敛**,其积分值

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\int_{a}^{A} f(x)\mathrm{d}x;$$

否则称反常积分$\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ **发散**.

对反常积分$\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x$ 和$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$的敛散性也可类似地定义(留作习题).一个显而易见的事实是,只有当$\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 和$\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x$都收敛时,才认为$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$是收敛的.

设 $f(x)$在$[a,+\infty)$连续,$F(x)$是它在$[a,+\infty)$上的一个原函数,由 Newton-Leibniz 公式,

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty} F(x)\Big|_{a}^{A} = \lim_{A\to+\infty} F(A) - F(a),$$

因此$\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛等价于函数极限$\lim\limits_{A\to+\infty} F(A)$存在.当 $f(x)\geqslant 0$ 时,这表示由直线 $x=a$、$f(x)$和 x 轴所界定的面积(图 8.1.2)是个有限值.

对于原函数是初等函数的反常积分,这不仅是判断其敛散性最直接的方法,而且对收敛的反常积分也同时求出了积分值.

例 8.1.2　讨论$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$的敛散性($p\in\mathbf{R}$).

解　当 $p\neq1$ 时,

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\frac{x^{-p+1}}{1-p}\Big|_{1}^{A} = \lim_{A\to+\infty}\frac{A^{1-p}-1}{1-p} = \begin{cases}\dfrac{1}{p-1}, & p>1,\\ +\infty, & p<1;\end{cases}$$

当 $p=1$ 时,

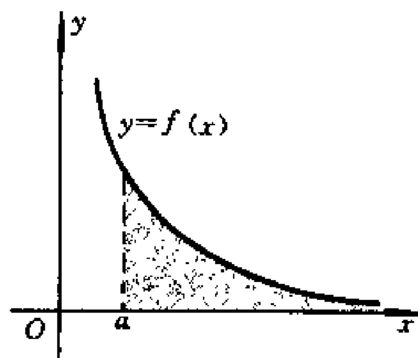


图 8.1.2

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\ln x\bigg|_1^A = \lim_{A\to+\infty}\ln A = +\infty,$$

因此,反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 当 $p>1$ 时收敛于 $\frac{1}{p-1}$, $p\leqslant 1$ 时发散.

为了简便,我们一般仿照正常积分的 Newton－Leibniz 公式的表达形式,将反常积分形式地写成

$$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x = F(x)\bigg|_a^{+\infty},$$

读者只要将积分上限理解为极限过程就行了.

例 8.1.3 讨论 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x$ 的敛散性($a\in\mathbf{R}$).

解 当 $a\neq 0$ 时,

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{e}^{-ax}}{a}\bigg|_0^{+\infty} = \begin{cases}\dfrac{1}{a}, & a<0,\\ +\infty, & a<0,\end{cases}$$

而当 $a=0$ 时上述积分显然发散,因此, $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x$ 当 $a>0$ 时收敛于 $\frac{1}{a}$, $a\leqslant 0$ 时发散.

例 8.1.4 计算 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^0\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\\ &= \arctan x\bigg|_0^{+\infty} + \arctan x\bigg|_{-\infty}^0\\ &= \pi.\end{aligned}$$

在上一章例 7.4.7 求半径为 a 的圆的周长 l 的第一种解法中，我们采用直角坐标系下的显式方程 $y=\sqrt{a^2-x^2}$，求出了

$$l = 4a\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = 4a\cdot\arcsin\frac{x}{a}\bigg|_0^a = 2\pi a.$$

细心的读者可能会有疑问，Riemann 积分要求被积函数在积分区间上有界，而这里的$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$在 $x\to a-0$ 时不是无界的吗(图 8.1.3)?

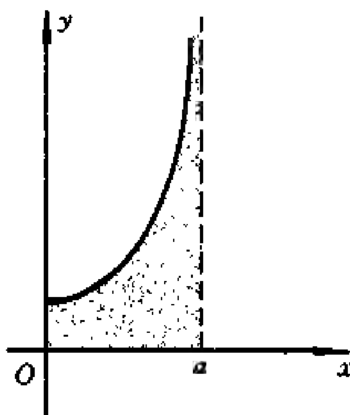


图 8.1.3

事实上，这确实就是下面要讨论的另一类反常积分——无界函数的积分，只是由于其原函数 $\arcsin\dfrac{x}{a}$ 为大家所熟知且在$[0,a]$连续，我们按常规将积分上下限代入时没觉察到有什么不妥而已.

使函数无界的点称为它的**奇点**，由积分的区间可加性，我们假定 $f(x)$在$[a,b]$上只有一个奇点 $x=b$.

定义 8.1.2　*设函数 $f(x)$在 $x=b$ 的左邻域无界，若 $\forall\,\eta\in(0,b-a)$，$f(x)$在区间$[a,b-\eta]$上有界可积，且极限*

$$\lim_{\eta\to0+}\int_a^{b-\eta}f(x)\mathrm{d}x,$$

*存在，则称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ **收敛**，其积分值*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\eta\to0+}\int_a^{b-\eta}f(x)\mathrm{d}x;$$

*否则称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ **发散**.*

$x=a$ 为奇点和 $x=c\in(a,b)$为奇点的情况可以类似定义. 当 $x=c$ 为奇

点时，与在$(-\infty,\infty)$的反常积分类似，只有当$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$和$\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$都收敛时，才认为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$是收敛的.

例 8.1.5 讨论$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$的敛散性($p\in\mathbf{R}$).

解 当$p\neq 1$时，

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x = \lim_{\eta\to 0+}\frac{x^{-p+1}}{1-p}\Big|_\eta^1 = \lim_{\eta\to 0+}\frac{1-\eta^{1-p}}{1-p} = \begin{cases} +\infty, & p>1, \\ \frac{1}{1-p}, & p<1; \end{cases}$$

当$p=1$时，

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x = \lim_{\eta\to 0+}\ln x\Big|_\eta^1 = -\lim_{\eta\to 0+}\ln\eta = +\infty,$$

因此，反常积分$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$当$p<1$时收敛于$\frac{1}{1-p}$，当$p\geqslant 1$时发散.

例 8.1.2 和例 8.1.5 中积分一般称为 **p 积分**，对于判别其它反常积分的敛散性具有十分重要的作用.

我们同样可以将无界函数的反常积分形式地写成

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b,$$

这时它与正常积分的 Newton-Leibniz 公式完全相同，但必须把右端理解为极限过程，即

$$F(x)\Big|_a^b = \lim_{x\to b-0}F(x) - F(a).$$

容易看出，无穷区间的反常积分与无界函数的反常积分是可以互相转换的. 例如

$$\begin{aligned} &\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \qquad \left(\text{作代换 } x=\frac{1}{t}\right) \\ &= -\int_{\frac{1}{a}}^0 \frac{1}{t^2}f\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t \qquad \left(\text{令 } g(t)=\frac{1}{t^2}f\left(\frac{1}{t}\right)\right) \\ &= \int_0^{\frac{1}{a}} g(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

这就化成了无界函数的反常积分. 请读者自行写出反过来的情况.

因此，后面的讨论经常只对一类反常积分进行.

最后我们以无穷区间的反常积分为例，指出反常积分的一个重要特性.

设$f(x)$在$[a,+\infty)$有定义，例 8.1.2 告诉我们，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$并不能保

证 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

但反过来,若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,能否保证 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$,或者退一步,至少保证 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 有界呢? 同样不能!

例 8.1.6 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 按如下方式定义:

$$f(x)=\begin{cases} n+1, & x\in\left[n,n+\dfrac{1}{n(n+1)^2}\right], \\ 0, & x\in\left(n+\dfrac{1}{n(n+1)^2},n+1\right), \end{cases} \quad n=1,2,\cdots.$$

那么 $\forall A>1$,总可以取充分大的 n,使得 $A\in[n,n+1)$,由于 $f(x)\geqslant 0$,因此

$$\int_1^n f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_1^A f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x,$$

当 $n\to\infty$ 时,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\int_1^n f(x)\mathrm{d}x &= \lim_{n\to+\infty}\left[\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x+\cdots+\int_{n-1}^n f(x)\mathrm{d}x\right]\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}\right]\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left[(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})\right]\\ &= \lim_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{n}) = 1 = \lim_{n\to+\infty}\int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

由极限的夹逼性

$$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\int_1^A f(x)\mathrm{d}x = 1,$$

但 $f(x)$ 显然是无界的.

即使 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 连续(甚至 n 次可微),也可仿照上例构造出 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛而 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 无界的例子(见习题 10).

反常积分计算

第七章中关于定积分的性质,对于反常积分大多相应成立,如线性性、保序性、区间可加性等;但也有一些性质,如乘积可积性,却不再成立(它们的证明或举例都比较容易,留给读者作为练习).正常积分的一切计算法则,如线性运算、换元积分法、分部积分法等,也都可以平行地用于反常积分.

例 8.1.7 计算 $I_n=\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}x^n\mathrm{d}x$ (n 是非负整数).

解 由例 8.1.3, $I_0=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=1$.

当 $n\geqslant 1$ 时,利用分部积分

$$I_n=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^n dx=-e^{-x}x^n\Big|_0^{+\infty}+n\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{n-1}dx$$
$$=n\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{n-1}dx=nI_{n-1},$$

因此,当 $n\geqslant 0$ 时,

$$I_n=n!.$$

例 8.1.8 计算 $\int_0^1 \ln x dx$.

本例用分部积分法也很容易,这里改用换元积分法来做.

解 令 $\ln x=-t$,则 $\ln x dx=te^{-t}dt$,由上题结果

$$\int_0^1 \ln x dx=\int_{+\infty}^0 te^{-t}dt=-I_1=-1.$$

在例 6.2.17 已求出了 $\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$,现在我们来求它在 $[0,+\infty)$ 上的反常积分.

例 8.1.9 计算 $I_n=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$.

解 与例 6.2.17 类似地,对于 $n\geqslant 2$,利用分部积分,就有

$$I_n=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx=\frac{1}{a^2}\int_0^{+\infty}\frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^n}dx$$
$$=\frac{I_{n-1}}{a^2}+\frac{1}{a^2}\int_0^{+\infty}\frac{-x^2}{(x^2+a^2)^n}dx$$
$$=\frac{I_{n-1}}{a^2}+\frac{1}{2a^2(n-1)}\int_0^{+\infty}x d\left(\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right)$$
$$=\frac{I_{n-1}}{a^2}-\frac{I_{n-1}}{2a^2(n-1)}+\frac{1}{2a^2(n-1)}\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}\Big|_0^{+\infty}$$
$$=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot I_{n-1};$$

以此类推,并注意到

$$I_1=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2a},$$

即有

$$I_n=\left(\frac{1}{a^2}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\right)I_{n-1}$$
$$=\left(\frac{1}{a^2}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\right)\left(\frac{1}{a^2}\cdot\frac{2n-5}{2n-4}\right)I_{n-2}$$

$$= \cdots\cdots$$

$$= \frac{1}{a^{2n-2}} \cdot \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot I_1$$

$$= \frac{\pi}{2a^{2n-1}} \cdot \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}.$$

有时需要把整个积分区间化成若干个子区间,再分别加以处理.积分区间上有多个奇点或含于区间内部的单个奇点的情况就是典型的例子.

例 8.1.10　计算 $\int_{-1}^{1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$.

解　显然 $x=0$ 是它的唯一奇点,但这一点在区间的内部,因而我们将它分解为两个积分

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = \int_{-1}^{0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx + \int_{0}^{1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx,$$

经计算

$$\int_{-1}^{0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = -e^{\frac{1}{x}}\Big|_{-1}^{0} = \frac{1}{e},$$

$$\int_{0}^{1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = -e^{\frac{1}{x}}\Big|_{0}^{1} = +\infty,$$

所以 $\int_{-1}^{1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$ 发散.

有时可以运用变量代换或对区间适当拆分,将积分化成若干个部分,通过其中某些部分的互相迭加或抵消,来求出积分值.

例 8.1.11　计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx$.

解　作变量代换 $x=2t$,则

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin 2t dt$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln (2\sin t \cos t) dt$$

$$= \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin t dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos t dt.$$

对后一积分作代换 $t=\frac{\pi}{2}-u$,则

$$I=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin t\mathrm{d}t-2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\pi}{2}\ln 2+2I,$$

于是求得

$$I=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

考察反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\mathrm{d}x$.由定义

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\mathrm{d}x=-\lim_{A\to+\infty}\cos A+\lim_{A'\to+\infty}\cos A',$$

由于这里 $A\to+\infty$ 与 $A'\to-\infty$ 是独立的,因此极限不存在,$\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\mathrm{d}x$ 发散.

如果将要求稍稍减弱,允许 $A\to+\infty$ 与 $A'\to-\infty$"同步",即 $A'=-A$,则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\mathrm{d}x=-\lim_{A\to+\infty}[\cos A-\cos(-A)]=0.$$

即 $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\mathrm{d}x$ 在这么一种意义下是"收敛"的.

定义 8.1.3 若

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}[F(A)-F(-A)]$$

收敛,则称该极限值为 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 的 **Cauchy 主值**,记为(cpv)$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$.

若 $\int_{\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,则显然有

$$(\mathrm{cpv})\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x,$$

而当 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散时,它的 Cauchy 主值却有可能存在,因此 Cauchy 主值推广了反常积分的收敛概念.

无界函数的反常积分也有相应的 Cauchy 主值概念.

例 8.1.12 计算 $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 和(cpv)$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

解 $x=0$ 是它的唯一奇点,将它分解为两部分,

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\lim_{\eta\to0+}\ln\eta-\lim_{\eta'\to0-}\ln(-\eta'),$$

由 $\eta\to0+$ 和 $\eta'\to0-$ 的独立性，易知 $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx$ 是发散的.

但若取 $\eta'=-\eta$，即有

$$(\mathrm{cpv})\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx=\lim_{\eta\to0+}[\ln\eta-\ln\eta]=0.$$

以后我们会学到，Cauchy 主值在某些领域中有独到的作用.

对于一些已确认为收敛的反常积分(有些根据问题的实际背景可以断定其收敛，进一步的数学判据将在下一节给出)，如果其原函数不能用初等函数来表示，那么除了极少数可以通过某些高超的技巧积出之外，人们还是不得不借助于数值方法来求积分值.

求反常积分值的计算格式首推 Gauss 型求积公式. 除了它的计算精度高之外，更重要的原因在于，任何形式的 Gauss 型求积公式都只需用到积分区间的内点，这是它最突出的优点(基于 Newton－Cotes 公式的数值方法毫无例外地需用到端点). 也就是说，对于奇点在端点的无界函数的反常积分，如

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+t}\ln\frac{1-t}{2}dt$$

(这是由 $\int_{0}^{1}\frac{\ln(1-x)}{x}dx$ 通过变换 $x=\frac{1+t}{2}$ 得到的，其值为 $-\frac{\pi^2}{6}=-1.644\,934\,0\cdots$)，我们可以视其为常义积分而直接套用 Gauss－Legendre 公式，根本无须对 $t=\pm1$ 加以特殊的"关照"——它们在计算过程中是决不会被用到的. Gauss 型公式的这个性质为编制和调用统一的计算程序带来了极大的方便.

Gauss 型结点 $\{x_i^*\}_{i=0}^{n}$ 和系数 $a_i^{(n)}$ 可在数学工具书中查到，将它们代人

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx\approx\sum_{i=0}^{n}a_i^{(n)}f(x_i^*),$$

就可以算出积分的近似值了. 下表是用不同的 n 计算 $\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+t}\ln\frac{1-t}{2}dt$ 的近似值. 因无界函数在端点附近变化较剧烈，实际计算时 n 应取得大些(如 20 以上，从编程和上机角度讲，$n=5$ 和 $n=50$ 并没有本质差别)，方能获得较好效果.

n	5	8	12	20	48
计算值	$-1.624\,2\cdots$	$-1.636\,2\cdots$	$-1.640\,8\cdots$	$-1.643\,4\cdots$	$-1.644\,6\cdots$
相对误差	1.2×10^{-2}	5.2×10^{-3}	2.5×10^{-3}	9.1×10^{-4}	1.6×10^{-4}

无穷区间的反常积分的处理方法大致有三种：

(1)取一个足够大的数 A，用 $\int_{a}^{A}f(x)dx$ 作为 $\int_{a}^{+\infty}f(x)dx$ 的近似值. 这时，问题已化成了正常积分，第 7 章 §6 中的计算实习题 4 和 5 就相当于做了这样的处理.

(2)将 $\int_{a}^{+\infty}f(x)dx$ 通过变换 $x=\frac{1}{t}$ 化成无界函数在有限区间上的反常积分，再用上述针对无界函数的方法.

(3)直接使用 $[0,+\infty)$ 或 $(-\infty,+\infty)$ 上的 Gauss 型求积公式. 这部分内容已超出本书

的范围，有兴趣的读者可参阅有关数值逼近方面的书籍.

习 题

1. 物理学中称电场力将单位正电荷从距电场中心某固定处移至无穷远处所做的功为该处的电位. 一个带电量 $+q$ 的点电荷产生的电场对距离 r 处的单位正电荷的电场力为 $F=k\frac{q}{r^2}$（k 为常数），求距电场中心 x 处的电位（图 8.1.4）.

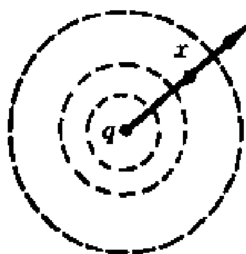


图 8.1.4

2. 仿照定义 8.1.1，分别叙述反常积分 $\int_{-\infty}^{a}f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 的敛散性定义.

3. 计算下列无穷区间的反常积分（发散也是一种计算结果）：

(1) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\sin 5x\,\mathrm{d}x$；　(2) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-3x}\cos 2x\,\mathrm{d}x$；

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$；　(4) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\mathrm{d}x$；

(5) $\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{ax^2}\mathrm{d}x\quad(a\in\mathbf{R})$；　(6) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^p x}\mathrm{d}x\quad(p\in\mathbf{R})$；

(7) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}\mathrm{d}x$；　(8) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2}\mathrm{d}x$；

(9) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^4+1}\mathrm{d}x$；　(10) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

4. 计算下列无界函数的反常积分（发散也是一种计算结果）：

(1) $\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；　(2) $\int_1^{\mathrm{e}}\frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\mathrm{d}x$；

(3) $\int_1^2\frac{x}{\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$；　(4) $\int_0^1\frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$；

(5) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$；　　(6) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\tan x}}\mathrm{d}x$；

(7) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\mathrm{d}x$；　　(8) $\int_{0}^{\pi} x\ln\sin x\mathrm{d}x$.

5. 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.　（提示：利用 Riemann 和化成反常积分.）

6. 计算下列反常积分：

(1) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\cot x\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_{0}^{1} \frac{\arcsin x}{x}\mathrm{d}x$；

(3) $\int_{0}^{1} \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

7. 求下列反常积分的 Cauchy 主值：

(1) $(\mathrm{cpv})\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2}\mathrm{d}x$；　　(2) $(\mathrm{cpv})\int_{1}^{4} \frac{1}{x-2}\mathrm{d}x$；

(3) $(\mathrm{cpv})\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x$；　　(4) $(\mathrm{cpv})\int_{1/2}^{2} \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$.

8. 说明一个无界函数反常积分可以化为无穷区间的反常积分.

9. (1) 以 $\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 为例，叙述并证明反常积分的线性性、保序性和区间可加性.

(2) 举例说明，对于反常积分不再成立乘积可积性.

10. 举例说明，即使 $f(x)\geqslant 0$ 在 $[a,+\infty)$ 连续甚至任意次可微，且 $\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 还是有可能是无界的（可以以连续或一次可微为例）.

11. 证明：当 $a>0$ 时，只要下式两边的反常积分有意义，就有

$$\int_{1}^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = \ln a\int_{1}^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{1}{x}\mathrm{d}x.$$

计算实习题

在教师的指导下，试编制一个通用的 Gauss－Legendre 求积公式程序，在电子计算机上实际计算下列反常积分值，并与精确值比较：

(1) $\int_{0}^{1} \frac{\ln(1-x)}{x}\mathrm{d}x$（精确值 $-\frac{\pi^2}{6}$）；

(2) $\int_{0}^{1} \ln x\ln(1-x)\mathrm{d}x$（精确值 $2-\frac{\pi^2}{6}$）；

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \mathrm{d}x$（精确值 $-\frac{\pi}{2}\ln 2$）；

(4) $\int_0^{+\infty} \frac{\tan x}{x} \mathrm{d}x$（精确值$\frac{\pi}{2}$）；

(5) $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) \mathrm{d}x$，（精确值$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$）.

§2 反常积分的收敛判别法

反常积分的 Cauchy 收敛原理

通过研究被积函数的性质来判别反常积分的敛散性，其重要意义是不言而喻的.由于绝大部分被积函数的原函数不能用初等函数表达，因此，用数值方法计算反常积分的先决条件是确认其收敛，否则可能大谬不然——在积分本身发散时，却从数值求积公式得到了一个“收敛”值.此外，许多理论研究也需要从形式上直接确定一个反常积分的敛散性.

下面以 $\int_a^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x$ 为例来探讨反常积分的收敛判别法.

由于 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛即为 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$ 存在，或者说 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_A^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\to 0$，因此，对其收敛的最本质的刻画就是极限论中的 Cauchy 收敛原理，它可以表述为如下形式：

定理 8.2.1（Cauchy 收敛原理） 反常积分 $\int_A^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充分必要条件是：$\forall \varepsilon>0$，$\exists A_0 \geqslant a$，使得对任意 $A, A' \geqslant A_0$，有

$$\left|\int_A^{A'} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

定义 8.2.1 设 $f(x)$ 在任意有限区间 $[a, A] \subset [a, +\infty)$ 上可积，且 $\int_a^{+\infty} |f(x)| \mathrm{d}x$ 收敛，则称 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ **绝对收敛**（或称 $f(x)$ 在$[a, +\infty)$上**绝对可积**）.

若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛而非绝对收敛，则称 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ **条件收敛**（或称 $f(x)$在$[a, +\infty)$上**条件可积**）.

由于$\forall A, A' \geqslant a$，都有

$$\left|\int_A^{A'} f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_A^{A'} |f(x)| \mathrm{d}x,$$

因此，由 Cauchy 收敛原理，绝对收敛的反常积分一定收敛.

Cauchy 收敛原理在理论上十分完美，但是，对一个个具体的反常积分，若

要直接使用定理 8.2.1 去检验其是否收敛,往往是十分困难的事,因此需要导出一些有用的判别收敛的方法.

我们先讨论非负函数的收敛判别法.因为对于非负函数来说,绝对收敛与收敛是一回事,所以这也是判别绝对收敛的方法.对于一般的函数,若能证明它绝对收敛,它本身当然就是收敛的了.

非负函数反常积分的收敛判别法

用 Cauchy 收敛原理很容易证明下面的比较判别法,它很直观,却很实用.

定理 8.2.2(比较判别法) 设在$[a,+\infty)$上恒有 $K\varphi(x)\geqslant f(x)\geqslant 0$,$K$ 是任意正常数,则当 $\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$ 收敛时 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛;当 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散时 $\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$ 也发散.

例 8.2.1 讨论 $\int_1^{+\infty}\frac{a\sin x}{\sqrt{x^3+b^2}}\mathrm{d}x$ 的敛散性(a、b 是常数).

解 因为当 $x\geqslant 1$ 时有

$$\left|\frac{a\sin x}{\sqrt{x^3+b^2}}\right|\leqslant\frac{|a|}{x\sqrt{x}},$$

在例 8.1.2 中,已知 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 收敛,由比较判别法,$\int_1^{+\infty}\frac{a\sin x}{\sqrt{x^3+b^2}}\mathrm{d}x$ 绝对收敛,所以 $\int_1^{+\infty}\frac{a\sin x}{\sqrt{x^3+b^2}}\mathrm{d}x$ 收敛.

如下形式的比较判别法有时用起来更为方便一些.

推论(比较判别法的极限形式) 设在$[a,+\infty)$上恒有 $f(x)\geqslant 0$ 和 $\varphi(x)\geqslant 0$,且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=l,$$

则

(1)若 $0\leqslant l<+\infty$,则 $\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$ 收敛时 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛;

(2)若 $0<l\leqslant+\infty$,则 $\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$ 发散时 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 也发散.

所以,当 $0<l<+\infty$ 时,$\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 同时收敛或同时发散;

例 8.2.2 讨论 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x^4+3x^3+5x^2+2x-1}}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解 因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{x^4+3x^3+5x^2+2x-1}}=1,$$

而$\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}\mathrm{d}x$收敛,所以$\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x^4+3x^3+5x^2+2x-1}}\mathrm{d}x$收敛.

使用比较判别法,需要有一个敛散性结论明确、同时又形式简单的函数作为判别标准,在上面的例子中我们都是取$\frac{1}{x^p}$为"样板"的,因为它们正好能满足这两个条件(这正是 p 积分之所以重要的原因).将定理 8.2.2 中的$\varphi(x)$具体取为$\frac{1}{x^p}$,就得到如下的 Cauchy 判别法:

定理 8.2.3(Cauchy 判别法) 设在$[a,+\infty)\subset(0,+\infty)$上恒有$f(x)\geqslant 0$,$K$ 是任意正常数,

(1)若$f(x)\leqslant\frac{K}{x^p}$,且$p>1$,则$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛;

(2)若$f(x)\geqslant\frac{K}{x^p}$,且$p\leqslant 1$,则$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$发散.

推论(Cauchy 判别法的极限形式) 设在定理 8.2.3 条件下有

$$\lim_{x\to+\infty}x^p f(x)=l,$$

则

(1)若$0\leqslant l<+\infty$且$p>1$,则$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛;

(2)若$0<l\leqslant+\infty$且$p\leqslant 1$,则$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$发散.

例 8.2.3 讨论$\int_0^{+\infty}x^a\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$的敛散性($a\geqslant 0$).

解 因为对任意常数$a\geqslant 0$,有

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot x^a\mathrm{e}^{-x}=0,$$

由 Cauchy 判别法的极限形式(1)(即$p=2$的情况),知$\int_a^{+\infty}x^a\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$收敛.

一般函数反常积分的收敛判别法

为了对一般函数的反常积分讨论敛散性,我们先给出下面的重要结果:

定理 8.2.4(积分第二中值定理) 设$f(x)$在$[a,b]$上可积,$g(x)$在$[a,b]$上单调,则存在$\xi\in[a,b]$,使

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(a)\int_a^{\xi}f(x)\mathrm{d}x+g(b)\int_{\xi}^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证 我们这里只对$f(x)$在$[a,b]$上连续且$g(x)$在$[a,b]$可导的特殊情况加以证明.

记 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $F(x)$ 连续且 $F(a)=0$. 由分部积分法

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = F(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\mathrm{d}x,$$

其第一项

$$F(x)g(x)\Big|_a^b = F(b)g(b) = g(b)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

而在第二项中，由于 $g(x)$ 单调，因此 $g'(x)$ 保号，由积分第一中值定理，存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b F(x)g'(x)\mathrm{d}x = F(\xi)\int_a^b g'(x)\mathrm{d}x = [g(b)-g(a)]\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x,$$

于是

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x &= g(b)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - [g(b)-g(a)]\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x\\ &= g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

一般的可积函数 $f(x)$ 和单调函数 $g(x)$ 的情况，由于证明过程比较复杂，在此从略.

证毕

由积分第二中值定理可以导出两个重要的判别法，适用于不是非负函数(或不讨论绝对收敛)的情况.

定理 8.2.5 若下列两个条件之一满足，则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛：

(1)(**Abel 判别法**) $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，$g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界；

(2)(**Dirichlet 判别法**) $F(A)=\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界，$g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调且 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$.

证 设 ε 是任意给定的正数.

(1)若 Abel 判别法条件满足，记 G 是 $|g(x)|$ 在 $[a,+\infty)$ 的一个上界，因为 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，由 Cauchy 收敛原理，$\exists A_0\geqslant a$，使得对任意 $A,A'\geqslant A_0$，有

$$\left|\int_A^{A'} f(x)\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{2G}.$$

因此，由积分第二中值定理，

$$\left|\int_A^{A'} f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant |g(A)| \cdot \left|\int_A^{\xi} f(x)\mathrm{d}x\right| + |g(A')| \cdot \left|\int_{\xi}^{A'} f(x)\mathrm{d}x\right|$$
$$\leqslant G\left|\int_A^{\xi} f(x)\mathrm{d}x\right| + G\left|\int_{\xi}^{A'} f(x)\mathrm{d}x\right|$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(2)若 Dirichlet 判别法条件满足,记 M 是$F(A)$在$[a,+\infty)$的一个上界.此时对任意 $A,A'\geqslant a$ 显然有

$$\left|\int_A^{A'} f(x)\mathrm{d}x\right| < 2M;$$

同时,因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$,所以存在 $\exists A_0\geqslant a$,当 $x>A_0$ 时,有

$$|g(x)| < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

于是,对任意 $A,A'\geqslant A_0$

$$\left|\int_A^{A'} f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant |g(A)| \cdot \left|\int_A^{\xi} f(x)\mathrm{d}x\right| + |g(A')| \cdot \left|\int_{\xi}^{A'} f(x)\mathrm{d}x\right|$$
$$\leqslant 2M|g(A)| + 2M|g(A')|$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

所以无论哪个判别法条件满足,由 Cauchy 收敛原理,都有 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛的结论.

证毕

这两个判别法有时也统称为 **A-D 判别法**.

例 8.2.4 讨论 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解 $\int_1^A \sin x\mathrm{d}x$ 显然有界,$\frac{1}{x}$ 单调且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$,由 Dirichlet 判别法,$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛.

但在$[1,+\infty)$,有

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \geqslant \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x},$$

因 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x}\mathrm{d}x$ 收敛(仿照上面对 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 的讨论),而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x}\mathrm{d}x$ 发散,所以 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x$ 发散.再由比较判别法,知 $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x$ 发散.

因此,$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 条件收敛.

例 8.2.5 讨论 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\arctan x}{x}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解 由例8.2.4, $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛,而 $\arctan x$ 在$[1,+\infty)$单调有界,由 Abel 判别法, $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\arctan x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛.

当 $x\in[\sqrt{3},+\infty)$时,有

$$\left|\frac{\sin x\arctan x}{x}\right|\geqslant\left|\frac{\sin x}{x}\right|,$$

由比较判别法和 $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x$ 发散,知 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\arctan x}{x}\mathrm{d}x$ 非绝对收敛.

因此, $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\arctan x}{x}\mathrm{d}x$ 条件收敛.

无界函数反常积分的收敛判别法

以上关于无穷区间反常积分的结论都可以平行地用于无界函数的反常积分,在 $f(x)$在$[a,b]$上只有一个奇点 $x=b$ 的假定下,我们列出相应结果,证明请读者自己完成.

定理 8.2.1′(Cauchy 收敛原理) 反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充分必要条件是: $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$,使得对任意 $\eta,\eta'\in(0,\delta)$有

$$\left|\int_{b-\eta}^{b-\eta'}f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

定理 8.2.3′(Cauchy 判别法) 设在$[a,b)$上恒有 $f(x)\geqslant 0$,若当 x 属于 b 的某个左邻域$[b-\eta_0,b)$时,存在正常数 K,使得

(1)有 $f(x)\leqslant\frac{K}{(b-x)^p}$,且 $p<1$,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(2)有 $f(x)\geqslant\frac{K}{(b-x)^p}$,且 $p\geqslant 1$,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

推论(Cauchy 判别法的极限形式) 设在定理 8.2.3′条件下有

$$\lim_{x\to b^-}(b-x)^p f(x)=l,$$

则

(1)若 $0\leqslant l<+\infty$且 $p<1$,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(2)若 $0<l\leqslant+\infty$且 $p\geqslant 1$,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定理 8.2.5′ 若下列两个条件之一满足,则 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛:

(1)(**Abel 判别法**) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, $g(x)$在$[a,b)$上单调有界;

(2)(**Dirichlet 判别法**) $F(\eta)=\int_a^{b-\eta} f(x)\mathrm{d}x$ 在$[a,b)$上有界,$g(x)$在$[a,b)$上单调且$\lim\limits_{x\to b-} g(x)=0$.

例 8.2.6 讨论$\int_0^{1/e}\frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln x}$的敛散性($p\in\mathbf{R}^+$).

解 这是个定号的反常积分,$x=0$是它的唯一奇点.

当$0<p<1$时,取$q=\frac{1+p}{2}\in(p,1)$,

$$\lim_{x\to 0+}\frac{x^q}{x^p|\ln x|}=0,$$

由 Cauchy 判别法的极限形式,知$\int_0^{1/e}\frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln x}$收敛.

类似地,当$p>1$时,取$q=\frac{1+p}{2}\in(1,p)$,由

$$\lim_{x\to 0+}\frac{x^q}{x^p|\ln x|}=+\infty,$$

即知$\int_0^{1/e}\frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln x}$发散.

当$p=1$时,可以直接用 Newton－Leibniz 公式求出

$$\int_0^{1/e}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=\lim_{\eta\to 0+}\ln|\ln x|\Big|_\eta^{1/e}=-\infty.$$

因此,反常积分$\int_0^{1/e}\frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln x}$当$0<p<1$时收敛,$p\geqslant 1$时发散.

(需要提醒的是,当$p\leqslant 0$时,由于$\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{x^p\ln x}=0$,只要补充定义$x=0$处的函数值为0,被积函数就是一个连续函数,因此$\int_0^{1/e}\frac{\mathrm{d}x}{x^p\ln x}$是正常积分.请读者在做习题时注意区别这类情形.)

例 8.2.7 讨论$\int_0^1\frac{1}{x^p}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$的敛散性($p<2$).

解 令$f(x)=\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$,$g(x)=x^{2-p}$.

$\forall\,\eta\in(0,1)$,有

$$\int_\eta^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_\eta^1\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x=-\int_\eta^1\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=\cos\frac{1}{x}\Big|_\eta^1,$$

所以$\int_\eta^1 f(x)\mathrm{d}x$有界;而$g(x)$显然单调,且当$p<2$时,

$$\lim_{x\to 0+}g(x)=\lim_{x\to 0+}x^{2-p}=0.$$

由无界函数反常积分的 A-D 判别法，$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 收敛.

因为当 $p<1$ 时，有

$$\left|\frac{1}{x^p}\sin\frac{1}{x}\right| < \frac{1}{x^p},$$

由比较判别法，此时 $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 绝对收敛. 而利用例 8.2.4 类似的方法可以得到，当 $1\leqslant p<2$ 时，$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 条件收敛.

事实上，若对 $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 作变量 $x=\frac{1}{t}$ 代换，就可将它化为

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{2-p}}\mathrm{d}t,$$

利用无穷区间反常积分的 A-D 判别法，可以得到同样的结果.

对两种类型反常积分并存(或多个奇点)的情况，应先将积分区间适当拆分.

例 8.2.8　讨论 $\int_0^{+\infty} \frac{x^{1-p}}{|x-1|^{p+q}}\mathrm{d}x$ 的敛散性($p,q\in\mathbf{R}$).

解　因为被积函数可能在 $x=0$ 和 $x=1$ 处无界，积分区间也无界，所以将其拆成

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{1-p}}{|x-1|^{p+q}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{p-1}\cdot(1-x)^{p+q}} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{p-1}\cdot(x-1)^{p+q}};$$

要使积分收敛，考虑奇点 $x=0$，应要求 $p-1<1$；考虑奇点 $x=1$，应要求 $p+q<1$；而当 $x\to+\infty$ 时，由于

$$\frac{1}{x^{p-1}\cdot(x-1)^{p+q}} \sim \left(\frac{1}{x^{2p+q-1}}\right),$$

由 Cauchy 判别法的极限形式，知 $2p+q-1>1$ 时积分收敛.

所以，只有当 p、q 同时满足

$$\begin{cases} p<2, \\ 2(1-p)<q<1-p, \end{cases}$$

即属于图 8.2.1 的阴影区域时，$\int_0^{+\infty} \frac{x^{1-p}}{|x-1|^{p+q}}\mathrm{d}x$ 才收敛.

上一节中已经提到，在 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的情况下，即使 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上 n 次可微，也不能导出 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 有界的结论. 作为反常积分 Cauchy 收敛原理的一个应用，下面证明，只要把条件换成"$f(x)$ 一致连续"(注意：这个条件并不比"可微"强，两者是互不包含的)，就可以得到比有界更强的结果.

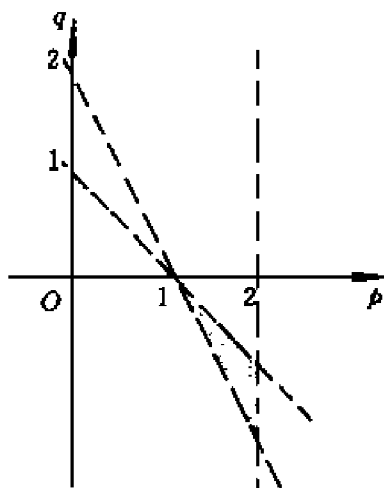


图 8.2.1

例 8.2.9 若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 一致连续，则有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

证 用反证法.

若在所给的条件下，当 $x\to+\infty$ 时 $f(x)$ 不趋于零，则由极限定义，$\exists\,\varepsilon_0>0$，$\forall\,X>a$，$\exists\,x_0>X$ 使得

$$|f(x_0)|\geqslant\varepsilon_0.$$

又因为 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 一致连续，所以对 $\frac{\varepsilon_0}{2}>0$，$\exists\,\delta_0\in(0,1)$，$\forall\,x',x''>a$，只要 $|x'-x''|<\delta_0$，就有

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

于是，对 $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon_0\delta_0}{2}>0$，$\forall\,A_0\geqslant a$，令 $X=A_0+1$，取上述使 $|f(x_0)|\geqslant\varepsilon_0$ 的点 $x_0>X$，不妨设 $f(x_0)>0$，则对任意满足 $|x-x_0|<\delta_0$ 的 x，有

$$f(x)>f(x_0)-\frac{\varepsilon_0}{2}\geqslant\frac{\varepsilon_0}{2}>0.$$

取 A 和 A' 分别等于 $x_0-\frac{\delta_0}{2}$ 和 $x_0+\frac{\delta_0}{2}$，则 $A'>A>A_0$，且有

$$\left|\int_A^{A'} f(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{x_0-\frac{\delta_0}{2}}^{x_0+\frac{\delta_0}{2}} f(x)\mathrm{d}x\right|>\frac{\varepsilon_0}{2}\delta_0=\varepsilon_1.$$

由 Cauchy 收敛原理，$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 不收敛，与题给条件矛盾.

所以,假设不成立,即 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

证毕

习 题

1. (1)证明比较判别法(定理 8.2.2).

(2)证明比较判别法的极限形式(定理 8.2.2 的推论).

(3)举例说明,当比较判别法的极限形式中 $l=0$ 或 $+\infty$ 时,$\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 的敛散可以产生各种不同的情况.

2. 证明 Cauchy 判别法及其极限形式(定理 8.2.3).

3. 讨论下列非负函数反常积分敛散性:

(1)$\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^3+\mathrm{e}^{-2x}+\ln x+1}}\mathrm{d}x$; (2)$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{1+x^3}\mathrm{d}x$;

(3)$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x|\sin x|}\mathrm{d}x$; (4)$\int_1^{+\infty}\frac{x^q}{1+x^p}\mathrm{d}x(p、q\in\mathbf{R}^+)$.

4. 证明:对非负函数 $f(x)$,(cpv)$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛与$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛是等价的.

5. 讨论下列反常积分的敛散性(包括绝对收敛、条件收敛和发散,下同):

(1)$\int_2^{+\infty}\frac{\ln\ln x}{\ln x}\sin x\mathrm{d}x$; (2)$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x(p\in\mathbf{R}^+)$;

(3)$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\arctan x}{x^p}\mathrm{d}x\ (p\in\mathbf{R}^+)$; (4)$\int_0^{+\infty}\sin(x^2)\mathrm{d}x$;

(5)$\int_a^{+\infty}\frac{p_m(x)}{q_n(x)}\sin x\mathrm{d}x$; ($p_m(x)$ 和 $q_n(x)$ 分别是 m 和 n 次多项式,

$q_n(x)$ 在 $x\in[a,+\infty)$ 范围无零点.)

6. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 只有一个奇点 $x=b$,证明定理 8.2.3′ 和定理 8.2.5′.

7. 讨论下列非负函数反常积分的敛散性:

(1)$\int_0^1\frac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}\mathrm{d}x$; (2)$\int_0^1\frac{\ln x}{x^2-1}\mathrm{d}x$;

(3)$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos^2 x\sin^2 x}\mathrm{d}x$; (4)$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos x}{x^p}\mathrm{d}x$;

(5) $\int_0^1 |\ln x|^p \mathrm{d}x$；　　(6) $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$；

(7) $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\ln x\mathrm{d}x$.

8. 讨论下列反常积分的敛散性：

(1) $\int_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}\mathrm{d}x\ (p、q\in\mathbf{R}^+)$；　　(2) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}\mathrm{d}x$；　　(4) $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p}\mathrm{d}x$；

(5) $\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{|\tan x|}}{x^p}\mathrm{d}x$；　　(6) $\int_0^{+\infty}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$；

(7) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^p+x^q}\mathrm{d}x$；　　(8) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^p|\ln x|^q}\mathrm{d}x$.

9. 讨论下列反常积分的敛散性：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x^2}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\sin 2x}{x^p}\mathrm{d}x$；

(3) $\int_1^{+\infty}\frac{x^q\sin x}{1+x^p}\mathrm{d}x\ (p\geqslant 0)$；

(4) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x\ (p\in\mathbf{R}^+)$.

10. 证明：反常积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}\mathrm{d}x$$

当 $p\leqslant\frac{1}{2}$ 时发散，$\frac{1}{2}<p\leqslant 1$ 时条件收敛，$p>1$ 时绝对收敛.

11. 设 $f(x)$ 单调，且 $x\to 0+$ 时 $f(x)\to+\infty$，证明：$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的必要条件是 $\lim\limits_{x\to 0+}xf(x)=0$.

12. 设 $f(x)$ 单调下降且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，证明：若 $f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，则反常积分 $\int_0^{+\infty}f'(x)\sin^2 x\mathrm{d}x$ 收敛.

13. 若 $\int_0^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则称 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ **平方可积**. 类似可导出无界函数在 $[a,b]$ 上平方可积的概念.

(1) 对两种反常积分分别探讨 $f(x)$ 平方可积与 $f(x)$ 的反常积分本身收

敛之间的关系.

(2)对无穷区间的反常积分,举例说明,平方可积与绝对收敛互不包含.

(3)对无界函数的反常积分,证明:平方可积必定绝对收敛,但逆命题不成立.

索 引

（名词后面所标数字分别为首次出现的章和节）

内容提要

本书是教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果，是面向21世纪课程教材。本书是以复旦大学数学系近20年中陆续多次出版的《数学分析》为基础，为适应数学教学面向21世纪进行改革的需要而编写的。结合了多年来教学实践的经验体会，从体系、内容、观点、方法和处理上，对教材作了有益的改革。

全书分上、下两册出版。

上册内容包括：集合与映射、数列极限、函数极限与连续函数、微分、微分中值定理及其应用、不定积分、定积分、反常积分等八章。

下册内容包括：数项级数、函数项级数、Euclid空间上的极限和连续、多元函数的微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、含参变量积分、Fourier级数等八章。

本书可以作为高等院校数学专业数学分析课程的教科书，也可供其他有关专业适用。

责任编辑　徐　刚
封面设计　张　楠
责任绘图　朱　静
责任印制　陈伟光

目　　录

第九章　数项级数

早在大约公元前450年，古希腊有一位名叫Zeno的学者，曾提出若干个在数学发展史上产生过重大影响的悖论，"Achilles(传说中的希腊英雄)追赶乌龟"即是其中较为著名的一个.

设乌龟在Achilles前面S_1米处向前爬行，Achilles在后面追赶，当Achilles花了t_1秒时间，跑完S_1米时，乌龟已向前爬了S_2米；当Achilles再花t_2秒时间，跑完S_2米时，乌龟又向前爬了S_3米……这样的过程可以一直继续下去，因此Achilles永远也追不上乌龟.

显然，这一结论完全有悖于常识，是绝对荒谬的.没有人会怀疑，Achilles必将在某一T秒时间内，跑了S米后追上乌龟(T和S是常数).Zeno的诡辩之处就在于把有限的时间T(或距离S)分割成无穷段$t_1,t_2,\cdots$(或$S_1,S_2,\cdots$)，然后一段一段地加以叙述，从而造成一种假象：这样"追—爬—追—爬"的过程将随时间的流逝而永无止境.事实上，如果将花掉的时间$t_1,t_2,\cdots$(或跑过的距离$S_1,S_2,\cdots$)加起来，即

$$t_1+t_2+\cdots+t_n+\cdots(\text{或 } S_1+S_2+\cdots+S_n+\cdots),$$

尽管相加的项有无限个，但它们的和却是有限数T(或S).换言之，经过时间T秒，Achilles跑完S米后，他已经追上乌龟了.

这里，我们遇到了无限个数相加的问题.很自然地，我们要问，这种"无限个数相加"是否一定有意义？若不一定的话，那么怎么来判别？有限个数相加时的一些运算法则，如加法交换律、加法结合律对于无限个数相加是否继续有效？如此等等.这正是本章要讨论的数项级数的一些概念.

§1　数项级数的收敛性

数项级数

设$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$是可列无穷个实数，我们称它们的"和"

$$x_1+x_2+\cdots+x_n+\cdots$$

为**数项级数**(**简称级数**)，记为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$，其中$x_n$称为级数的**通项**或**一般项**.

当然，我们无法直接对无穷多个实数逐一地进行加法运算，所以必须对上述的级数求和给出合理的定义.为此构作级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$的"**部分和数列**"$\{S_n\}$：

$$S_1=x_1,$$
$$S_2=x_1+x_2,$$

……

$$S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k,$$

……

定义9.1.1　如果部分和数列$\{S_n\}$收敛于有限数S，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$收敛，且称它的和为S，记为

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} x_n;$$

如果部分和数列$\{S_n\}$发散，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$发散.

由上述定义可知，只有当级数收敛时，无穷多个实数的加法才是有意义的，并且它们的和就是级数的部分和数列的极限. 所以，级数的收敛与数列的收敛本质上是一回事.

例 9.1.1　设$|q| < 1$，则几何级数(即等比级数)

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots$$

是收敛的. 这是因为它的部分和数列的通项为

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{1-q^n}{1-q},$$

显然，

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}.$$

现在我们来回答本章开头提出的 Achilles 追赶乌龟的问题.

设乌龟的速度v_1米/秒与 Achilles 的速度v_2米/秒之比为$q = \frac{v_1}{v_2}$，$0 < q < 1$. Achilles 在乌龟后面S_1米处开始追赶乌龟. 当 Achilles 跑完S_1米时，乌龟已向前爬了$S_2 = qS_1$米；当 Achilles 继续跑完S_2米时，乌龟又向前爬了$S_3 = q^2 S_1$米…… 当 Achilles 继续跑完S_n米时，乌龟又向前爬了$S_{n+1} = q^n S_1$米…… 显然 Achilles 要追赶上乌龟，必须跑完上述无限段路程$S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$，由于

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 + \cdots + S_n + \cdots &= S_1(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + \cdots) \\ &= \frac{S_1}{1-q}, \end{aligned}$$

即我们在前面所说的，这无限段路程的和却是有限的，也就是说，当 Achilles 跑完路程$S = \frac{S_1}{1-q}$米(即经过了时间$T = \frac{S_1}{(1-q)v_2}$秒)，他已经追上了乌龟.

例 9.1.2 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}=1-1+1-\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$$

是发散的.这是因为它的部分和数列的通项为

$$S_n=\begin{cases}0, & n\text{ 为偶数},\\ 1, & n\text{ 为奇数},\end{cases}$$

显然 $\{S_n\}$ 是发散的.

当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛时,我们还可以构作它的"**余和数列**"$\{r_n\}$,其中

$$r_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}x_k=x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots,$$

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n=S$,则 $r_n=S-S_n$,显然,这时 $\{r_n\}$ 收敛于 0.

级数的基本性质

可以由数列的性质平行地导出级数的一些性质.

定理 9.1.1(级数收敛的必要条件) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛,则其通项所构成的数列 $\{x_n\}$ 是无穷小量,即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=0.$$

证 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n=S$,则对 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$,成立

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=S,$$

于是得到,

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=0.$$

证毕

定理 9.1.1 可以用来判断某些级数发散.例如,当 $|q|\geqslant 1$ 时 $\{q^n\}$ 不是无穷小量,因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^n$ 发散.

要注意的是,定理 9.1.1 只是级数收敛的必要条件,而非充分条件.换言之,数列 $\{x_n\}$ 为无穷小量并不能保证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛.例如,虽然数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 是无穷小量,但根据例 2.4.7,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$(称为**调和级数**)却是发散的.

定理 9.1.2(线性性) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=A$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=B$,$\alpha,\beta$ 是两个常数,则

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)=\alpha A+\beta B.$$

证 设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的部分和数列为$\{S_n^{(1)}\}$，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$的部分和数列为$\{S_n^{(2)}\}$，则对$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)$的部分和数列$\{S_n\}$有

$$S_n=\alpha S_n^{(1)}+\beta S_n^{(2)},$$

于是成立

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\alpha\lim_{n\to\infty}S_n^{(1)}+\beta\lim_{n\to\infty}S_n^{(2)}=\alpha A+\beta B.$$

证毕

定理 9.1.2 表示对收敛级数可以进行加法和数乘运算.

例 9.1.3 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n+1}-3\cdot 2^n}{5^n}$的值.

解 因为几何级数$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n$与$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n$都收敛，所以有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n+1}-3\cdot 2^n}{5^n}=\frac{16}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n-\frac{6}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$$=\frac{16}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{5}}-\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{5}}=14.$$

定理 9.1.3 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$收敛，则在它的求和表达式中任意添加括号后所得的级数仍然收敛，且其和不变.

证 设$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$添加括号后表示为

$$(x_1+x_2+\cdots+x_{n_1})+(x_{n_1+1}+x_{n_1+2}+\cdots+x_{n_2})+\cdots+$$
$$(x_{n_{k-1}+1}+x_{n_{k-1}+2}+\cdots+x_{n_k})+\cdots,$$

令

$$y_1=x_1+x_2+\cdots+x_{n_1},$$
$$y_2=x_{n_1+1}+x_{n_1+2}+\cdots+x_{n_2},$$
$$\cdots\cdots$$
$$y_k=x_{n_{k-1}+1}+x_{n_{k-1}+2}+\cdots+x_{n_k},$$
$$\cdots\cdots$$

则$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$按上面方式添加括号后所得的级数为$\sum_{n=1}^{\infty}y_n$. 令$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$的部分和数列

为$\{S_n\}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ 的部分和数列为$\{U_n\}$，则

$$U_1 = S_{n_1},$$
$$U_2 = S_{n_2},$$
$$\cdots\cdots$$
$$U_k = S_{n_k},$$
$$\cdots\cdots$$

显然$\{U_n\}$是$\{S_n\}$的一个子列，于是由$\{S_n\}$的收敛性即得到$\{U_n\}$的收敛性，且极限相同.

证毕

定理 9.1.3 可以理解为收敛的级数满足加法结合律.

在极限论中我们已经知道，一个数列的某个子列收敛并不能保证数列本身收敛. 因此，相应地，在一个级数的和式中，添加了括号后所得的级数收敛并不能保证原来的级数收敛，即上面的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ 收敛并不能保证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛.

例 9.1.4 我们已知例 9.1.2 中的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - \cdots + (-1)^{n-1} + \cdots$$

是发散的. 但若在每两项之间加上括号，则有

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots = 0+0+\cdots+0+\cdots = 0,$$

即添加了括号后所得的级数是收敛的.

更有甚者，对一个发散的级数，若按不同的方式加括号，所得的级数可能收敛于不同的极限. 仍以

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - \cdots + (-1)^{n-1} + \cdots$$

为例，除了上面的加括号方式外，还可以有

$$\begin{aligned}&1+(-1+1)+(-1+1)+\cdots+(-1+1)+\cdots\\&=1+0+0+\cdots+0+\cdots=1\end{aligned}$$

的不同结果.

这就是说，发散的级数不满足加法结合律.

例 9.1.5 计算机进行计算时所处理的数据都是二进制的，求二进制无限循环小数$(110.110\,110\cdots)_2$的值.

解 $(110.110\,110\cdots)_2$

$$= 2^2 + 2^1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^8} + \cdots,$$

设上述级数的部分和数列为$\{S_n\}$,则

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2^{3k-5}} + \frac{1}{2^{3k-4}}\right) = 6\frac{6}{7}\left[1 - \left(\frac{1}{8}\right)^n\right],$$

$$S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2^{3n-2}},$$

令 $n \to \infty$,得

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 6\frac{6}{7},$$

即二进制无限循环小数$(110.110\ 110\cdots)_2$的值为$6\frac{6}{7}$.

例 9.1.6　一慢性病人需每天服用某种药物,按医嘱每天服用 0.05 mg,设体内的药物每天有 20% 通过各种渠道排泄掉,问长期服药后体内药量维持在怎样的水平?

解　服药第一天,病人体内药量为 0.05 mg;服药第二天,病人体内药量为 $0.05(1-20\%)+0.05 = 0.05\left(1+\frac{4}{5}\right)$mg;服药第三天,病人体内药量为 $[0.05(1-20\%)+0.05](1-20\%)+0.05 = 0.05\left[1+\frac{4}{5}+\left(\frac{4}{5}\right)^2\right]$mg;⋯.

按此推下去,长期服药后,体内药量近似为

$$0.05\left[1+\frac{4}{5}+\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^3+\cdots\right](\text{mg})$$

$$= 0.05\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n(\text{mg}) = 0.25(\text{mg}).$$

在实际病例中,医生往往根据病人的病情,考虑体内药量水平的需求,确定病人每天的服药量(见习题 4).

例 9.1.7　计算级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$.

解　设级数的部分和数列为$\{S_n\}$,则

$$S_n = 2S_n - S_n = 2\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{2k+1}{2^k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^{k-1}} - \frac{2n-1}{2^n},$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 3.$$

例9.1.8 计算级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{2n^2}$.

解 利用公式

$$\arctan x - \arctan y = \arctan \frac{x-y}{1+xy},$$

可得

$$\arctan \frac{1}{2n^2} = \arctan \frac{1}{2n-1} - \arctan \frac{1}{2n+1},$$

于是关于级数的部分和有

$$S_n = \arctan 1 - \arctan \frac{1}{2n+1},$$

令 $n \to \infty$,即得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{2n^2} = \frac{\pi}{4}.$$

习 题

1. 讨论下列级数的敛散性.如果收敛,试求出级数之和.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n+1}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$; (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right)$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$; (6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}+4^{n+1}}{3^{2n}}$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$; (8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3^n}$;

(9) $\sum_{n=1}^{\infty} q^n \cos nx (|q| < 1)$.

2. 确定 x 的范围,使下列级数收敛.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-x)^n}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{nx}$; (3) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$.

3. 求八进制无限循环小数$(36.073\,607\,360\,7\cdots)_8$的值.

4. 一慢性病人需长期服药,按照病情,体内药量需维持在0.2 mg,设体内药物每天有15% 通过各种渠道排泄掉,问该病人每天的服药量应该为多少?

§2 上极限与下极限

数列的上极限和下极限

研究级数的敛散性常常需要借助于某些数列,但这些数列本身却不一定收敛,因而有必要引进比"极限存在"稍弱一些、并在一定程度上反映其变化规律的新概念.

Bolzano-Weierstrass 定理告诉我们,有界数列必有收敛子列.这启示我们,对不存在极限的数列,可以用它的子列的极限情况在一定程度上来刻画它本身的变化情况.

先考虑有界的情况.

定义 9.2.1 在有界数列 $\{x_n\}$ 中,若存在它的一个子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi,$$

则称 ξ 为数列 $\{x_n\}$ 的一个**极限点**.

显然,"ξ 是数列 $\{x_n\}$ 的极限点"也可以等价地表述为:"$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \{x_n\}$ 中的无穷多个项属于 ξ 的 ε 邻域".

记

$$E = \{\xi \mid \xi \text{ 是 } \{x_n\} \text{ 的极限点}\},$$

则 E 显然是非空的有界集合,因此,E 的上确界 $H = \sup E$ 和下确界 $h = \inf E$ 存在.

定理 9.2.1 E 的上确界 H 和下确界 h 均属于 E,即

$$H = \max E, \quad h = \min E.$$

证 由 $H = \sup E$,可知存在 $\xi_k \in E (k = 1,2,\cdots)$,使

$$\lim_{k\to\infty} \xi_k = H.$$

取 $\varepsilon_k = \dfrac{1}{k} (k = 1,2,\cdots)$.

因为 ξ_1 是 $\{x_n\}$ 的极限点,所以在 $O(\xi_1,\varepsilon_1)$ 中有 $\{x_n\}$ 的无穷多个项,取 $x_{n_1} \in O(\xi_1,\varepsilon_1)$;

因为 ξ_2 是 $\{x_n\}$ 的极限点,所以在 $O(\xi_2,\varepsilon_2)$ 中有 $\{x_n\}$ 的无穷多个项,可以取 $n_2 > n_1$,使 $x_{n_2} \in O(\xi_2,\varepsilon_2)$;

……

因为 ξ_k 是 $\{x_n\}$ 的极限点,所以在 $O(\xi_k,\varepsilon_k)$ 中有 $\{x_n\}$ 的无穷多个项,可以取 $n_k > n_{k-1}$,使 $x_{n_k} \in O(\xi_k,\varepsilon_k)$;

……

这么一直做下去,便得到 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$,满足

$$|x_{n_k}-\xi_k|<\frac{1}{k},$$

于是有

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=\lim_{k\to\infty}\xi_k=H.$$

由定义 9.2.1,H 是$\{x_n\}$ 的极限点,也就是说,$H\in E$.

同理可证 $h\in E$.

证毕

定义 9.2.2 E 的最大值$H=\max E$ 称为数列$\{x_n\}$ 的**上极限**,记为

$$H=\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n;$$

E 的最小值$h=\min E$ 称为数列$\{x_n\}$ 的**下极限**,记为

$$h=\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n.$$

定理9.2.2 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.收敛的充分必要条件是

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n.$$

证 若$\{x_n\}$ 是收敛的,则它的任一子列收敛于同一极限(定理 2.4.4),因而此时 E 中只有一个元素,于是成立

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n.$$

若$\{x_n\}$ 不收敛,则至少存在它的两个子列收敛于不同极限,因此有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n>\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n.$$

证毕

由于一个无上界(下界)数列中必有子列发散至正(负)无穷大,仍按上述思路,即可将极限点的定义扩充为

定义 9.2.1′ 在数列$\{x_n\}$ 中,若存在它的一个子列$\{x_{n_k}\}$ 使得

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=\xi(-\infty\leqslant\xi\leqslant+\infty),$$

则称 ξ 为数列$\{x_n\}$ 的一个**极限点**.

"$\xi=+\infty$(或 $-\infty$)是$\{x_n\}$ 的极限点"也可以等价地表述为:"$\forall G>0$,$\exists\{x_n\}$ 中的无穷多个项,使得 $x_n>G$(或 $x_n<-G$)."

当 $\xi=+\infty$(或 $-\infty$)是$\{x_n\}$ 的极限点时,我们定义 $\sup E=+\infty$(或 $\inf E=-\infty$),则定理 9.2.1 依然成立,而定理 9.2.2 只要改为

定理 9.2.2′ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在(有限数、$+\infty$ 或 $-\infty$)的充分必要条件是

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n.$$

请读者自行思考.

例 9.2.1 求数列$\left\{x_n=\cos\dfrac{2n\pi}{5}\right\}$ 的上极限与下极限.

解 因为 $x_{5n-4} = x_{5n-1} = \cos\frac{2\pi}{5}, x_{5n-3} = x_{5n-2} = -\cos\frac{\pi}{5}, x_{5n} = 1$，所以 $\{x_n\}$ 的最大极限点是 1，最小极限点是 $-\cos\frac{\pi}{5}$，即

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 1, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = -\cos\frac{\pi}{5}.$$

例9.2.2 求数列 $\{x_n = n^{(-1)^n}\}$ 的上极限与下极限.

解 此数列为

$$1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 6, \frac{1}{7}, 8, \cdots,$$

它没有上界，因而 $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = +\infty$.

又由 $x_n > 0$ 且 $\{x_{2n-1}\}$ 的极限为 0，即知

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 0.$$

例9.2.3 求数列 $\{x_n = -n\}$ 的上极限与下极限.

解 由于 $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$，因而

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$

为了以后讨论问题的方便，先证明一个有用的结论.

定理 9.2.3 *(1) 设 $H = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$ 是有限实数，则对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $N > 0$，使得*

$$x_n < H + \varepsilon$$

对一切 $n > N$ 成立.

(2) 设 $h = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n$ 是有限实数，则对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $N > 0$，使得

$$x_n > h - \varepsilon$$

对一切 $n > N$ 成立.

证 由于 H 是 $\{x_n\}$ 的最大极限点，因此 $\forall \varepsilon > 0$，在区间 $[H+\varepsilon, +\infty)$ 上至多只有 $\{x_n\}$ 中的有限项(请读者考虑为什么). 设这有限项中足标最大的为 n_0，显然，只要取 $N = n_0$，当 $n > N$ 时，必有

$$x_n < H + \varepsilon.$$

这就证明了(1).

同理可证(2).

证毕

上极限和下极限的运算

数列的上极限和下极限的运算一般不再具有数列极限运算的诸如“和差

积商的极限等于极限的和差积商"之类的好性质. 例如设 $x_n = (-1)^n, y_n = (-1)^{n+1}$, 则 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n = 2$, 而 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n + y_n) = 0$, 两者并不相等. 但我们还是可以得到下述关系.

定理 9.2.4 设 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 是两数列, 则

(1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n + y_n) \leqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n$,

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n + y_n) \geqslant \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n + \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n$;

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 则

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n$,

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n$.

(要求上述诸式的右端不是待定型, 即不为 $(+\infty) + (-\infty)$ 等.)

证 我们只给出(1)与(2)中第一式的证明, 并假定式中出现的上极限是有限数(上极限是 $+\infty$ 或 $-\infty$ 的情况留给读者自证).

记 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = H_1, \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n = H_2$.

由定理 9.2.3, 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 必存在 $N > 0$, 对一切 $n > N$ 成立

$$x_n < H_1 + \varepsilon, \quad y_n < H_2 + \varepsilon,$$

即

$$x_n + y_n < H_1 + H_2 + 2\varepsilon,$$

所以

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n + y_n) \leqslant H_1 + H_2 + 2\varepsilon,$$

由 ε 的任意性, 即得到

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n + y_n) \leqslant H_1 + H_2 = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n.$$

这就是(1)的第一式.

若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 则由(1)的第一式,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} y_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}[(x_n + y_n) - x_n] \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n + y_n) + \overline{\lim_{n\to\infty}}(-x_n),$$

此式即为

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n + y_n) \geqslant \lim_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n.$$

将上式结合

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n + y_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n,$$

即得到(2)的第一式.

证毕

定理 9.2.5 设 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 是两数列,

(1) 若 $x_n \geqslant 0, y_n \geqslant 0$, 则

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_ny_n) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty}x_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty}y_n,$$

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_ny_n) \geqslant \varliminf_{n\to\infty}x_n \cdot \varliminf_{n\to\infty}y_n;$$

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = x, 0 < x < +\infty$, 则

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_ny_n) = \lim_{n\to\infty}x_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty}y_n,$$

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_ny_n) = \lim_{n\to\infty}x_n \cdot \varliminf_{n\to\infty}y_n.$$

(要求上述诸式的右端不是待定型,即不为 $0\cdot(+\infty)$ 等.)

证 我们只给出(2)的第一式的证明,并假定 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}y_n$ 是有限数.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = x, 0 < x < +\infty$,可知对任意给定的 $\varepsilon(0 < \varepsilon < x)$,存在 $N_1 > 0$,对一切 $n > N_1$ 成立

$$0 < x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon,$$

记 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}y_n = H_2$,由定理 9.2.3,对上述 $\varepsilon(0 < \varepsilon < x)$,存在 $N_2 > 0$,对一切 $n > N_2$ 成立

$$y_n < H_2 + \varepsilon,$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$,则当 $n > N$ 时,成立

$$x_ny_n < \max\{(x-\varepsilon)(H_2+\varepsilon), (x+\varepsilon)(H_2+\varepsilon)\},$$

于是有

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_ny_n) \leqslant \max\{(x-\varepsilon)(H_2+\varepsilon), (x+\varepsilon)(H_2+\varepsilon)\},$$

由 ε 的任意性,即得到

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_ny_n) \leqslant xH_2 = \lim_{n\to\infty}x_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty}y_n.$$

由于

$$\varlimsup_{n\to\infty}y_n = \varlimsup_{n\to\infty} = \left[(x_ny_n)\cdot\frac{1}{x_n}\right] \leqslant \varlimsup_{n\to\infty}(x_ny_n)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n},$$

此即

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_ny_n) \geqslant \lim_{n\to\infty}x_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty}y_n,$$

两式结合即得到(2)的第一式.

证毕

注意在定理 9.2.4 中,若条件改变的话,则给出的关系式也将作相应的改变.例如,在(1)中将条件改为 $x_n \leqslant 0, y_n \geqslant 0$,在(2)中将条件改为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = x, -\infty < x < 0$,请读者考虑关系式将如何改变.因此,在对上极限和下极限进行运算时必须非常小心.

数列的上极限与下极限也可如下定义.

设 $\{x_n\}$ 是一个有界数列,令

$$b_n = \sup\{x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots\} = \sup_{k>n}\{x_k\};$$

$$a_n = \inf\{x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots\} = \inf_{k>n}\{x_k\};$$

则$\{a_n\}$是单调增加有上界的数列，$\{b_n\}$是单调减少有下界的数列，因此数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$都收敛.

记

$$H^* = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\sup_{k>n}\{x_k\},$$

$$h^* = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\inf_{k>n}\{x_k\}.$$

当数列$\{x_n\}$无上界而有下界时，则对一切$n\in \mathbf{N}^+$，$b_n = +\infty$，我们定义

$$H^* = +\infty.$$

这时数列$\{a_n\}$单调增加，但也可能没有上界. 如果$h^* = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$，则由

$$a_{n-1} \leqslant x_n \leqslant b_{n-1},$$

可知$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

当数列$\{x_n\}$无下界而有上界时，则对一切$n\in \mathbf{N}^+$，$a_n = -\infty$，我们定义

$$h^* = -\infty.$$

这时数列$\{b_n\}$单调减少，但也可能没有下界. 如果$H^* = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$，则由

$$a_{n-1} \leqslant x_n \leqslant b_{n-1},$$

可知$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

当数列$\{x_n\}$既无上界又无下界时，则对一切$n\in \mathbf{N}^+$，$a_n = -\infty$，$b_n = +\infty$，我们定义

$$H^* = +\infty, \quad h^* = -\infty.$$

所以，对于任意实数数列，尽管其极限可以不存在，但H^*与h^*总是存在的（有限数或$+\infty$或$-\infty$），且成立

$$h^* \leqslant H^*.$$

关于这一定义与定义 9.2.1 的等价性，我们有下述定理：

定理 9.2.6　H^*是$\{x_n\}$的最大极限点，h^*是$\{x_n\}$的最小极限点.

证　首先证明，$\{x_n\}$的任意一个极限点ξ（有限数或$+\infty$或$-\infty$）满足

$$h^* \leqslant \xi \leqslant H^*.$$

设$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$，则对一切$k\in \mathbf{N}^+$，成立

$$a_{n_k-1} \leqslant x_{n_k} \leqslant b_{n_k-1},$$

由$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = h^*$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = H^*$与$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$，得到

$$h^* \leqslant \xi \leqslant H^*.$$

其次证明，存在$\{x_n\}$的子列$\{x_{n_k}\}$与$\{x_{m_k}\}$，使得

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = H^*, \quad \lim_{k\to\infty} x_{m_k} = h^*.$$

设$\{x_n\}$的上极限H与下极限h都是有限数，取$\varepsilon_k = \dfrac{1}{k}$，$k = 1,2,3,\cdots$.

对$\varepsilon_1 = 1$，由$b_1 = \sup\limits_{i>1}\{x_i\}$，$\exists n_1$：$b_1 - 1 < x_{n_1} \leqslant b_1$；

对 $\epsilon_2=\dfrac{1}{2}$，由 $b_{n_1}=\sup\limits_{i>n_1}\{x_i\}$，$\exists\, n_2>n_1$：$b_{n_1}-\dfrac{1}{2}<x_{n_2}\leqslant b_{n_1}$；

……

对 $\epsilon_{k+1}=\dfrac{1}{k+1}$，由 $b_{n_k}=\sup\limits_{i>n_k}\{x_i\}$，$\exists\, n_{k+1}>n_k$：$b_{n_k}-\dfrac{1}{k+1}<x_{n_{k+1}}\leqslant b_{n_k}$；

……

令 $k\to\infty$，由数列极限的夹逼性，得到

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=\lim_{k\to\infty}b_{n_k}=\lim_{n\to\infty}b_n=H^*.$$

同理可证存在子列 $\{x_{m_k}\}$，使 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{m_k}=h^*$.

若 $\{x_n\}$ 无上界，即 $H^*=+\infty$，则显然存在子列 $\{x_{n_k}\}$ 是正无穷大量，即 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=H^*=+\infty$；若 $H^*=-\infty$，前面已经指出 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=H^*=-\infty$；若 $\{x_n\}$ 无下界，即 $h^*=-\infty$，则显然存在子列 $\{x_{m_k}\}$ 是负无穷大量，即 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{m_k}=h^*=-\infty$；若 $h^*=+\infty$，前面也已经指出 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=h^*=+\infty$.

证毕

所以，

$$H^*=\max E=\varlimsup_{n\to\infty}x_n,\quad h^*=\min E=\varliminf_{n\to\infty}x_n.$$

习　　题

1. 求下列数列的上极限与下极限：

(1) $x_n=\dfrac{n}{2n+1}\cos\dfrac{2n\pi}{5}$；　　(2) $x_n=n+(-1)^n\dfrac{n^2+1}{n}$；

(3) $x_n=-n[(-1)^n+2]$；　　(4) $x_n=\sqrt[n]{n+1}+\sin\dfrac{n\pi}{3}$；

(5) $x_n=2(-1)^{n+1}+3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

2. 证明：

(1) $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(-x_n)=-\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n$；　(2) $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(cx_n)=\begin{cases}c\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n, & c>0,\\ c\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n, & c<0.\end{cases}$

3. 证明：

(1) $\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)\geqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n+\varliminf\limits_{n\to\infty}y_n$；

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，则

$\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n+\varliminf\limits_{n\to\infty}y_n$.

4. 证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，$-\infty<x<0$，则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n) = \lim_{n\to\infty}x_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}}y_n,$$
$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n) = \lim_{n\to\infty}x_n \cdot \underline{\lim_{n\to\infty}}y_n.$$

§3 正项级数

正项级数

§1 中 Achilles 追乌龟的路程所构成的级数 $S_1(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}+\cdots)$，例 9.1.6 中的级数 $0.05\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n$ 及我们经常会遇到的 **p 级数** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$，均有一个明显的特征：它们的各个项都是正数.

这是一类很特殊的级数.

定义 9.3.1 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 的各项都是非负实数，即

$$x_n \geqslant 0, \quad n = 1,2,3,\cdots,$$

则称此级数为**正项级数**.

显然，正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 是单调增加的，即

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n+1}x_k = S_{n+1}, \quad n = 1,2,3\cdots,$$

根据单调数列的性质，立刻可以得到

定理 9.3.1（正项级数的收敛原理） 正项级数收敛的充分必要条件是它的部分和数列有上界.

若正项级数的部分和数列无上界，则其必发散到 $+\infty$.

例 9.3.1 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 是正项级数. 根据例 2.4.7 的结论，当 $p>1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛；当 $p\leqslant 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散到 $+\infty$.

下面我们就如何判断一般正项级数收敛与否的问题作深入讨论.

比较判别法

判断一个正项级数是否收敛，最常用的方法是用一个已知收敛或发散的级数与它进行比较.

定理 9.3.2（比较判别法） 设 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ 是两个正项级数，若存在常数 $A>0$，成立

$$x_n \leqslant Ay_n, \quad n = 1,2,3\cdots,$$

则

(1) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 也收敛；

(2) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 也发散.

证 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 的部分和数列为 $\{T_n\}$，则显然有

$$S_n \leqslant AT_n, \quad n = 1,2,3\cdots.$$

于是当 $\{T_n\}$ 有上界时，$\{S_n\}$ 也有上界，而当 $\{S_n\}$ 无上界时，$\{T_n\}$ 必定无上界.

证毕

注 由于改变级数有限个项的数值，并不会改变它的收敛性或发散性(虽然在收敛的情况下可能改变它的"和")，所以定理 9.3.2 的条件可放宽为："存在自然数 N 与常数 $A > 0$，使得 $x_n \leqslant Ay_n$ 对一切 $n > N$ 成立."

例 9.3.2 判断正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{2n^3-n}$ 的敛散性.

解 容易看出当 $n > 3$ 时，成立

$$\frac{n+3}{2n^3-n} < \frac{1}{n^2},$$

于是由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的收敛性，可知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{2n^3-n}$ 收敛.

例 9.3.3 判断正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{n}$ 的敛散性.

解 当 $n \geqslant 2$ 时，$\frac{\pi}{n} \in [0, \frac{\pi}{2}]$，因而有不等式

$$\sin\frac{\pi}{n} \geqslant \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{n} = \frac{2}{n},$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 是发散的，可知 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{n}$ 发散.

下述定理是定理 9.3.2 的极限形式，它在使用上更为方便.

定理 9.3.2′(比较判别法的极限形式) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 是两个正项级数，如果 x_n 与 y_n 是同阶无穷小量，即

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l \quad (0 < l < +\infty),$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 同时收敛或同时发散.

证 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=l$，取 $\varepsilon=\frac{l}{2}$，则存在自然数 N，当 $n>N$ 时，

$$\frac{1}{2}ly_n<x_n<\frac{3}{2}ly_n,$$

由定理 9.3.2，即得所需结论.

证毕

在例 9.3.2 中，$\frac{n+3}{2n^3-n}\sim\frac{1}{2n^2}(n\to\infty)$，在例 9.3.3 中，$\sin\frac{\pi}{n}\sim\frac{\pi}{n}(n\to\infty)$，利用定理 9.3.2′ 立刻就可得出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{2n^3-n}$ 收敛与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n}$ 发散的结论.

读者可考虑当 $l=0$ 或 $+\infty$ 时，定理 9.3.2′ 的结论是如何的.

例 9.3.4 判断正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{n^2}}-\cos\frac{\pi}{n}\right)$ 的敛散性.

解

$$\begin{aligned}e^{\frac{1}{n^2}}-\cos\frac{\pi}{n}&=\left[1+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\\&=\left(1+\frac{\pi^2}{2}\right)\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),\end{aligned}$$

因而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n^2}}-\cos\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^2}}=1+\frac{\pi^2}{2}.$$

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛即知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{n^2}}-\cos\frac{\pi}{n}\right)$ 收敛.

Cauchy 判别法与 D′Alembert 判别法

用比较判别法时，先要对所考虑的级数的收敛性有一个大致估计，进而找一个敛散性已知的合适级数与之相比较. 但就绝大多数情况而言，这两个步骤都具有相当难度，甚至根本无法做到. 看来，理想的判别方法似应着眼于对级数自身元素的分析.

等比的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^n(q>0)$ 给我们以很重要的启示. 众所周知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^n$ 的敛散性只依赖于其后项与前项之比，即公比 q 是否小于 1. 直观地类比一下，容易想象，若一个级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 的后项与前项之比 $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ 或前 n 个项的"平均公比" $\sqrt[n]{x_n}$（设 $x_0=1$，则 $\sqrt[n]{x_n}=\sqrt[n]{\frac{x_1}{x_0}\cdot\frac{x_2}{x_1}\cdot\cdots\cdot\frac{x_n}{x_{n-1}}}$）存在小于（或大于）1

的极限,这个级数应该是收敛(或发散)的.若它们的极限不存在,那么可以通过讨论其上(下)极限来得到类似的结论.正是基于这样的思路,产生了如下的 Cauchy 判别法与 D'Alembert 判别法.

定理 9.3.3(Cauchy 判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 是正项级数,$r = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$,则

(1) 当 $r < 1$,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛;

(2) 当 $r > 1$,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散;

(3) 当 $r = 1$,判别法失效,即级数可能收敛,也可能发散.

证 当 $r < 1$ 时,取 q 满足 $r < q < 1$,由定理 9.2.3,可知存在 N,对一切 $n > N$,成立

$$\sqrt[n]{x_n} < q,$$

从而

$$x_n < q^n, \quad 0 < q < 1.$$

由定理 9.3.2 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛.

当 $r > 1$,由于 r 是数列 $\{\sqrt[n]{x_n}\}$ 的极限点,可知存在无穷多个 n 满足 $\sqrt[n]{x_n} > 1$,这说明数列 $\{x_n\}$ 不是无穷小量,从而 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散.

对于 $r = 1$,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 的敛散性说明判别法失效.

证毕

例 9.3.5 判断正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3[\sqrt{2}+(-1)^n]^n}{3^n}$ 的敛散性.

解

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3[\sqrt{2}+(-1)^n]^n}{3^n}} = \frac{\sqrt{2}+1}{3} < 1,$$

由定理 9.3.3,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3[\sqrt{2}+(-1)^n]^n}{3^n}$ 收敛.

定理 9.3.4(D'Alembert 判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n (x_n \neq 0)$ 是正项级数,则

(1) 当 $\varlimsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \bar{r} < 1$,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛;

(2) 当 $\varliminf_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \underline{r} > 1$,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散;

(3) 当 $\bar{r} \geqslant 1$ 或 $\underline{r} \leqslant 1$，判别法失效，即级数可能收敛，也可能发散.

定理 9.3.4 的证明包含在下述引理中.

引理 9.3.1 设 $\{x_n\}$ 是正项数列，则

$$\varliminf_{n \to \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant \varliminf_{n \to \infty} \sqrt[n]{x_n} \leqslant \varlimsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{x_n} \leqslant \varlimsup_{n \to \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

证 设

$$\bar{r} = \varlimsup_{n \to \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n},$$

由定理 9.2.3，对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 N，对一切 $n > N$，成立

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < \bar{r} + \varepsilon.$$

于是

$$x_n < (\bar{r} + \varepsilon)^{n-N-1} \cdot x_N \quad (n > N),$$

从而

$$\varlimsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{x_n} \leqslant \varlimsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{(\bar{r} + \varepsilon)^{n-N-1} \cdot x_N} = \bar{r} + \varepsilon,$$

由 ε 的任意性，即得到

$$\varlimsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{x_n} \leqslant \bar{r} = \varlimsup_{n \to \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

读者可以按类似的思路，自己证明

$$\varliminf_{n \to \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant \varliminf_{n \to \infty} \sqrt[n]{x_n}.$$

证毕

例 9.3.6 判断正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n \cdot n!}$ 的敛散性.

解 令 $x_n = \frac{n^n}{3^n \cdot n!}$，则

$$\varlimsup_{n \to \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \varlimsup_{n \to \infty} \left[\frac{n^{n+1}}{3^{n+1} \cdot (n+1)!} \cdot \frac{3^n \cdot n!}{n^n} \right]$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{3} < 1,$$

由 D'Alembert 判别法可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n \cdot n!}$ 收敛.

引理 9.3.1 告诉我们：若一个正项级数的敛散情况可以由 D'Alembert 判别法判定，则它一定也能用 Cauchy 判别法来判定. 但是，能用 Cauchy 判别法判定的，却未必能用 D'Alembert 判别法判定.

例 9.3.7 考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots,$$

则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n-1]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{2^{n+1}} = +\infty,$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{3^n} = 0.$$

由 Cauchy 判别法可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，但 D'Alembert 判别法却是失效的.

这就是说，Cauchy 判别法的适用范围比 D'Alembert 判别法广. 但是，对某些具体例子而言，两种判别法都适用，而 D'Alembert 判别法比 Cauchy 判别法更方便一些. 读者应根据具体级数情况来选择合适的判别法.

Cauchy 判别法与 D'Alembert 判别法的本质是比较判别法，与之相比较的是几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$：在判定级数收敛时，要求级数的通项受到 $q^n(0 < q < 1)$ 的控制；而在判定级数发散时，则是根据其一般项不趋于 0. 由于这两者相去甚远，因此判别法在许多情况下会失效，即便对 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 这样简单的级数，它们也都无能为力. 下面我们介绍一些判别法将在一定程度上弥补上述的局限性.

Raabe 判别法

对某些正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$，成立 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$（或者说 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n+1}} = 1$），这时 Cauchy 判别法与 D'Alembert 判别法都失效，下面给出一种针对这类情况的判别法.

定理 9.3.5（Raabe 判别法） 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n (x_n \neq 0)$ 是正项级数，$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = r$，则

(1) 当 $r > 1$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛；

(2) 当 $r < 1$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散.

证 设 $s > t > 1$，$f(x) = 1 + sx - (1 + x)^t$，由 $f(x)$ 的连续可微性与

$f(0)=0, f'(0)=s-t>0$,可知存在 $\delta>0$,对一切 $0<x<\delta$ 成立

$$1+sx>(1+x)^t. \qquad (*)$$

当 $r>1$ 时,取 s,t 满足 $r>s>t>1$. 由 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=r>s>t$ 与不等式(*),可知当 n 充分大时,

$$\frac{x_n}{x_{n+1}}>1+\frac{s}{n}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^t=\frac{(n+1)^t}{n^t},$$

这说明正项数列 $\{n^t x_n\}$ 从某一项开始单调减少,因而其必有上界,设

$$n^t x_n \leqslant A,$$

于是

$$x_n \leqslant \frac{A}{n^t},$$

由于 $t>1$,因而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^t}$ 收敛,根据比较判别法即得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 的收敛性.

当 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=r<1$,则对于充分大的 n,

$$\frac{x_n}{x_{n+1}}<1+\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n},$$

这说明正项数列 $\{nx_n\}$ 从某一项开始单调增加,因而存在 N 与 $\alpha>0$,使

$$nx_n>\alpha$$

对一切 $n>N$ 成立,于是

$$x_n>\frac{\alpha}{n}.$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散,根据比较判别法即得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 发散.

证毕

例 9.3.8 判断级数 $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 的敛散性.

解 设 $x_n=\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\dfrac{1}{2n+1}$,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)}=1,$$

也就是说,此时 Cauchy 判别法与 D'Alembert 判别法都不适用,但应用 Raabe 判别法,可得

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(6n+5)}{(2n+1)^2}=\frac{3}{2}>1,$$

所以级数 $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 收敛.

积分判别法

设 $f(x)$ 定义于 $[a,+\infty)$，$f(x)\geqslant 0$，且 $f(x)$ 在任意有限区间 $[a,A]$ 上 Riemann 可积.

取一单调增加趋于 $+\infty$ 的数列 $\{a_n\}$：

$$a=a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n<\cdots$$

令

$$u_n=\int_{a_n}^{a_{n+1}}f(x)\mathrm{d}x.$$

定理9.3.6(积分判别法) *反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 与正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 同时收敛或同时发散于 $+\infty$，且*

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}}f(x)\mathrm{d}x.$$

特别，当 $f(x)$ 单调减少时，取 $a_n=n$，则反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 与正项级数 $\sum_{n=N}^{\infty}f(n)\ (N=[a]+1)$ 同时收敛或同时发散.

证 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$，则对任意 $A>a$，存在正整数 n，成立 $a_n\leqslant A<a_{n+1}$，于是

$$S_{n-1}\leqslant\int_a^A f(x)\mathrm{d}x\leqslant S_n.$$

当 $\{S_n\}$ 有界，即 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛时，则有 $\lim\limits_{A\to\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且根据极限的夹逼性，它们收敛于相同的极限；当 $\{S_n\}$ 无界，即 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散于 $+\infty$ 时，则同样有 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x=+\infty$. 由此得到下述关系

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}}f(x)\mathrm{d}x.$$

特别，当 $f(x)$ 单调减少时，取 $a_n=n$，则当 $n\geqslant N=[a]+1$，

$$f(n+1)\leqslant u_n\leqslant f(n),$$

由比较判别法可知 $\sum_{n=N}^{\infty}f(n)$ 与 $\sum_{n=N}^{\infty}u_n$ 同时收敛或同时发散，从而与 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$

同时收敛或同时发散.

证毕

利用定理 9.3.6 可以很容易验证 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 的敛散性.

取 $f(x)=\frac{1}{x^p}$,则 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 单调减少,且 $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$,由

$$\int_1^A f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{1}{-p+1}A^{-p+1}-\frac{1}{-p+1}, & p\neq 1,\\ \ln A, & p=1.\end{cases}$$

令 $A\to\infty$,可知积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 在 $p>1$ 时收敛,在 $p\leqslant 1$ 时发散,由此得到 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 在 $p>1$ 时收敛,在 $p\leqslant 1$ 时发散.进一步可以得到

例 9.3.9 正项级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^q n}$ 在 $q>1$ 时收敛,在 $q\leqslant 1$ 时发散.

证 取 $f(x)=\frac{1}{x\ln^q x}$,则在 $[2,+\infty)$,$f(x)$ 单调减少,$f(x)>0$,且 $\sum_{n=2}^{\infty}f(n)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^q n}$,由

$$\int_2^A f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{1}{-q+1}\ln^{-q+1}A-\frac{1}{-q+1}\ln^{-q+1}2, & q\neq 1,\\ \ln\ln A-\ln\ln 2, & q=1.\end{cases}$$

令 $A\to+\infty$,可知积分 $\int_2^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 在 $q>1$ 时收敛,在 $q\leqslant 1$ 时发散,由此得到 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^q n}$ 在 $q>1$ 时收敛,在 $q\leqslant 1$ 时发散.

在例 9.3.9 中,我们利用积分判别法,由已知敛散性的反常积分出发,来判断级数的敛散性.事实上,我们也可以反其道而行之,由已知敛散性的级数出发,去判断某些反常积分的敛散性.

例 9.3.10 证明:

(1) 反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2\sin^2 x}$ 发散;

(2) 反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4\sin^2 x}$ 收敛.

证

(1) 取 $a_n=n\pi$, $n=0,1,2,\cdots$,则

$$u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2\sin^2 x}=\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}t}{1+(n\pi+t)^2\sin^2 t}$$

$$>\int_0^{\frac{1}{(n+1)\pi}}\frac{\mathrm{d}t}{1+(n\pi+t)^2\sin^2 t},$$

当 $0<t<\frac{1}{(n+1)\pi}$,

$$(n\pi+t)^2\sin^2 t<(n+1)^2\pi^2t^2<(n+1)^2\pi^2\cdot\frac{1}{(n+1)^2\pi^2}=1,$$

于是

$$u_n>\int_0^{\frac{1}{(n+1)\pi}}\frac{\mathrm{d}t}{1+(n\pi+t)^2\sin^2 t}>\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{n+1}.$$

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散,可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散,根据定理 9.3.6,得到 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2\sin^2 x}$ 发散.

(2) 取 $a_n=n\pi,n=0,1,2,\cdots$,则

$$u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4\sin^4 x}=\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}t}{1+(n\pi+t)^4\sin^2 t}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{1+(n\pi+t)^4\sin^2 t}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{1+(n\pi+\pi-t)^4\sin^2 t}.$$

令

$$u_n'=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{1+(n\pi+t)^4\sin^2 t},$$

$$u_n''=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{1+(n\pi+\pi-t)^4\sin^2 t},$$

则

$$u_n=u_n'+u_n''.$$

当 $0<t<\frac{\pi}{2}$ 时,

$$(n\pi+t)^4\sin^2 t\geqslant n^4\pi^4\left(\frac{2t}{\pi}\right)^2=4\pi^2n^4t^2,$$

于是

$$u_n'\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{1+4\pi^2n^4t^2}=\frac{1}{2\pi n^2}\int_0^{n^2\pi^2}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}<\frac{1}{4n^2},$$

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛,可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'$ 收敛.同理也可证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n''$ 收敛,从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

根据定理 9.3.6,得到$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4\sin^2x}$收敛.

证毕

注　在应用定理9.3.6时,必须注意条件$f(x)\geqslant 0$.若没有这一条件,由反常积分$\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$的收敛性,仍可以得到级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛性(请读者思考为什么),但反过来结论就不一定成立.例如$f(x)=\sin x$,显然$\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$是发散的,但若取$a_n=2n\pi$,则$u_n=\int_{a_n}^{a_{n+1}}f(x)\mathrm{d}x=0$,也就是说,$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$却是收敛的.

习　　题

1. 讨论下列正项级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n}{n^4+1}$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2}{n^3+3n}$;

(3) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}$;　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$;　　(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$;　　(8) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)$;

(9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$;　　(10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[2+(-1)^n]^n}{2^{2n+1}}$;

(11) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\mathrm{e}^{-n}$;　　(12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$;

(13) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)$;

(14) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(2n-\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)$;

(15) $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\frac{n^2+1}{n^2-1}$;　　(16) $\sum_{n=3}^{\infty}\ln\cos\frac{\pi}{n}$;

(17) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}(a>0)$.

2. 利用级数收敛的必要条件,证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n!)^2}=0$；　　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n)!}{2^{n(n+1)}}=0$.

3. 利用 Raabe 判别法判断下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}(a>0)$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^{\ln n}}$；　　　(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$.

4. 讨论下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}\mathrm{d}x$；　　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{n\pi}^{2n\pi}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\ln(1+x)\mathrm{d}x$.

5. 利用不等式$\dfrac{1}{n+1}<\int_n^{n+1}\dfrac{\mathrm{d}x}{x}<\dfrac{1}{n}$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$$

存在(此极限为 Euler 常数 γ—— 见例 2.4.8).

6. 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$是两个正项级数，若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=0$或$+\infty$，请问这两个级数的敛散性关系如何？

7. 设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^2$也收敛；反之如何？

8. 设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$收敛，则当$p>\dfrac{1}{2}$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{x_n}}{n^p}$收敛；又问当$0<p\leqslant\dfrac{1}{2}$时，结论是否仍然成立？

9. 设$x_n>0$，$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}>1-\dfrac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$，证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$发散.

10. 设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$发散，$S_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$，证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x_n}{S_n^2}$收敛.

(提示：利用不等式$\dfrac{x_n}{S_n^2}\leqslant\dfrac{S_n-S_{n-1}}{S_nS_{n-1}}$.)

§4　任意项级数

任意项级数

一个级数，如果只有有限个负项或有限个正项，都可以用正项级数的各种

判别法来判断它的敛散性.如果一个级数既有无限个正项,又有无限个负项,那么正项级数的各种判别法不再适用.

为此,我们从正项级数转向讨论任意项级数,也就是通项任意地可正或可负的级数.

由于 Cauchy 收敛原理是对敛散性最本质的刻画,为了判断任意项级数的敛散性,我们将关于数列的 Cauchy 收敛原理应用于级数的情况,即可得到

定理 9.4.1(级数的Cauchy收敛原理)　级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛的充分必要条件是:对任意给定的 $\varepsilon > 0$,存在 N,使得

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_m| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} x_k\right| < \varepsilon$$

对一切 $m > n > N$ 成立.

定理结论还可以叙述为:对任意给定的 $\varepsilon > 0$,存在 N,使得

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+p}| = \left|\sum_{k=1}^{p} x_{n+k}\right| < \varepsilon$$

对一切 $n > N$ 与一切正整数 p 成立.

取 $p = 1$,上式即为 $|x_{n+1}| < \varepsilon$,于是就得级数收敛的必要条件 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Leibniz 级数

先考虑一类特殊的任意项级数.

定义 9.4.1　如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n\,(u_n > 0)$,则称此级数为**交错级数**.

进一步,若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n\,(u_n > 0)$ 满足 $\{u_n\}$ 单调减少且收敛于 0,则称这样的交错级数为 **Leibniz 级数**.

定理 9.4.2(Leibniz 判别法)　Leibniz 级数必定收敛.

证　首先有

$$\begin{aligned}&|x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+p}|\\ =\ &|u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - \cdots + (-1)^{p+1}u_{n+p}|,\end{aligned}$$

当 p 是奇数时,

$$\begin{aligned}&u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - \cdots + (-1)^{p+1}u_{n+p}\\ =&\begin{cases}(u_{n+1} - u_{n+2}) + (u_{n+3} - u_{n+4}) + \cdots + u_{n+p} > 0,\\ u_{n+1} - (u_{n+2} - u_{n+3}) - \cdots - (u_{n+p-1} - u_{n+p}) \leqslant u_{n+1},\end{cases}\end{aligned}$$

当 p 是偶数时,

$$u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - \cdots + (-1)^{p+1}u_{n+p}$$

$$= \begin{cases} (u_{n+1} - u_{n+2}) + (u_{n+3} - u_{n+4}) + \cdots + (u_{n+p-1} - u_{n+p}) \geqslant 0, \\ u_{n+1} - (u_{n+2} - u_{n+3}) - \cdots - u_{n+p} < u_{n+1}, \end{cases}$$

因而成立

$$\begin{aligned} & |x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+p}| \\ = & |u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - \cdots + (-1)^{p+1} u_{n+p}| \leqslant u_{n+1}. \end{aligned}$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0, \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N: u_{n+1} < \varepsilon$. 于是对一切正整数 p,成立

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+p}| \leqslant u_{n+1} < \varepsilon,$$

根据定理 9.4.1,Leibniz 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ 收敛.

证毕

注　由定理 9.4.2 的证明,可以进一步得到下述结论:

(1) 对于 Leibniz 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$,成立

$$0 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n \leqslant u_1;$$

(2) 对于 Leibniz 级数的余和 $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} u_k$,成立

$$|r_n| \leqslant u_{n+1}.$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^p} (p > 0)$, $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\ln^q n} (q > 0)$, $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{n^2}{n^3 + 1}$ 等级数都是 Leibniz 级数,由定理 9.4.2,即可知它们都是收敛的.

例 9.4.1　级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(\sqrt{n^2 + 1}\pi)$ 收敛.

证

$$\begin{aligned} \sin(\sqrt{n^2 + 1}\pi) &= (-1)^n \sin(\sqrt{n^2 + 1} - n)\pi \\ &= (-1)^n \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2 + 1} + n}, \end{aligned}$$

显然 $\left\{\sin \dfrac{\pi}{\sqrt{n^2 + 1} + n}\right\}$ 是单调减少数列,且

$$\lim_{n\to\infty} \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = 0,$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(\sqrt{n^2 + 1}\pi)$ 是 Leibniz 级数. 由定理 9.4.2,可知其是收敛的.

Abel 判别法与 Dirichlet 判别法

为了讨论比 Leibniz 级数更广泛的任意项级数，先引进下述引理：

引理 9.4.1(Abel 变换)　设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 是两数列，记 $B_k = \sum_{i=1}^{k} b_i$，$k = 1, 2, \cdots$，则

$$\sum_{k=1}^{p} a_k b_k = a_p B_p - \sum_{k=1}^{p-1} (a_{k+1} - a_k) B_k.$$

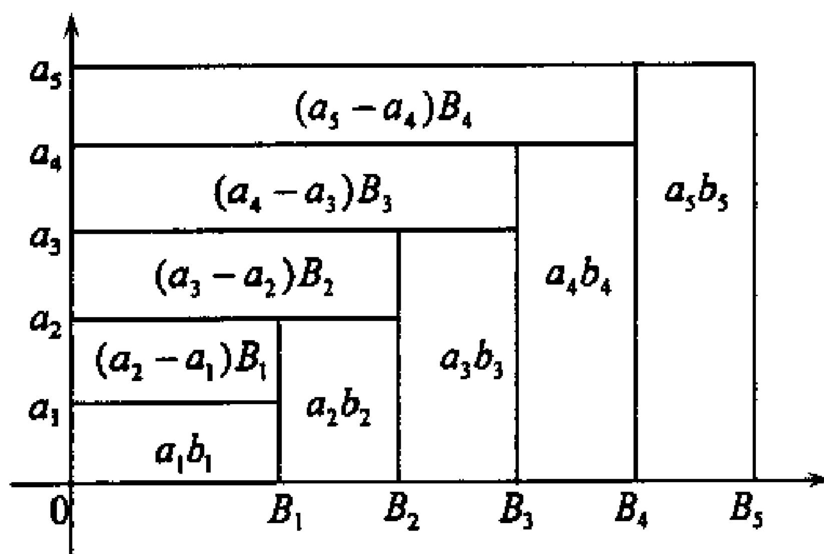
证

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{p} a_k b_k &= a_1 B_1 + \sum_{k=2}^{p} a_k (B_k - B_{k-1}) \\ &= a_1 B_1 + \sum_{k=2}^{p} a_k B_k - \sum_{k=2}^{p} a_k B_{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{p-1} a_k B_k - \sum_{k=1}^{p-1} a_{k+1} B_k + a_p B_p \\ &= a_p B_p - \sum_{k=1}^{p-1} (a_{k+1} - a_k) B_k.\end{aligned}$$

证毕

上式也称为**分部求和公式**.

下图是当 $a_n > 0, b_n > 0$，且 $\{a_n\}$ 单调增加时，Abel 变换的一个直观的示意.



图中矩形 $[0, B_5] \times [0, a_5]$ 被分割成 9 个小矩形，根据所标出的各小矩形的面积，即得到 $p = 5$ 的 Abel 变换：

$$\sum_{k=1}^{5} a_k b_k = a_5 B_5 - \sum_{k=1}^{4}(a_{k+1} - a_k)B_k.$$

事实上,Abel 变换就是离散形式的分部积分公式. 记 $G(x) = \int_a^x g(t)\mathrm{d}t$,则分部积分公式可以写成

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(b)G(b) - \int_a^b G(x)\mathrm{d}f(x).$$

将数列的通项类比于函数,求和类比于求积分,求差类比于求微分($a_{k+1} - a_k$ 对应于 $\mathrm{d}f(x)$),则两者是一致的.

利用 Abel 变换即得到如下的 Abel 引理.

引理 9.4.2(Abel 引理) 设

(1) $\{a_k\}$ 为单调数列;

(2) $\{B_k\}$ ($B_k = \sum_{i=1}^{k} b_i, k = 1,2,\cdots$) 为有界数列,即存在 $M > 0$,对一切 k,成立 $|B_k| \leqslant M$,

则

$$\left|\sum_{k=1}^{p} a_k b_k\right| \leqslant M(|a_1| + 2|a_p|).$$

证 由 Abel 变换,

$$\left|\sum_{k=1}^{p} a_k b_k\right| \leqslant |a_p B_p| + \sum_{k=1}^{p-1}|a_{k+1} - a_k||B_k|$$
$$\leqslant M(|a_p| + \sum_{k=1}^{p-1}|a_{k+1} - a_k|).$$

由于 $\{a_k\}$ 单调,所以

$$\sum_{k=1}^{p-1}|a_{k+1} - a_k| = \left|\sum_{k=1}^{p-1}(a_{k+1} - a_k)\right| = |a_p - a_1|,$$

于是得到

$$\left|\sum_{k=1}^{p} a_k b_k\right| \leqslant M(|a_1| + 2|a_p|).$$

证毕

定理 9.4.3 若下列两个条件之一满足,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛:

(1)(**Abel 判别法**) $\{a_n\}$ 单调有界,$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛;

(2)(**Dirichlet 判别法**) $\{a_n\}$ 单调趋于 0,$\{\sum_{i=1}^{n} b_i\}$ 有界.

证 (1) 若 Abel 判别法条件满足，设 $|a_n| \leqslant M$，由于 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N$ 和 $p \in \mathbf{N}^+$，成立 $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k\right| < \varepsilon$. 对 $\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k$ 应用 Abel 引理，即得

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| < \varepsilon(|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}|) \leqslant 3M\varepsilon.$$

(2) 若 Dirichlet 判别法条件满足，由于 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，因此 $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N: |a_n| < \varepsilon$.

设 $\left|\sum_{i=1}^{n} b_i\right| \leqslant M$. 令 $B_k = \sum_{i=n+1}^{n+k} b_i (k = 1,2,\cdots)$，则

$$|B_k| = \left|\sum_{i=1}^{n+k} b_i - \sum_{i=1}^{n} b_i\right| \leqslant 2M,$$

应用 Abel 引理，同样可得

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| \leqslant 2M(|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}|) < 6M\varepsilon$$

对一切 $n > N$ 与一切正整数 p 成立.

根据 Cauchy 收敛原理(定理 9.4.1)，即知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

证毕

注 (1) 对于 Leibniz 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$，令 $a_n = u_n, b_n = (-1)^{n+1}$，则 $\{a_n\}$ 单调趋于 0，$\{\sum_{i=1}^{n} b_i\}$ 有界，由 Dirichlet 判别法，可知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 收敛. 所以交错级数的 Leibniz 判别法可以看成是 Dirichlet 判别法的特例.

(2) 若 Abel 判别法条件满足，由于数列 $\{a_n\}$ 单调有界，设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$，则数列 $\{a_n - a\}$ 单调趋于 0. 又由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则其部分和数列 $\{\sum_{i=1}^{n} b_i\}$ 必定有界，根据 Dirichlet 判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a)b_n$ 收敛，从而即知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

这就是说，Abel 判别法也可以看成是 Dirichlet 判别法的特例.

例 9.4.2 设 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则由 Abel 判别法，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\sqrt{n}}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} b_n, \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n b_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ln \frac{3n+1}{2n}$ 等都收敛.

例 9.4.3 设数列 $\{a_n\}$ 单调趋于 0，则对一切实数 x，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 收敛.

证 当 $x \neq 2k\pi$，

$$2\sin x \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \cos\frac{x}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}x,$$

于是对一切正整数 n，

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|},$$

由 Dirichlet 判别法，可知当 $x \neq 2k\pi$，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 收敛. 由于当 $x = 2k\pi$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx = 0$，于是得到对一切实数 x，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 收敛.

证毕

读者可自己证明，当 $\{a_n\}$ 单调趋于 0 时，则对一切 $x \neq 2k\pi$，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 收敛.

级数的绝对收敛与条件收敛

正项级数的判别法较易使用，很自然地要问，能否利用它对任意项级数的敛散性先做一个粗略的判断呢？

由 Cauchy 收敛原理和三角不等式

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_m| \leqslant |x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \cdots + |x_m|,$$

很容易知道：若对一个数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 逐项取绝对值得到新的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$，则当 $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ 收敛时必有 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛.

显然，这个结论的逆命题是不成立的，即不能由 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛断言 $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ 也收敛. 例如 Leibniz 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 收敛，但对每项取绝对值后，得到的是调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$，它是发散的.

定义 9.4.2 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 为**绝对收敛**级数. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛而 $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ 发散，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 为**条件收敛**级数.

由定义，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 即是一个条件收敛级数.

$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ 的敛散性可以采用正项级数敛散性的判别法来判定.需要指出，虽然一般说来，由 $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ 发散并不能得出 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 发散，但若用 Cauchy 判别法或 D'Alembert 判别法判断出 $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 本身一定发散，这是因为这两个判别法判定发散的依据是级数的通项不趋于 0，即不满足收敛的必要条件.

例 9.4.4 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^p}$ 的敛散性.

解 对 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x^n}{n^p}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^n}{n^p}$ 应用 Cauchy 判别法，

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n^p}}=|x|,$$

由此可知：

$|x|<1$，p 为任意实数：级数收敛(绝对收敛)；

$|x|>1$，p 为任意实数：级数发散；

$$x=1,\begin{cases}p>1, & \text{级数收敛(绝对收敛)},\\ p\leqslant 1, & \text{级数发散};\end{cases}$$

$$x=-1,\begin{cases}p>1, & \text{级数收敛(绝对收敛)},\\ 0<p\leqslant 1, & \text{级数收敛(条件收敛)},\\ p\leqslant 0, & \text{级数发散}.\end{cases}$$

例 9.4.5 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}(0<x<\pi)$ 的敛散性.

解 当 $p>1$，由 $\frac{|\sin nx|}{n^p}\leqslant\frac{1}{n^p}$，可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$ 绝对收敛.

当 $0<p\leqslant 1$，由例 9.4.3，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$ 收敛；但进一步我们有

$$\frac{|\sin nx|}{n^p}\geqslant\frac{\sin^2 nx}{n^p}=\frac{1}{2n^p}-\frac{\cos 2nx}{2n^p},$$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{2n^p}$ 的敛散性同样可由 Dirichlet 判别法得到，但由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^p}$ 发散，可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin nx|}{n^p}$ 发散，换言之，当 $0<p\leqslant 1$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}(0<x<\pi)$ 条件收敛.

当 $p\leqslant 0$,由于级数的一般项不趋于 0,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^p}$ 发散.

将收敛级数区分为绝对收敛和条件收敛的主要意义还不在于讨论其敛散性,实际上,它们之间存在着许多本质差别,下面对此作进一步探讨.

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 是任意项级数,令

$$x_n^+=\frac{|x_n|+x_n}{2}=\begin{cases}x_n, & x_n>0,\\ 0, & x_n\leqslant 0,\end{cases}$$

$$x_n^-=\frac{|x_n|-x_n}{2}=\begin{cases}-x_n, & x_n<0,\\ 0, & x_n\geqslant 0,\end{cases}$$

则

$$x_n=x_n^+-x_n^-,\qquad |x_n|=x_n^++x_n^-,$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^+$ 是由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 的所有正项构成的级数,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^-$ 是由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 的所有负项变号后构成的级数,它们都是正项级数.

定理 9.4.4　若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 绝对收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^+$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^-$ 都收敛;若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 条件收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^+$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^-$ 都发散到 $+\infty$.

证　先设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 绝对收敛,由于

$$0\leqslant x_n^+\leqslant|x_n|,\quad 0\leqslant x_n^-\leqslant|x_n|\,(n=1,2,\cdots),$$

则由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|$ 的收敛性,立刻得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^+$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^-$ 的收敛性.

现设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 条件收敛,若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^+$(或 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^-$) 也收敛,则由

$$\sum_{n=1}^{\infty}x_n^-=\sum_{n=1}^{\infty}x_n^+-\sum_{n=1}^{\infty}x_n\Big(\text{或}\sum_{n=1}^{\infty}x_n^+=\sum_{n=1}^{\infty}x_n^-+\sum_{n=1}^{\infty}x_n\Big)$$

可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^-$(或 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^+$) 也收敛,于是得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|=\sum_{n=1}^{\infty}x_n^++\sum_{n-1}^{\infty}x_n^-$$

的收敛性,从面产生矛盾.

证毕

加法交换律

本章一开始曾提出无限个实数的求和是否成立加法交换律和加法结合律

的问题. 在 §1 中已经证明,结合律对收敛的级数是成立的.

那么,对收敛的级数是否也成立交换律呢? 也就是说,将一个收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的项任意重新排列,得到的新级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n'$(称为 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的**更序级数**)是否仍然收敛?如果收敛的话,其和是否保持不变,即是否有

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n' = \sum_{n=1}^{\infty} x_n?$$

回答是否定的.

例 9.4.6　考虑 Leibniz 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

这是一个条件收敛级数,在例 2.4.10 中,已经证明了它的和为 $\ln 2$.

现按下述规律构造 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 的更序级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n'$:顺次地在每一个正项后面接两个负项,即

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n' = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} + \cdots.$$

设 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n'$ 的部分和数列为 $\{S_n'\}$,则

$$\begin{aligned} S_{3n}' &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \frac{1}{2} S_{2n}, \end{aligned}$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} S_{3n}' = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} S_{2n} = \frac{1}{2} \ln 2.$$

由于

$$S_{3n-1}' = S_{3n}' + \frac{1}{4n}, \qquad S_{3n+1}' = S_{3n}' + \frac{1}{2n+1},$$

最终得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n' = \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

也就是说,尽管 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 是收敛的,但交换律不成立.

这个例子告诉我们,要使一个数项级数成立加法交换律,仅有收敛性是不

够的.事实上,能否满足加法交换律,是绝对收敛级数与条件收敛级数的一个本质区别.

定理 9.4.5 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 绝对收敛,则它的更序级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n'$ 也绝对收敛,且和不变,即

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n' = \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

证 我们分两步来证明定理.

(1) 先设 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 是正项级数,则对一切 $n \in \mathbf{N}^+$,

$$\sum_{k=1}^{n} x_k' \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} x_n,$$

于是可知 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n'$ 收敛,且

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n' \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} x_n;$$

反过来,也可以将 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 看成是 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n'$ 的更序级数,又有

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} x_n'.$$

合起来即得

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n' = \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

(2) 现设 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 是任意项级数,则由定理 9.4.4,正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^-$ 都收敛,且

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} x_n^-,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} x_n^-.$$

对于更序级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n'$,同样构作正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n'^+$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n'^-$,由于 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n'^+$ 即为 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^+$ 的更序级数, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n'^-$ 即为 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^-$ 的更序级数,根据(1),

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n'^+ = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^+, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} x_n'^- = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^-,$$

于是得到 $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n'| = \sum_{n=1}^{\infty}x_n'^{+} + \sum_{n=1}^{\infty}x_n'^{-}$ 收敛，即 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n'$ 绝对收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}x_n' = \sum_{n=1}^{\infty}x_n'^{+} - \sum_{n=1}^{\infty}x_n'^{-} = \sum_{n=1}^{\infty}x_n^{+} - \sum_{n=1}^{\infty}x_n^{-} = \sum_{n=1}^{\infty}x_n.$$

证毕

定理9.4.6(Riemann) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 条件收敛，则对任意给定的 $a(-\infty \leqslant a \leqslant +\infty)$，必定存在 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 的更序级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n'$ 满足

$$\sum_{n=1}^{\infty}x_n' = a.$$

证 我们只证 a 为有限数的情况，$a=\pm\infty$ 的情况留给读者考虑.

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 条件收敛，由定理 9.4.4，

$$\sum_{n=1}^{\infty}x_n^{+} = +\infty,\quad \sum_{n=1}^{\infty}x_n^{-} = +\infty.$$

依次计算 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^{+}$ 的部分和，必定存在最小的正整数 n_1，满足

$$x_1^{+} + x_2^{+} + \cdots + x_{n_1}^{+} > a,$$

再依次计算 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^{-}$ 的部分和，也必定存在最小的正整数 m_1，满足

$$x_1^{+} + x_2^{+} + \cdots + x_{n_1}^{+} - x_1^{-} - x_2^{-} - \cdots - x_{m_1}^{-} < a,$$

类似地可找到最小的正整数 $n_2 > n_1, m_2 > m_1$，满足

$$x_1^{+} + x_2^{+} + \cdots + x_{n_1}^{+} - x_1^{-} - x_2^{-} - \cdots - x_{m_1}^{-} + x_{n_1+1}^{+} + \cdots + x_{n_2}^{+} < a$$

和

$$x_1^{+} + x_2^{+} + \cdots + x_{n_1}^{+} - x_1^{-} - x_2^{-} - \cdots - x_{m_1}^{-} +$$
$$x_{n_1+1}^{+} + \cdots + x_{n_2}^{+} - x_{m_1+1}^{-} - \cdots - x_{m_2}^{-} < a,$$

……

这样的步骤可一直继续下去，由此得到 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 的一个更序级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n'$，它的部分和摆动于 $a + x_{n_k}^{+}$ 与 $a - x_{m_k}^{-}$ 之间.

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛，可知

$$\lim_{n\to\infty}x_n^{+} = \lim_{n\to\infty}x_n^{-} = 0,$$

于是得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n' = a.$$

证毕

级数的乘法

有限和式 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 和 $\sum\limits_{k=1}^{m} b_k$ 的乘积是所有诸如 $a_i b_j (i = 1,2,\cdots,n; j = 1,2,\cdots,m)$ 项的和，显然，其最终结果与它们相加的次序与方式无关.

类似地，对于两个收敛的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$，可以同样写出所有诸如 $a_i b_j (i = 1,2,\cdots; j = 1,2,\cdots)$ 的项.将它们排列成下面无穷矩阵的形式：

$$\begin{array}{ccccc}
a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 & \cdots \\
a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 & \cdots \\
a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & a_3b_4 & \cdots \\
a_4b_1 & a_4b_2 & a_4b_3 & a_4b_4 & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

然后，将所有这些项相加的结果定义为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 的乘积.

由于级数运算一般不满足交换律和结合律，这就有一个排列的次序与方式的问题.尽管排列的次序与方式多种多样，但常用的，也是最具应用价值的方式是下面所示的“对角线”排列与“正方形”排列.对角线排列：

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\
 & a_1b_1 & & a_1b_2 & & a_1b_3 & & a_1b_4 & & \cdots \\
\swarrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & & \\
 & a_2b_1 & & a_2b_2 & & a_2b_3 & & a_2b_4 & & \cdots \\
\swarrow & & \nearrow & & \nearrow & & & & & \\
 & a_3b_1 & & a_3b_2 & & a_3b_3 & & a_3b_4 & & \cdots \\
\swarrow & & \nearrow & & & & & & & \\
 & a_4b_1 & & a_4b_2 & & a_4b_3 & & a_4b_4 & & \cdots \\
\swarrow & & & & & & & & & \\
 & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots
\end{array}$$

令

$$c_1 = a_1 b_1,$$
$$c_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1,$$
$$\cdots\cdots$$

$$c_n = \sum_{i+j=n+1} = a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1,$$

$$\cdots\cdots$$

则我们称

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1)$$

为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 的 **Cauchy 乘积**.

正方形排列：

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & | & & | & & | & & | & \\
\leftarrow & a_1b_1 & & a_1b_2 & & a_1b_3 & & a_1b_4 & \cdots \\
 & & & | & & | & & | & \\
\leftarrow & a_2b_1 & — & a_2b_2 & & a_2b_3 & & a_2b_4 & \cdots \\
 & & & & & | & & | & \\
\leftarrow & a_3b_1 & — & a_3b_2 & — & a_3b_3 & & a_3b_4 & \cdots \\
 & & & & & & & | & \\
\leftarrow & a_4b_1 & — & a_4b_2 & — & a_4b_3 & — & a_4b_4 & \cdots \\
 & & & & & & & & \\
 & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots
\end{array}$$

令

$$d_1 = a_1b_1,$$

$$d_2 = a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1,$$

$$\cdots\cdots$$

$$d_n = a_1b_n + a_2b_n + \cdots + a_nb_n + a_nb_{n-1} + \cdots + a_nb_1,$$

$$\cdots\cdots$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$ 就是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 按正方形排列所得的乘积.

对于按正方形排列所得的乘积，只要 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$ 总是收敛的，并成立

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\Big).$$

理由请读者自行思考.

但是，仅有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 的收敛性不足以保证 Cauchy 乘积 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 的收敛性，下面就是一个例子.

例 9.4.7　设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$，这两个级数都是收敛的（显然是条件收敛），它们的 Cauchy 乘积的一般项为

$$c_n = (-1)^{n+1} \sum_{i+j=n+1} \frac{1}{\sqrt{ij}},$$

注意上面 c_n 的表达式中共有 n 项，在每一项中，$i+j=n+1$，因而

$$\sqrt{ij} \leqslant \frac{i+j}{2} = \frac{n+1}{2},$$

于是得到

$$|c_n| \geqslant n \cdot \frac{2}{n+1},$$

因此 $\{c_n\}$ 不是无穷小量，所以，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的 Cauchy 乘积 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 发散.

定理 9.4.7　如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛，则将 $a_i b_j$（$i=1,2,\cdots$；$j=1,2,\cdots$）按任意方式排列求和而成的级数也绝对收敛，且其和等于 $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$.

证　设 $a_{i_k} b_{j_k}$（$k=1,2,\cdots$）是所有 $a_i b_j$（$i=1,2,\cdots$；$j=1,2,\cdots$）的任意一种排列，对任意的 n，取

$$N = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \{i_k, j_k\},$$

则

$$\sum_{k=1}^{n} |a_{i_k} b_{j_k}| \leqslant \sum_{i=1}^{N} |a_i| \cdot \sum_{j=1}^{N} |b_j| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|,$$

因此 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{i_k} b_{j_k}$ 绝对收敛. 由定理 9.4.5，$\sum_{k=1}^{\infty} a_{i_k} b_{j_k}$ 的任意更序级数也绝对收敛，且和不变.

设 $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 按正方形排列所得的乘积，则 $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ 是 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{i_k} b_{j_k}$ 更序后再添加括孤所成的级数，于是得到

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{i_k} b_{j_k} = \sum_{n=1}^{\infty} d_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right).$$

证毕

下面我们举一例子,它反映了 Cauchy 乘积的应用价值.

例 9.4.8 利用 D'Alembert 判别法,可知对一切 $x\in\mathbf{R}$,级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

是绝对收敛的.现考虑两个绝对收敛级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}$ 的 Cauchy 乘积,由定理 9.4.7,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}\right)&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^ky^{n-k}}{k!(n-k)!}\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^kx^ky^{n-k}}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!},\end{aligned}$$

也就是成立

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y).$$

在第 10 章,我们将知道函数 $f(x)$ 就是指数函数 e^x,因而上式就是熟知的指数函数的加法定理.

习 题

1. 讨论下列级数的敛散性(包括条件收敛与绝对收敛):

(1) $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{5}-\cdots$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+x}(x\neq-n)$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{x}{n}$; (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$;

(5) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln^2n}{n}$; (6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{n\pi}{3}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n\sin^{2n}x}{n}$;

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}$;

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{2^n}x^n$; (10) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^p\ln^qn}$.

2. 利用 Cauchy 收敛原理证明下述级数发散:

(1) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\cdots$;

(2) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\cdots$.

3. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛,$\{x_n\}$ 单调减少,利用 Cauchy 收敛原理证明:

$\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = 0.$

4. 若对任意 $\varepsilon > 0$ 和任意正整数 p,存在 $N(\varepsilon, p)$,使得

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+p}| < \varepsilon$$

对一切 $n > N$ 成立,问级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 是否收敛?

5. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛,$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = 1$,问级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ 是否收敛?

6. 设 $x_n \geqslant 0$,$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$,问交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x_n$ 是否收敛?

7. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x_n}{n^{\alpha_0}}$ 收敛,则当 $\alpha > \alpha_0$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x_n}{n^{\alpha}}$ 也收敛.

8. 若 $\{nx_n\}$ 收敛,$\sum\limits_{n=2}^{\infty} n(x_n - x_{n-1})$ 收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛.

9. 若 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (x_n - x_{n-1})$ 绝对收敛,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ 收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ 收敛.

10. 设 $x_n > 0$,$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) > 0$,证明:交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x_n$ 收敛.

11. 利用

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \to \gamma(n \to \infty),$$

其中 γ 是 Euler 常数(见例2.4.8),求下述 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ 的更序级数的和:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots.$$

12. 利用级数的 Cauchy 乘积证明:

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!} \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!} = 1;$

(2) $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n = \dfrac{1}{(1-q)^2}(|q| < 1).$

§5 无穷乘积

无穷乘积的定义

设 $p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots (p_n \neq 0)$ 是可列无穷个实数,我们称它们的"积"

$$p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n \cdot \cdots$$

为**无穷乘积**,记为 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$,其中 p_n 称为无穷乘积的**通项**或**一般项**.

与无穷级数相类似，需要对上述的无穷乘积给出合理的定义. 为此构作无穷乘积$\prod_{n=1}^{\infty} p_n$的“**部分积数列**”$\{P_n\}$：

$$
\begin{aligned}
P_1 &= p_1, \\
P_2 &= p_1 \cdot p_2, \\
P_3 &= p_1 \cdot p_2 \cdot p_3, \\
&\cdots\cdots \\
P_n &= p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n = \prod_{k=1}^{n} p_k, \\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

定义 9.5.1 如果部分积数列$\{P_n\}$收敛于一个非零的有限数P，则称无穷乘积$\prod_{n=1}^{\infty} p_n$收敛，且称P为它的积，记为

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n = P.$$

如果$\{P_n\}$发散或$\{P_n\}$收敛于0，则称无穷乘积$\prod_{n=1}^{\infty} p_n$发散.

注意当$\lim_{n\to\infty} P_n = 0$时，我们称无穷乘积$\prod_{n=1}^{\infty} p_n$发散于0，而不是收敛于0. 在学习了无穷乘积收敛的充分必要条件后将会知道，它使无穷乘积的敛散性与级数的敛散性统一起来.

定理 9.5.1 如果无穷乘积$\prod_{n=1}^{\infty} p_n$收敛，则

(1) $\lim_{n\to\infty} p_n = 1$;

(2) $\lim_{m\to\infty} \prod_{n=m+1}^{\infty} p_n = 1$.

证 设$\prod_{n=1}^{\infty} p_n$的部分积数列为$\{P_n\}$，则

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{P_{n-1}} = 1;$$

$$\lim_{m\to\infty} \prod_{n=m+1}^{\infty} p_n = \lim_{m\to\infty} \frac{\prod_{n=1}^{\infty} p_n}{\prod_{n=1}^{m} p_n} = 1.$$

证毕

为方便起见，我们常把p_n记为$1+a_n$，则定理 9.5.1 的(1)又可表达为：如

果无穷乘积$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$收敛,则$\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

定理 9.5.1 的(1) 可类比于级数收敛的必要条件:通项趋于 0. 作为无穷乘积收敛的必要条件,它可以用于判断某些无穷乘积的发散. 例如,设 $p_n=\frac{n}{2n+1}$, $q_n=\frac{2n}{n+1}$, $r_{2n}=\frac{n}{2n+1}$, $r_{2n-1}=\frac{2n}{n+1}$,则无穷乘积$\prod_{n=1}^{\infty}p_n$, $\prod_{n=1}^{\infty}q_n$, $\prod_{n=1}^{\infty}r_n$都是发散的. 请读者自己判断一下这些无穷乘积的发散规律.

例 9.5.1 设 $p_n=1-\frac{1}{n+1}$, $n=1,2,\cdots$,则部分积

$$\begin{aligned}P_n&=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)=\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n+1}\\&=\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

由$\lim_{n\to\infty}P_n=0$,可知无穷乘积$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$发散于 0.

例 9.5.2 设 $p_n=1-\frac{1}{(2n)^2}$, $n=1,2,\cdots$,则部分积

$$\begin{aligned}P_n&=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{(2k)^2}\right)=\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)(2k+1)}{2k\cdot 2k}\\&=\frac{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2n-1)(2n+1)}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)(2n)}\\&=\frac{[(2n-1)!!]^2}{[(2n)!!]^2}\cdot(2n+1).\end{aligned}$$

为了判断部分积数列$\{P_n\}$的敛散性,我们考虑积分

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x,$$

由例 7.3.9,我们知道

$$I_{2n}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2},\qquad I_{2n+1}=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},$$

因此

$$\frac{\pi}{2}P_n=\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}.$$

由于 $I_{2n+1}<I_{2n}<I_{2n-1}$,可得

$$1<\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}<\frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}},$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{2n}=1$,由数列极限的夹逼性,

$$\lim_{n\to\infty}P_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\cdot\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}\right)=\frac{2}{\pi},$$

于是得到无穷乘积$\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{(2n)^2}\right)$的收敛性,并且

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2n)^2}\right)=\frac{2}{\pi}.$$

将上式换一个形式表示,就得到著名的 **Wallice 公式**

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdot\cdots.$$

例 9.5.3 设 $p_n=\cos\dfrac{x}{2^n}$, $n=1,2,\cdots$,应用三角函数的倍角公式,有

$$\begin{aligned}\sin x&=2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}\\&=2^2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\sin\frac{x}{2^2}\\&=\cdots\cdots\\&=2^n\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n},\end{aligned}$$

可知当$0<x<\pi$时,部分积

$$P_n=\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}=\frac{\sin x}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}P_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x},$$

即

$$\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{x}.$$

令 $x=\dfrac{\pi}{2}$,就得到 **Viete 公式**

$$\frac{2}{\pi}=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n}\cdots.$$

在历史上 Viete 公式与 Wallice 公式都曾经被用来计算 π 的近似值.

无穷乘积与无穷级数

定理 9.5.1 告诉我们,无穷乘积$\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$收敛的必要条件是$\lim\limits_{n\to\infty}p_n=1$,因此

必定存在正整数 N，当 $n > N$ 时成立 $p_n > 0$. 由于无穷乘积的敛散性与它的前 N 项非零因子无关，所以在讨论无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 的敛散性问题时，我们都假定 $p_n > 0$.

定理9.5.2 无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 收敛的充分必要条件是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 收敛.

证 设 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 的部分积数列为 $\{P_n\}$，$\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$，则

$$P_n = e^{S_n},$$

由此得到 $\{P_n\}$ 收敛于非零实数的充分必要条件是 $\{S_n\}$ 收敛. 特别，$\{P_n\}$ 收敛于 0，即 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 发散于 0 的充分必要条件是 $\{S_n\}$ 发散于 $-\infty$.

证毕

推论 1 设 $a_n > 0$（或 $a_n < 0$），则无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛的充分必要条件是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

证 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 都是正项级数（或都是负项级数），它们都以 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 为收敛的必要条件，而当 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 时，我们有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = 1,$$

于是由正项级数的比较判别法，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$ 收敛的充分必要条件是 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

证毕

由推论 1，立刻可以得到例 9.5.1，例 9.5.2 和例 9.5.3 中关于无穷乘积收敛与发散的结论.

如果 $\{a_n\}$ 不保持定号，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性并不能保证无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 的收敛性. 事实上，我们有下述进一步的结果：

推论 2 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛的充分必要条件是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛.

证 由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,可知 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,由 $\ln(1+a_n) \leqslant a_n$ 及

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - \ln(1+a_n)}{a_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}a_n^2 + o(a_n^2)}{a_n^2} = \frac{1}{2},$$

根据正项级数的比较判别法,当 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛时,必有 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 的收敛性.

反过来,当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛时,由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性,必可得到 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$ 的收敛性.

证毕

例 9.5.4 讨论 $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^x}\right)$ 的敛散性.

解 由无穷乘积收敛性的必要条件,可知当 $x \leqslant 0$ 时,$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^x}\right)$ 是发散的.

当 $x>0$,$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ 收敛,而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2x}}$ 在 $0 < x \leqslant \frac{1}{2}$ 时发散,在 $x > \frac{1}{2}$ 时收敛,于是由推论 2,得到

当 $x > \frac{1}{2}$ 时,$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^x}\right)$ 收敛;当 $x \leqslant \frac{1}{2}$ 时,$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^x}\right)$ 发散.

从定理 9.5.2 推论 2 的证明中可以看出,若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = +\infty$,则无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 必定发散于 0,这一点留给读者证明.

特别需要注意的是,推论 2 的叙述不能改为"$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛的充分必要条件是 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛".事实上,我们有这样的例子,$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 是收敛的,但 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 却都是发散的(见本章习题 7).

关于无穷乘积的绝对收敛,我们有如下定义:

定义 9.5.2 当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 绝对收敛时,称无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ **绝对收敛**.

显然,绝对收敛的无穷乘积必定收敛.

由于绝对收敛级数具有可交换性,可知绝对收敛的无穷乘积具有可交换性,而收敛但非绝对收敛的无穷乘积不一定具有可交换性.

定理 9.5.3 设 $a_n > -1, n = 1,2,\cdots$,则下述三命题等价:

(1) 无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ 绝对收敛;

(2) 无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 + |a_n|)$ 收敛;

(3) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛.

证 首先命题(1),(2),(3)的必要条件都是 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = 0$. 而在 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = 0$ 的条件下,我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\ln(1 + a_n)|}{|a_n|} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1 + |a_n|)}{|a_n|} = 1,$$

由正项级数的比较判别法,即得到定理的结论.

证毕

由定理 9.5.3,例 9.5.4 中的无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}\right)$ 在 $x > 1$ 时绝对收敛,在 $\frac{1}{2} < x \leqslant 1$ 时非绝对收敛.

例 9.5.5 证明 **Stirling** 公式(正整数):

$$n! \sim \sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n} \quad (n \to \infty).$$

证 设 $b_n = \frac{n!\mathrm{e}^{-n}}{n^{n+\frac{1}{2}}}, n = 1,2,\cdots$,则

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \mathrm{e}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}} = \mathrm{e}^{1+\left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$= 1 - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

令 $1 + a_n = \frac{b_n}{b_{n-1}}$,于是 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n$ 是收敛的定号级数,由定理 9.5.2 的推论 1,无穷乘积 $\prod\limits_{n=2}^{\infty}(1 + a_n) = \prod\limits_{n=2}^{\infty}\frac{b_n}{b_{n-1}}$ 收敛于非零的实数.

记

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b_1\prod_{n=2}^{\infty}\frac{b_n}{b_{n-1}} = A \neq 0,$$

利用例 9.5.2 中的 Wallice 公式,得到

$$A = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{b_n^2}{b_{2n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\sqrt{\frac{2}{n}} = \sqrt{2\pi},$$

此式即为

$$n! \sim \sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}(n\to\infty).$$

Stirling 公式给出了无穷大量$\{n!\}$增长阶的估计,在近似计算与极限计算中有重要的应用.

例 9.5.6 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

解

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}} = e.$$

最后,我们应用无穷乘积的性质来推导正弦函数 $\sin x$ 的无穷乘积的展开式.

例 9.5.7 证明:

$$\sin x = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

证 由三角函数的知识,我们知道

$$\sin 3\varphi = \sin\varphi(3-4\sin^2\varphi),$$

$$\sin 5\varphi = \sin\varphi(5-20\sin^2\varphi+16\sin^4\varphi),$$

利用三角恒等式

$$\sin(2k+1)\varphi = 2(1-2\sin^2\varphi)\sin(2k-1)\varphi-\sin(2k-3)\varphi,$$

应用数学归纳法,可以得到

$$\sin(2n+1)\varphi = \sin\varphi P(\sin^2\varphi),$$

其中 $P(u)$ 是 n 次多项式,它的常数项为

$$P(0) = \lim_{\varphi\to 0}P(\sin^2\varphi)$$

$$= \lim_{\varphi\to 0}\frac{\sin(2n+1)\varphi}{\sin\varphi} = 2n+1.$$

由于 $\varphi = \frac{k\pi}{2n+1}(k=1,2,\cdots,n)$ 使上面等式的左端取值为0,可知$\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}(k=1,2,\cdots,n)$ 恰好是多项式 $P(u)$ 的 n 个不同的根,于是

$$P(u) = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{u}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\right),$$

从而得到

$$\sin(2n+1)\varphi = (2n+1)\sin\varphi\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\right).$$

令 $x=(2n+1)\varphi$,代入后得到

$$\sin x = (2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\right),$$

固定 m,当 $n>m$ 时,成立

$$\sin x\Bigg/\left((2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\right)\right)$$
$$=\prod_{k=m+1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\right).$$

当 $n\to\infty$ 时上式左端的极限为

$$\frac{\sin x}{x\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)}.$$

由于

$$\sin^2\frac{x}{2n+1}\leqslant\frac{x^2}{(2n+1)^2},$$
$$\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}\geqslant\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{k^2\pi^2}{(2n+1)^2}\quad(k=1,2,\cdots,n),$$

关于上式的右端,有估计式

$$1>\prod_{k=m+1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}\right)\geqslant\prod_{k=m+1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{4k^2\pi^2}\right)>\prod_{k=m+1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{4k^2\pi^2}\right).$$

令 $n\to\infty$,就得到

$$1\geqslant\frac{\sin x}{x\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)}\geqslant\prod_{k=m+1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{4k^2\pi^2}\right).$$

由 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-x^2}{4k^2\pi^2}$ 的收敛性,可知无穷乘积 $\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{4k^2\pi^2}\right)$ 收敛,再根据定理9.5.1的(2),令 $m\to\infty$,由极限的夹逼性,得到

$$\sin x = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

证毕

习 题

1. 讨论下述无穷乘积的敛散性:

(1) $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1}$;　　(2) $\prod_{n=2}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n-1}}$;

(3) $\prod_{n=3}^{\infty} \cos\frac{\pi}{n}$;　　(4) $\prod_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{1}{n}$;

(5) $\prod_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{n^x}}$　　(6) $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$;

(7) $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{x^n}{2^n}\right)$;　　(8) $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$;

(9) $\prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}\right]$;　　(10) $\prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n^p}\right)\cos\frac{\pi}{n^q}\right]$.

2. 计算下述无穷乘积的值：

(1) $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n^2}\right)$;　　(2) $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$;　　(3) $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3-1}{n^3+1}$.

3. 设 $0 < x_n < \frac{\pi}{2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ 收敛，则 $\prod_{n=1}^{\infty} \cos x_n$ 收敛.

4. 设 $|a_n| < \frac{\pi}{4}$, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛，则 $\prod_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{\pi}{4}+a_n\right)$ 收敛.

5. 证明：

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot (2n)} = 0$;

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+n)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)} = 0 (0 < \beta < \alpha)$.

6. 设 $|q| < 1$，证明：

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+q^n) = 1\Big/\prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n-1}).$$

7. 设 $a_{2n-1} = -\frac{1}{\sqrt{n}}$, $a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 都发散，但无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n)$ 收敛.

第十章　函数项级数

§1　函数项级数的一致收敛性

点态收敛

现在我们将级数的概念从数推广到函数上去.

设 $u_n(x)(n=1,2,3,\cdots)$ 是具有公共定义域 E 的一列函数,我们将这无穷个函数的"和"

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$$

称为**函数项级数**,记为 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$.

函数项级数的收敛性可以借助数项级数来得到.

定义 10.1.1　设 $u_n(x)(n=1,2,3,\cdots)$ 在 E 上定义.对于任意固定的 $x_0\in E$,若数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ 收敛,则称函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在点 x_0 收敛,或称 x_0 是 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的**收敛点**.

函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛点全体所构成的集合称为 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的**收敛域**.

设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛域为 $D\subset E$,则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 就定义了集合 D 上的一个函数

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x),x\in D.$$

$S(x)$ 称为 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的**和函数**.由于这是通过逐点定义的方式得到的,因此称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 D 上**点态收敛**于 $S(x)$.

例 10.1.1　利用我们目前所掌握的知识(如级数收敛的 Cauchy 判别法,D'Alembert 判别法等)和定义 10.1.1,可知下述结论:

$\sum_{n=1}^{\infty}x^n$ 的收敛域是$(-1,1)$,和函数为 $S(x)=\frac{1}{1-x}$;

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 的收敛域为$[-1,1)$;

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ 的收敛域[-1,1];

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 的收敛域为 $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$;

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n!)x^n$ 的收敛域为单点集{0};

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-nx}$ 的收敛域为 $(0,+\infty)$,和函数为 $S(x)=\frac{1}{e^x-1}$.

给定一个函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$,可以作出它的**部分和函数**

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x),\quad x\in E.$$

显然,使 $\{S_n(x)\}$ 收敛的 x 全体正是集合 D. 因此在 D 上,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的和函数 $S(x)$ 就是其部分和函数序列 $\{S_n(x)\}$ 的极限,即有

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}u_k(x),\quad x\in D.$$

反过来,若给定一个函数序列 $\{S_n(x)\}(x\in E)$,只要令

$$\begin{cases}u_1(x)=S_1(x),\\ u_{n+1}(x)=S_{n+1}(x)-S_n(x)\quad(n=1,2,\cdots),\end{cases}$$

也可得到相应的函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$,它的部分和函数序列就是 $\{S_n(x)\}$.

所以,函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 与函数序列 $\{S_n(x)\}$ 的收敛性在本质上完全是一回事. 为方便起见,今后我们将经常通过讨论函数序列来研究函数项级数的性质.

函数项级数(或函数序列)的基本问题

通过前面的学习我们已经知道,若有限个函数 $u_1(x),u_2(x),\cdots,u_n(x)$ 在 D 上定义且具有某种分析性质,如连续性、可导性、Riemann 可积性(以下就称可积)等,则它们的和函数

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)$$

在 D 上仍保持同样的分析性质,且其和函数的极限(或导数、积分)可以通过对每个函数分别求极限(或导数、积分)后再求和来得到,即成立

(a) $$\lim_{x\to x_0}[u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)]$$
$$=\lim_{x\to x_0}u_1(x)+\lim_{x\to x_0}u_2(x)+\cdots+\lim_{x\to x_0}u_n(x);$$

(b) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)]$$
$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_1(x)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_2(x)+\cdots+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_n(x);$$

(c) $$\int_a^b[u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)]\mathrm{d}x$$
$$=\int_a^b u_1(x)\mathrm{d}x+\int_a^b u_2(x)\mathrm{d}x+\cdots+\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x.$$

这些性质给我们带来了很大的方便.

在研究函数项级数时,我们面对的是无限个 $u_n(x)(n=1,2,3,\cdots)$,它们的和函数 $S(x)$ 大多是不知道的,也就是说,我们只能借助 $u_n(x)$ 的分析性质来间接地获得 $S(x)$ 的分析性质.那么很自然地,我们希望在一定条件下,上述运算法则可以推广到无限个函数求和的情况,即当 $n\to\infty$ 时,上面的等式依然成立.

这个问题是函数项级数(或函数序列)研究中的基本问题,其实质是极限(或求导、求积分)运算与无限求和运算在什么条件下可以交换次序(由于求导、求积分与无限求和均可看作特殊的极限运算,因此更一般地,可将其统一视为两种极限运算的交换次序).下面我们将会看到,仅要求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 D 上点态收敛是不够的.

(1) 将性质(a)推广到无限个函数的情况,是指当 $u_n(x)$ 在 D 连续时,和函数 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 也在 D 连续,并且成立

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0}u_n(x),$$

即极限运算与无限求和运算可以交换次序(也称函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 可以**逐项求极限**).

对于函数序列 $\{S_n(x)\}$ 而言,相应的结论是极限函数 $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)$ 也在 D 连续,并且成立

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0}S_n(x),$$

即两种极限运算可以交换次序.

下面的例子说明,在点态收敛的情况下,上述性质不一定成立.

例 10.1.2　设 $S_n(x)=x^n$,则 $\{S_n(x)\}$ 在区间 $(-1,1]$ 收敛,极限函数为

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\begin{cases}0, & -1<x<1,\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

虽然对一切 n，$S_n(x)$ 在 $(-1,1]$ 连续（也是可导的），但极限函数 $S(x)$ 在 $x=1$ 不连续（当然更谈不上在 $x=1$ 可导）.

(2) 将性质(b)推广到无限个函数的情况，是指当 $u_n(x)$ 在 D 可导时，和函数 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 也在 D 可导，并且成立

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_n(x),$$

即求导运算与无限求和运算可以交换次序（也称函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 可以**逐项求导**）.

对于函数序列 $\{S_n(x)\}$ 而言，相应的结论是极限函数 $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)$ 也在 D 可导，并且成立

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S_n(x),$$

即求导运算与极限运算可以交换次序.

例 10.1.2 已说明在点态收敛情况下，和函数（或极限函数）可能不可导；下面将看到，即使和函数（或极限函数）可导，上述两等式也不一定成立.

例 10.1.3 设 $S_n(x)=\dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$，则 $\{S_n(x)\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 收敛，极限函数为 $S(x)=0$，从而导函数 $S'(x)=0$.

由于

$$S_n'(x)=\sqrt{n}\cos nx,$$

因此 $S_n(x)$ 的导函数所构成的序列 $\{S_n'(x)\}$ 并不收敛于 $S'(x)$（例如当 $x=0$，$S_n'(0)=\sqrt{n}\to+\infty$）.

(3) 将性质(c)推广到无限个函数的情况，是指当 $u_n(x)$ 在闭区间 $[a,b]\subset D$ 上可积时，和函数 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 也在 $[a,b]$ 上可积，并且成立

$$\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x,$$

即求积分运算与无限求和运算可以交换次序（也称函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 可以**逐项求积分**）.

对于函数序列 $\{S_n(x)\}$ 而言，相应的结论是极限函数 $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)$ 也在区间 $[a,b]$ 上可积，并且成立

$$\int_a^b\lim_{n\to\infty}S_n(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)\mathrm{d}x,$$

即求积分运算与极限运算可以交换次序.

下面的例 10.1.4 和例 10.1.5 说明,在点态收敛情况下,和函数(或极限函数)可能不可积;即使可积,上述两等式也不一定成立.

例 10.1.4 设

$$S_n(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\cdot n!\text{为整数},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为其他值}.\end{cases}$$

显然,对每一个 $n\in\mathbf{N}^+$,$S_n(x)$ 在任何有限区间上至多只有有限个不连续点,因而是可积的.

但是,当 x 是无理数时,对一切 n,$S_n(x)=0$,因此 $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=0$;当 x 是有理数$\frac{q}{p}$,$p\in\mathbf{N}^+$,$q\in\mathbf{Z}$时,对于 $n\geqslant p$,$S_n(x)=1$,因此 $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=1$.所以,$\{S_n(x)\}$ 的极限函数 $S(x)$ 就是熟知的 Dirichlet 函数,它在任何有限区间上都是不可积的.

例 10.1.5 设 $S_n(x)=nx(1-x^2)^n$,则 $\{S_n(x)\}$ 在区间$[0,1]$上收敛于极限函数 $S(x)=0$.显然对任意 $n\in\mathbf{N}^+$,$S_n(x)$ 与 $S(x)$ 都在$[0,1]$上可积,但是

$$\int_0^1 S_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 nx(1-x^2)^n\mathrm{d}x=-\frac{n}{2}\int_0^1(1-x^2)^n\mathrm{d}(1-x^2)$$

$$=\frac{n}{2(n+1)}\not\to\int_0^1 S(x)\mathrm{d}x\ (n\to\infty).$$

这些例子说明,为了解决这类交换运算次序问题,需要引进比"点态收敛"要求更强的新的收敛概念.

函数项级数(或函数序列)的一致收敛性

"函数序列$\{S_n(x)\}$ 在集合 D 上(点态)收敛于 $S(x)$"是指对于任意 $x_0\in$ D,数列$\{S_n(x_0)\}$收敛于 $S(x_0)$.用"$\varepsilon-N$"语言来表示,就是:对任意给定的 $\varepsilon>0$,可以找到正整数 N,当 $n>N$ 时,成立:

$$|S_n(x_0)-S(x_0)|<\varepsilon.$$

一般说来,这里的 N 应理解为$N(x_0,\varepsilon)$,即 N 不仅与ε有关,而且随着 x_0 的变化而变化.这意味着在 D 的不同处,$S_n(x)$ 的收敛速度可能大相径庭.

我们希望$\{S_n(x)\}$ 不仅在 D 上点点收敛于 $S(x)$,而且在 D 上的收敛速度具有某种整体一致性.通过分析其$\varepsilon-N$ 定义可以比较直观地发现,要做到这一点,关键在于存在一个仅与ε有关,而与 x_0 无关的 $N=N(\varepsilon)$.

定义 10.1.2 设$\{S_n(x)\}$,$x\in D$,是一函数序列,若对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在仅与 ε 有关的正整数$N(\varepsilon)$,当 $n>N(\varepsilon)$ 时,

$$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$$

对一切 $x \in D$ 成立，则称 $\{S_n(x)\}$ 在 D 上**一致收敛**于 $S(x)$，记为 $S_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows} S(x)$.

若函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), x \in D$ 的部分和函数序列 $\{S_n(x)\}$，其中 $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$，在 D 上一致收敛于 $S(x)$，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 D 上一致收敛于 $S(x)$.

采用符号表述，就是"$S_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows} S(x)$"$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N, \forall x \in D$：

$$| S_n(x) - S(x) | < \varepsilon;$$

和"$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 D 上一致收敛于 $S(x)$"$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N, \forall x \in D$：

$$\left| \sum_{k=1}^{n} u_k(x) - S(x) \right| = | S_n(x) - S(x) | < \varepsilon.$$

图 10.1.1 给出了一致收敛性的几何描述：对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $N = N(\varepsilon)$，当 $n > N(\varepsilon)$ 时，函数 $y = S_n(x), x \in D$ 的图象都落在带状区域

$$\{(x,y) \mid x \in D, S(x) - \varepsilon < y < S(x) + \varepsilon\}$$

之中.

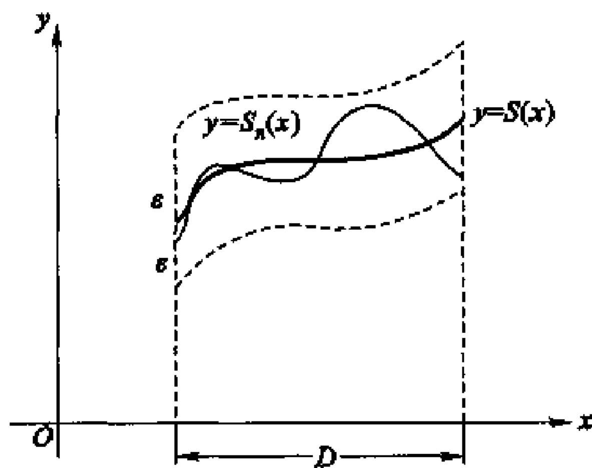


图 10.1.1

由于函数项级数的一致收敛性本质上就是部分和函数序列的一致收敛性，下面我们仅对函数序列举例讨论.

例 10.1.6 设 $S_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}$，则 $\{S_n(x)\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 收敛于极限函数 $S(x)=0$.

因为

$$|S_n(x)-S(x)|=\frac{|x|}{1+n^2x^2}\leqslant\frac{1}{2n},$$

所以对任意给定的 $\varepsilon>0$，只要取 $N=\left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，

$$|S_n(x)-S(x)|\leqslant\frac{1}{2n}<\varepsilon$$

对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$ 成立，因此 $\{S_n(x)\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于 $S(x)=0$.

从几何上看(图 10.1.2)，对任意给定的 $\varepsilon>0$，只要取 $N=\left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，函数 $y=S_n(x)$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 的图象都落在带状区域 $\{(x,y)\mid|y|<\varepsilon\}$ 中，这正是一致收敛的几何描述.

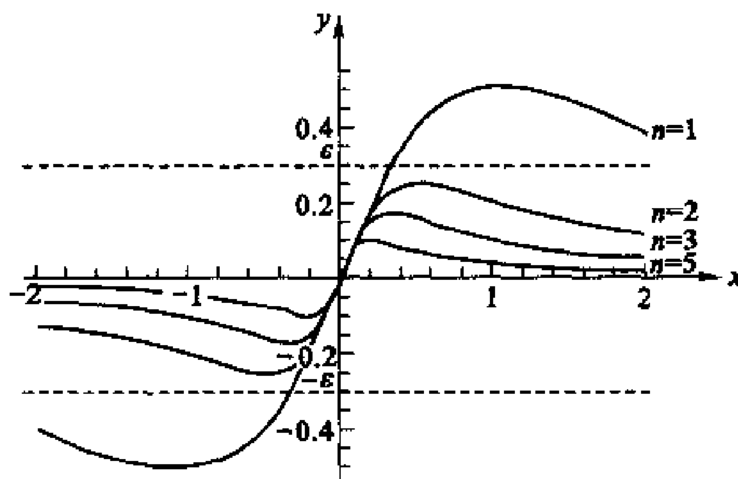


图 10.1.2

例 10.1.7 设 $S_n(x)=x^n$(见例 10.1.2)，我们考察 $\{S_n(x)\}$ 在区间 $[0,1)$ 上的一致收敛性.

对任意给定的 $0<\varepsilon<1$，要使

$$|S_n(x)-S(x)|=x^n<\varepsilon,$$

必须

$$n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln x},$$

因此 $N=N(x,\varepsilon)$ 至少须取 $\left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln x}\right]$. 由于当 $x\to1-$ 时，$\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln x}\to+\infty$，因此不

可能找到对一切 $x \in [0,1)$ 都适用的 $N = N(\varepsilon)$，换言之，$\{S_n(x)\}$ 在$[0,1)$上不是一致收敛的.

从几何上看(图 10.1.3)，对每个 n，函数 $y = x^n$ 的取值范围(即值域)都是$[0,1)$，因此它们的图象不可能落在带状区域$\{(x,y) \mid x \in [0,1), 0 < y < \varepsilon\}$中.

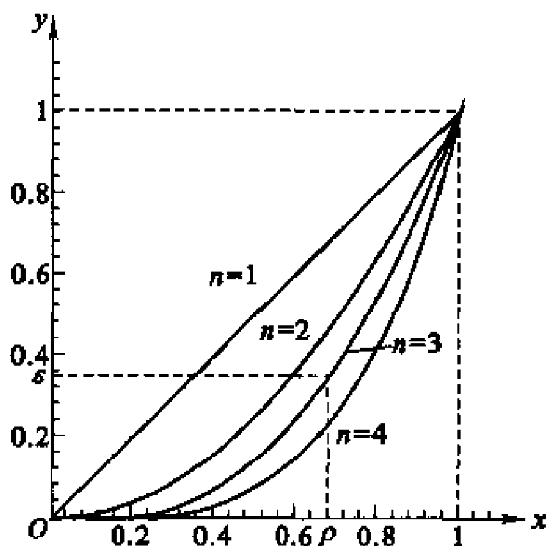


图 10.1.3

定义 10.1.3 若对于任意给定的闭区间$[a,b] \subset D$，函数序列$\{S_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于 $S(x)$，则称$\{S_n(x)\}$ 在 D 上**内闭一致收敛**于 $S(x)$.

显然，在 D 上一致收敛的函数序列必在 D 上内闭一致收敛，但其逆命题不成立.

例如，将例 10.1.7 中考察的区间$[0,1)$缩小为$[0,\rho]$，其中 $0 < \rho < 1$ 是任意的，则由

$$|S_n(x) - S(x)| = x^n < \rho^n,$$

只要取 $N = N(\varepsilon) = \left[\dfrac{\ln \varepsilon}{\ln \rho}\right]$，当 $n > N$ 时，

$$|S_n(x) - S(x)| < \rho^n < \varepsilon$$

对一切 $x \in [0,\rho]$ 成立，即$\{S_n(x)\}$在$[0,\rho]$($\rho < 1$)上是一致收敛的. 也就是说，尽管$\{x^n\}$在$[0,1)$上不一致收敛，但却是内闭一致收敛的.

从图 10.1.3 中可以看出，随着 n 的增大，函数 $y = x^n$ 在区间$[0,\rho]$上的图象越来越接近 x 轴，从而全部落在带状区域$\{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant \rho, 0 \leqslant y < \varepsilon\}$中.

下面我们建立关于一致收敛的两个充分必要条件，它们将有助于我们对

一致收敛性进行判断.

定理 10.1.1 设函数序列 $\{S_n(x)\}$ 在集合 D 上点态收敛于 $S(x)$，定义 $S_n(x)$ 与 $S(x)$ 的"距离"为

$$d(S_n, S) = \sup_{x\in D} |S_n(x) - S(x)|,$$

则 $\{S_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于 $S(x)$ 的充分必要条件是：

$$\lim_{n\to\infty} d(S_n, S) = 0.$$

证 设 $\{S_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于 $S(x)$，则对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $N = N(\varepsilon)$，当 $n > N$ 时，

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

对一切 $x \in D$ 成立，于是对 $n > N$，

$$d(S_n, S) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

这就说明

$$\lim_{n\to\infty} d(S_n, S) = 0.$$

反过来，若 $\lim\limits_{n\to\infty} d(S_n, S) = 0$，则对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $N = N(\varepsilon)$，当 $n > N$ 时，

$$d(S_n, S) < \varepsilon,$$

此式表明

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$$

对一切 $x \in D$ 成立，所以 $\{S_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于 $S(x)$.

证毕

对于例 10.1.6 中的 $S_n(x) = \dfrac{x}{1 + n^2x^2}$，$x \in (-\infty, +\infty)$，由于

$$|S_n(x) - S(x)| = \frac{|x|}{1 + n^2x^2} \leqslant \frac{1}{2n},$$

等号成立当且仅当 $x = \pm\dfrac{1}{n}$，可知

$$d(S_n, S) = \frac{1}{2n} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

因此 $\{S_n(x)\}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛于 $S(x) = 0$.

对于例 10.1.7 中的 $S_n(x) = x^n$，$x \in [0,1)$，由于

$$d(S_n, S) = \sup_{0\leqslant x<1} x^n = 1 \not\to 0 \quad (n \to \infty),$$

所以 $\{S_n(x)\}$ 在 $[0,1)$ 上不是一致收敛的.

例 10.1.8 设 $S_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2x^2}$，则 $\{S_n(x)\}$ 在 $(0, +\infty)$ 上收敛于

$S(x)=0$,由于

$$|S_n(x)-S(x)|=\frac{nx}{1+n^2x^2}\leqslant\frac{1}{2},$$

等号成立当且仅当 $x=\frac{1}{n}$,可知

$$d(S_n,S)=\frac{1}{2}\not\to 0\quad(n\to\infty),$$

因此$\{S_n(x)\}$在$(0,+\infty)$上不是一致收敛的.

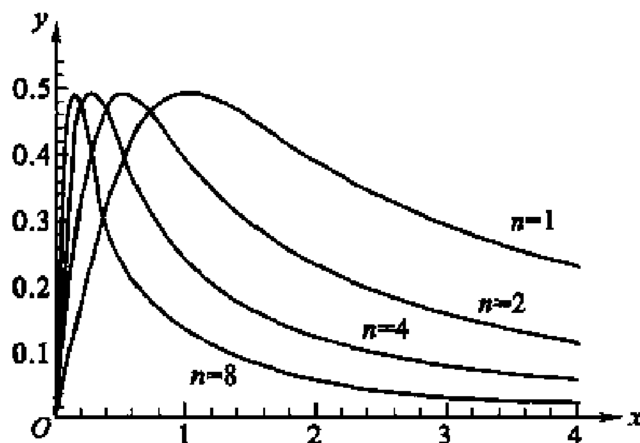


图 10.1.4

从几何上看(图 10.1.4),对每个 n,函数 $y=\frac{nx}{1+n^2x^2}$ 在 $x=\frac{1}{n}$ 取到最大值$\frac{1}{2}$,因此它们的图象不可能落在带状区域$\{(x,y)\mid 0<x<+\infty,|y|<\varepsilon<\frac{1}{2}\}$中.事实上,$\{S_n(x)\}$在任意包含 $x=0$ 或以 $x=0$ 为端点的区间上都不是一致收敛的.

若将上例中$\{S_n(x)\}$限制在任意有限区间$[\rho,A](0<\rho<A<+\infty)$上,则由 $|S_n(x)-S(x)|=\frac{nx}{1+n^2x^2}$ 及

$$\left(\frac{nx}{1+n^2x^2}\right)'=\frac{n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2},$$

可以知道当 $n>\frac{1}{\rho}$ 时,

$$d(S_n,S)=\frac{n\rho}{1+n^2\rho^2}\longrightarrow 0\quad(n\to\infty),$$

即$\{S_n(x)\}$在$[\rho,A]$上一致收敛于 $S(x)=0$. 也就是说,$\{S_n(x)\}$在$(0,+\infty)$上内闭一致收敛.

例 10.1.9 设 $S_n(x)=(1-x)x^n$,则 $\{S_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上收敛于 $S(x)=0$. 由

$$|S_n(x)-S(x)|=(1-x)x^n,$$

及

$$[(1-x)x^n]'=x^{n-1}[n-(n+1)x],$$

容易知道 $|S_n(x)-S(x)|$ 在 $x=\frac{n}{n+1}$ 取到最大值,从而

$$d(S_n,S)=\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$
$$=\left(\frac{1}{n+1}\right)\Big/\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\to 0 \quad (n\to\infty),$$

这就说明 $\{S_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 $S(x)=0$.

定理 10.1.2 设函数序列 $\{S_n(x)\}$ 在集合 D 上点态收敛于 $S(x)$,则 $\{S_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于 $S(x)$ 的充分必要条件是:对任意数列 $\{x_n\}$, $x_n\in D$,成立

$$\lim_{n\to\infty}(S_n(x_n)-S(x_n))=0.$$

证 先证必要性. 设 $\{S_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于 $S(x)$,则

$$d(S_n,S)=\sup_{x\in D}|S_n(x)-S(x)|\to 0 \quad (n\to\infty).$$

于是对任意数列 $\{x_n\}$, $x_n\in D$,成立

$$|S_n(x_n)-S(x_n)|\leqslant d(S_n,S)\to 0 \quad (n\to\infty).$$

关于充分性,我们采用反证法,也就是证明:若 $\{S_n(x)\}$ 在 D 上不一致收敛于 $S(x)$,则一定能找到数列 $\{x_n\}$, $x_n\in D$,使得 $S_n(x_n)-S(x_n)\not\to 0$ $(n\to\infty)$.

由于命题"$\{S_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于 $S(x)$"可以表述为

$$\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall n>N,\forall x\in D: |S_n(x)-S(x)|<\varepsilon,$$

因此它的否定命题"$\{S_n(x)\}$ 在 D 上不一致收敛于 $S(x)$"可以表述为:

$$\exists\varepsilon_0>0,\forall N>0,\exists n>N,\exists x\in D: |S_n(x)-S(x)|\geqslant\varepsilon_0.$$

于是,可以依次进行下述步骤:

取 $N_1=1,\exists n_1>1,\exists x_{n_1}\in D: |S_{n_1}(x_{n_1})-S(x_{n_1})|\geqslant\varepsilon_0$,

取 $N_2=n_1,\exists n_2>n_1,\exists x_{n_2}\in D: |S_{n_2}(x_{n_2})-S(x_{n_2})|\geqslant\varepsilon_0$,

……

取 $N_k=n_{k-1},\exists n_k>n_{k-1},\exists x_{n_k}\in D: |S_{n_k}(x_{n_k})-S(x_{n_k})|\geqslant\varepsilon_0$,

……

对于 $m\in\mathbf{N}^+\setminus\{n_1,n_2,\cdots,n_k,\cdots\}$,可以任取 $x_m\in D$,这样就得到数列

$\{x_n\}$, $x_n \in D$，由于它的子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得

$$|S_{n_k}(x_{n_k}) - S(x_{n_k})| \geqslant \varepsilon_0,$$

显然不可能成立

$$\lim_{n\to\infty}(S_n(x_n) - S(x_n)) = 0.$$

证毕

定理 10.1.2 常用于判断函数序列的不一致收敛.

如对例 10.1.7 中的 $S_n(x) = x^n, x \in [0,1)$，可以取 $x_n = 1 - \dfrac{1}{n} \in [0,1)$，则

$$S_n(x_n) - S(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{\mathrm{e}}(n \to \infty),$$

这说明 $\{S_n(x)\}$ 在 $[0,1)$ 上不一致收敛于 $S(x) = 0$；对例 10.1.8 中的 $S_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2x^2}, x \in (0, +\infty)$，可以取 $x_n = \dfrac{1}{n}$，则

$$S_n(x_n) - S(x_n) = \frac{1}{2},$$

同样也说明 $\{S_n(x)\}$ 在 $(0, +\infty)$ 上不一致收敛于 $S(x) = 0$.

例 10.1.10 设 $S_n(x) = nx(1 - x^2)^n, x \in [0,1]$（见例 10.1.5），则 $\{S_n(x)\}$ 在 $[0, 1]$ 收敛于 $S(x) = 0$. 取 $x_n = \dfrac{1}{n}$，则

$$S_n(x_n) - S(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \to 1 \quad (n \to \infty),$$

这说明 $\{S_n(x)\}$ 在 $[0, 1]$ 上不一致收敛于 $S(x) = 0$.

习　题

1. 讨论下列函数序列在指定区间上的一致收敛性.

(1) $S_n(x) = \mathrm{e}^{-nx}$　　(i) $x \in (0,1)$，　(ii) $x \in (1, +\infty)$;

(2) $S_n(x) = x\mathrm{e}^{-nx}$　　$x \in (0, +\infty)$;

(3) $S_n(x) = \sin\dfrac{x}{n}$　　(i) $x \in (-\infty, +\infty)$，(ii) $x \in [-A, A]$;

(4) $S_n(x) = \arctan nx$　　(i) $x \in (0,1)$，　(ii) $x \in (1, +\infty)$;

(5) $S_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}$　　$x \in (-\infty, +\infty)$;

(6) $S_n(x) = nx(1 - x)^n$　　$x \in [0,1]$;

(7) $S_n(x) = \dfrac{x}{n}\ln\dfrac{x}{n}$　　(i) $x \in (0,1)$，　(ii) $x \in (1, +\infty)$;

(8) $S_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^n}$ (i) $x\in(0,1)$, (ii) $x\in(1,+\infty)$;

(9) $S_n(x)=(\sin x)^n$ $x\in[0,\pi]$;

(10) $S_n(x)=(\sin x)^{\frac{1}{n}}$ (i) $x\in[0,\pi]$,

(ii) $x\in[\delta,\pi-\delta](\delta>0)$;

(11) $S_n(x)=\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ (i) $x\in(-\infty,+\infty)$, (ii) $x\in[-A,A]$;

(12) $S_n(x)=n\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{n}}-\sqrt{x}\right)$ $x\in(0,+\infty)$.

2. 设 $S_n(x)=n(x^n-x^{2n})$，则函数序列 $\{S_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 收敛但不一致收敛，且极限运算与积分运算不能交换，即

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 S_n(x)\mathrm{d}x\neq\int_0^1\lim_{n\to\infty}S_n(x)\mathrm{d}x.$$

3. 设 $S_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}$，则

(1) 函数序列 $\{S_n(x)\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛；

(2) $\{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S_n(x)\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致收敛；

(3) 极限运算与求导运算不能交换，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S_n(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim_{n\to\infty}S_n(x)$$

并不对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$ 成立.

4. 设 $S_n(x)=\dfrac{1}{n}\arctan x^n$，则函数序列 $\{S_n(x)\}$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛；试问极限运算与求导运算能否交换，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S_n(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim_{n\to\infty}S_n(x)$$

是否成立？

5. 设 $S_n(x)=n^a x\mathrm{e}^{-nx}$，其中 a 是参数. 求 a 的取值范围，使得函数序列 $\{S_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上

(1) 一致收敛；

(2) 积分运算与极限运算可以交换，即

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 S_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\lim_{n\to\infty}S_n(x)\mathrm{d}x;$$

(3) 求导运算与极限运算可以交换，即对一切 $x\in[0,1]$ 成立

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S_n(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim_{n\to\infty}S_n(x).$$

6. 设 $S'(x)$ 在区间(a,b)连续，

$$S_n(x)=n\left[S\left(x+\frac{1}{n}\right)-S(x)\right],$$

证明$\{S_n(x)\}$在(a,b)内闭一致收敛于 $S'(x)$.

7. 设 $S_0(x)$ 在$[0,a]$上连续，令

$$S_n(x)=\int_0^x S_{n-1}(t)\mathrm{d}t,\quad n=1,2,\cdots,$$

则$\{S_n(x)\}$在$[0,a]$上一致收敛于 0.

8. $S(x)$在$[0,1]$连续，$S(1)=0$，证明：$\{x^nS(x)\}$在$[0,1]$上一致收敛.

§2　一致收敛级数的判别与性质

一致收敛的判别

用定义或定理 10.1.1、定理 10.1.2 判断函数项级数（或函数序列）的一致收敛性需要先知道它的和函数（或极限函数），这在许多情况下是难以甚至不可能做到的，因此有必要寻找无须事先知道和函数（或极限函数）的判断条件.

我们知道，用 $\varepsilon-N$ 定义判断一个数列的极限，需要先知道它的极限值，而用 Cauchy 收敛原理则可以避开这一点. 将这个结论用于函数项级数，就有

定理 10.2.1（函数项级数一致收敛的 Cauchy 收敛原理）　*函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 D 上一致收敛的充分必要条件是：对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正整数 $N=N(\varepsilon)$，使*

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_m(x)|<\varepsilon$$

对一切 $m>n>N$ 与一切 $x\in D$ 成立.

证　必要性. 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在 D 上一致收敛，记和函数为 $S(x)$，则 $\forall\varepsilon>0,\exists N=N(\varepsilon),\forall n>N,\forall x\in D$：

$$\left|\sum_{k=1}^{n}u_k(x)-S(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是对一切 $m>n>N$ 与一切 $x\in D$，成立

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_m(x)|=\left|\sum_{k=1}^{m}u_k(x)-\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\right|$$

$$\leqslant\left|\sum_{k=1}^{m}u_k(x)-S(x)\right|+\left|\sum_{k=1}^{n}u_k(x)-S(x)\right|<\varepsilon.$$

充分性. 设 $\forall\varepsilon>0,\exists N=N(\varepsilon),\forall m>n>N,\forall x\in D$：

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_m(x)|$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{m} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

固定 $x \in D$,则数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 满足 Cauchy 收敛原理,因而收敛. 设

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad x \in D,$$

在$\left| \sum_{k=1}^{m} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ 中固定 n,令 $m \to \infty$,则得到

$$\left| \sum_{k=1}^{n} u_k(x) - S(x) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

对一切 $x \in D$ 成立,因而$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 D 上一致收敛于 $S(x)$.

证毕

可以相应写出函数序列一致收敛的 Cauchy 收敛原理:

"函数序列$\{S_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛"$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall m > n > N, \forall x \in D$:

$$| S_m(x) - S_n(x) | < \varepsilon.$$

定理 10.2.2(Weierstrass 判别法) 设函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), x \in D$ 的每一项 $u_n(x)$ 满足

$$| u_n(x) | \leqslant a_n, \quad x \in D,$$

并且数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 D 上一致收敛.

证 由于对一切 $x \in D$ 和正整数 $m > n$,有

$$\begin{aligned} &| u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_m(x) | \\ \leqslant &| u_{n+1}(x) | + | u_{n+2}(x) | + \cdots + | u_m(x) | \\ \leqslant &a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m, \end{aligned}$$

由定理 10.2.1 和数项级数的 Cauchy 收敛原理,即得到$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在 D 上一致收敛.

证毕

从上面证明可进一步知道,此时不仅$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 D 上一致收敛,并且对级数各项取绝对值所得的函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} | u_n(x) |$ 也在 D 上一致收敛.

例 10.2.1 若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 与$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 在$(-\infty,$

$+\infty)$ 上一致收敛. 比如, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p}(p>1)$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin nx}{n^2+1}$ 等函数项级数都在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

定理 10.2.3　设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x), x\in D$, 满足如下两个条件之一, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$ 在 D 上一致收敛.

(1) **(Abel 判别法)**　函数序列 $\{a_n(x)\}$ 对每一固定的 $x\in D$ 关于 n 是单调的, 且 $\{a_n(x)\}$ 在 D 上一致有界:

$$|a_n(x)|\leqslant M,\qquad \forall x\in D, \forall n\in\mathbf{N}^+;$$

同时, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n(x)$ 在 D 上一致收敛.

(2) **(Dirichlet 判别法)**　函数序列 $\{a_n(x)\}$ 对每一固定的 $x\in D$ 关于 n 是单调的, 且 $\{a_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于 0; 同时, 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n(x)$ 的部分和序列在 D 上一致有界:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}b_k(x)\right|\leqslant M,\qquad \forall x\in D, \forall n\in\mathbf{N}^+.$$

证　(1) 由 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n(x)$ 在 D 上的一致收敛性, 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $N=N(\varepsilon)$, 使

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m}b_k(x)\right|<\varepsilon$$

对一切 $m>n>N$ 与一切 $x\in D$ 成立. 应用 Abel 引理, 得到

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m}a_k(x)b_k(x)\right|\leqslant\varepsilon(|a_{n+1}(x)|+2|a_m(x)|)\leqslant 3M\varepsilon$$

对一切 $m>n>N$ 与一切 $x\in D$ 成立, 根据 Cauchy 收敛原理(定理 10.2.1), $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$ 在 D 上一致收敛. 这就证明了 Abel 判别法.

(2) 由 $\{a_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于 0, 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $N=N(\varepsilon)$, 当 $n>N$ 时, 对一切 $x\in D$ 成立

$$|a_n(x)|<\varepsilon.$$

由于对一切 $m>n>N$,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m}b_k(x)\right|=\left|\sum_{k=1}^{m}b_k(x)-\sum_{k=1}^{n}b_k(x)\right|\leqslant 2M,$$

应用 Abel 引理, 得到

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k(x)b_k(x)\right| \leqslant 2M(|a_{n+1}(x)| + 2|a_m(x)|) < 6M\varepsilon$$

对一切 $x \in D$ 成立.根据 Cauchy 收敛原理(定理 10.2.1),$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 D 上一致收敛.这就证明了 Dirichlet 判别法.

证毕

注　在定理 10.2.3 的两个判别法的条件中,都要求$\{a_n(x)\}$关于 n 单调,请读者思考是什么原因.另外,Dirichlet 判别法包含了 Abel 判别法(即 Abel 判别法可由 Dirichlet 判别法推出),请读者自己给出证明.

例 10.2.2　设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$在$[0,1]$上一致收敛.

证　显然$\{x^n\}$关于 n 单调,且

$$|x^n| \leqslant 1, \quad x \in [0, 1]$$

对一切 n 成立;$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是数项级数,它的收敛性就意味着关于 x 的一致收敛性.由 Abel 判别法,得到$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在$[0, 1]$上的一致收敛性.特别,如 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p} x^n (p > 0)$ 在$[0,1]$上一致收敛.

例 10.2.3　设$\{a_n\}$单调收敛于 0,则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 与$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 在$(0,2\pi)$内闭一致收敛.

证　数列$\{a_n\}$收敛于 0 意味着关于 x 一致收敛于 0.另外,对任意$0 < \delta < \pi$,当 $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$时,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \cos kx\right| = \frac{\left|\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}\right|}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}};$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| = \frac{\left|\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \cos\frac{x}{2}\right|}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}};$$

由 Dirichlet 判别法,得到$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 与$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 在$[\delta, 2\pi - \delta]$上的一致收敛性.

一致收敛级数的性质

现在我们可以来回答上一节中提出的关于函数项级数(或函数序列)的

基本问题,即在什么条件下,和函数(或极限函数)仍然保持连续性、可导性、可积性等分析性质.

定理 10.2.4 (连续性定理) 设函数序列 $\{S_n(x)\}$ 的每一项 $S_n(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,且在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$,则 $S(x)$ 在 $[a, b]$ 也连续.

证 设 x_0 是 $[a, b]$ 中任意一点.

由 $\{S_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $S(x)$,可知对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在自然数 N,使得

$$|S_N(x)-S(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

对一切 $x\in[a, b]$ 成立.特别,对 x_0 与任意的 $x_0+h\in[a,b]$,成立

$$|S_N(x_0)-S(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3},$$

$$|S_N(x_0+h)-S(x_0+h)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

由于 $S_N(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,所以存在 $\delta>0$,当 $|h|<\delta$ 时,

$$|S_N(x_0+h)-S_N(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

于是当 $|h|<\delta$ 时,

$$\begin{aligned}
&|S(x_0+h)-S(x_0)|\\
\leqslant&|S(x_0+h)-S_N(x_0+h)|+|S_N(x_0+h)-S_N(x_0)|+|S_N(x_0)-S(x_0)|\\
<&\varepsilon,
\end{aligned}$$

即 $S(x)$ 在 x_0 连续.

由 x_0 在 $[a,b]$ 中的任意性,就得到 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 连续.

证毕

在定理 10.2.4 的条件下,成立

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0}S_n(x),$$

即两个极限运算可以交换次序.

对应到函数项级数,连续性定理可以表述为:

定理 10.2.4′ 设对每个 n, $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$,则 $S(x)$ 在 $[a, b]$ 连续.这时,对任意 $x_0\in[a, b]$,成立

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0}u_n(x),$$

即极限运算与无限求和运算可以交换次序.

注 由于连续性是函数的一种局部性质(连续是逐点定义的),因此,在

每个 $u_n(x)$(或 $S_n(x)$)在 (a, b) 连续的前提下,只要 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$(或 $\{S_n(x)\}$)在 (a, b) 上内闭一致收敛于 $S(x)$,就足以保证 $S(x)$ 在开区间 (a,b) 连续.请读者结合分析 $\{x^n\}$ 在 $(0,1)$ 上的一致收敛情况与 $S(x)$ 的连续性自行思考.

例 10.2.4 由例 10.2.3,当 $\{a_n\}$ 单调收敛于 0 时,函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 在 $(0,2\pi)$ 都是内闭一致收敛的.由于每项 $a_n \sin nx$ 与 $a_n \cos nx$ 关于 x 都是连续的,由定理 10.2.4,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 在 $(0,2\pi)$ 都是连续的.比如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n \cos nx}{n^2+1}$ 等,都是 $(0,2\pi)$ 上的连续函数.

定理 10.2.5 设函数序列 $\{S_n(x)\}$ 的每一项 $S_n(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,且在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$,则 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 可积,且

$$\int_a^b S(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)\mathrm{d}x.$$

证 由定理 10.2.4,$S(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,因而在 $[a,b]$ 可积.由于 $\{S_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$,所以对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在正整数 N,当 $n>N$ 时,

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$$

对一切 $x \in [a,b]$ 成立,于是

$$\left| \int_a^b S_n(x)\mathrm{d}x - \int_a^b S(x)\mathrm{d}x \right| \leqslant \int_a^b \left| S_n(x) - S(x) \right| \mathrm{d}x < (b-a)\varepsilon.$$

证毕

在定理 10.2.5 条件下,成立

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} S_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)\mathrm{d}x,$$

即积分运算可以和极限运算交换次序.

对应到函数项级数,我们得到

定理 10.2.5′(逐项积分定理) 设对每个 n,$u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$,则 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 可积,且

$$\int_a^b S(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x,$$

即积分运算可以和无限求和运算交换次序.

注 在定理10.2.5(或定理10.2.5′)的条件下,可以得到"对任意固定的 $x_0 \in [a,b]$,函数序列 $\left\{\int_{x_0}^{x} S_n(t)\mathrm{d}t\right\}$(或函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x} u_n(t)\mathrm{d}t$)在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $\int_{x_0}^{x} S(t)\mathrm{d}t$"的结论,请读者自己给出证明.

例 10.2.5 证明:当 $x \in (-1,1)$ 时,成立

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots = \arctan x.$$

证 对任意 $x \in (-1,1)$,可以取到 $\delta > 0$,使 $x \in [-1+\delta, 1-\delta]$. 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}$ 的部分和序列 $\{S_n(x)\}$ 的通项为

$$S_n(x) = \frac{1}{1+x^2}[1-(-x^2)^n],$$

由于 $(-x^2)^n$ 在 $[-1+\delta, 1-\delta]$ 上一致收敛于 0,易知 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}$ 在 $[-1+\delta, 1-\delta]$ 上一致收敛于 $S(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

应用定理 10.2.5′ 进行逐项求积分

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x(-1)^{n-1}t^{2n-2}\mathrm{d}t = \int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2},$$

即得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots = \arctan x, \quad x \in (-1,1).$$

证毕

例 10.2.6 证明:当 $x \in (-1,1)$ 时,成立

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots = \ln(1+x).$$

证 对任意 $x \in (-1,1)$,取 $\delta > 0$,使 $x \in [-1+\delta, 1-\delta]$. 类似例 10.2.5,可知函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}$ 在 $[-1+\delta, 1-\delta]$ 上一致收敛于 $S(x) = \frac{1}{1+x}$.

应用定理 10.2.5′ 进行逐项积分

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x(-1)^{n-1}t^{n-1}\mathrm{d}t = \int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t},$$

即得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots = \ln(1+x), \quad x \in (-1,1).$$

证毕

定理 10.2.6 设函数序列$\{S_n(x)\}$满足

(1) $S_n(x)(n=1,2,\cdots)$在$[a,b]$连续可导;

(2) $\{S_n(x)\}$在$[a,b]$点态收敛于$S(x)$;

(3) $\{S_n'(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于$\sigma(x)$,

则$S(x)$在$[a,b]$可导,且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S(x)=\sigma(x).$$

证 由定理 10.2.4 与 10.2.5,可知$\sigma(x)$在$[a,b]$连续,且

$$\int_a^x\sigma(t)\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\int_a^x S_n'(t)\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}[S_n(x)-S_n(a)]=S(x)-S(a).$$

由于上式左端可导,可知$S(x)$也可导,且

$$S'(x)=\sigma(x).$$

证毕

在定理 10.2.6 的条件下,成立

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S_n(x).$$

即求导运算可以与极限运算交换次序.

对应到函数项级数,我们得到

定理 10.2.6′(逐项求导定理) 设函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$满足

(1) $u_n(x)(n=1,2,\cdots)$在$[a,b]$连续可导;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$点态收敛于$S(x)$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$在$[a,b]$上一致收敛于$\sigma(x)$,

则$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$可导,且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_n(x),$$

即求导运算可以与无限求和运算交换次序.

注 (1) 根据定理 10.2.5 和定理 10.2.5′的注,由$\{S_n'(x)\}$(或$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$)在$[a,b]$上一致收敛于$\sigma(x)$出发,可得到$\{S_n(x)\}$(或$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$)在$[a,b]$上不仅点态收敛,而且是一致收敛于$S(x)$的结论.

(2) 与连续性类似,由于可导性也是函数的一种局部性质(可导也是逐点

定义的),因此,在$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$(或$\{S_n(x)\}$)在$(a,b)$收敛于$S(x)$,并且每个$u_n(x)$(或$S_n(x)$)在$(a,b)$连续可导的前提下,同样只要$\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$(或$\{S_n'(x)\}$)在$(a,b)$内闭一致收敛,就足以保证$S(x)$在开区间$(a,b)$可导.

例 10.2.7 证明:对一切$x\in(-1,1)$,成立

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n = x+2x^2+3x^3+\cdots = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

证 我们知道函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}x^n$在$(-1,1)$上点态收敛于$S(x)=\frac{1}{1-x}$,而$\sum_{n=1}^{\infty}x^n$经过逐项求导,得到$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$,对任意$0<\rho<1$,当$x\in[-\rho,\rho]$时,

$$|nx^{n-1}|\leqslant n\rho^{n-1},$$

由$\sum_{n=1}^{\infty}n\rho^{n-1}$的收敛性,应用 Weierstrass 判别法(定理 10.2.2),可知$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$在$[-\rho,\rho]$上一致收敛,换言之,函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$在$(-1,1)$内闭一致收敛.

应用定理 10.2.6′,对$\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$进行逐项求导,即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2},$$

两边同时乘上x,就得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n = x+2x^2+3x^3+\cdots = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

需要指出的是,定理10.2.4,定理10.2.5与定理10.2.6中的条件都是充分而非必要的.对于定理10.2.4与定理10.2.5,我们可以考虑例10.1.8中的$S_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}$,函数序列$\{S_n(x)\}$在$[0,1]$收敛于$S(x)=0$,但收敛不是一致的,然而$S(x)=0$在$[0,1]$连续而且可积,并且

$$\int_0^1 S_n(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2n}\int_0^1\frac{\mathrm{d}(1+n^2x^2)}{1+n^2x^2}$$
$$=\frac{1}{2n}\ln(1+n^2)\to\int_0^1 S(x)\mathrm{d}x = 0\quad(n\to\infty).$$

对于定理10.2.6,可以考虑$f_n(x)=\frac{1}{2n}\ln(1+n^2x^2)$,函数序列$\{f_n(x)\}$

在[0,1]收敛于 $f(x)=0$. 由于 $f_n'(x)=S_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}$, $\{f_n'(x)\}$ 在[0,1]收敛于 $S(x)=0$, 但并非一致收敛. 虽然 $\{f_n(x)\}$ 不满足定理 10.2.6 的条件, 但仍然有 $f'(x)=S(x)$ 的结论.

由上面的讨论, 我们知道定理 10.2.4 的逆命题一般来说不成立, 即 $[a,b]$ 区间上连续的函数序列 $\{S_n(x)\}$ 收敛于连续函数 $S(x)$ 并不意味收敛在 $[a,b]$ 上具有一致性. 但是在一定的条件下, 我们还是可以得到收敛在 $[a,b]$ 上具有一致性的结论, 这就是下面要叙述的

定理 10.2.7(Dini 定理) 设函数序列 $\{S_n(x)\}$ 在闭区间 $[a,b]$ 点态收敛于 $S(x)$, 如果

(1) $S_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 在 $[a,b]$ 连续,

(2) $S(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,

(3) $\{S_n(x)\}$ 关于 n 单调, 即对任意固定的 $x\in[a,b]$, $\{S_n(x)\}$ 是单调数列,

则 $\{S_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$.

证 用反证法. 设 $\{S_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上不一致收敛于 $S(x)$, 则

$$\exists\varepsilon_0>0, \forall N>0, \exists n>N, \exists x\in[a,b]: |S_n(x)-S(x)|\geqslant\varepsilon_0.$$

依次取:

$$N=1, \exists n_1>1, \exists x_1\in[a,b]: |S_{n_1}(x_1)-S(x_1)|\geqslant\varepsilon_0,$$

$$N=n_1, \exists n_2>n_1, \exists x_2\in[a,b]: |S_{n_2}(x_2)-S(x_2)|\geqslant\varepsilon_0,$$

……

$$N=n_{k-1}, \exists n_k>n_{k-1}, \exists x_k\in[a,b]: |S_{n_k}(x_k)-S(x_k)|\geqslant\varepsilon_0,$$

……

于是得到数列 $\{x_k\}$, $x_k\in[a,b]$.

由 Weierstrass 定理, $\{x_k\}$ 必有收敛子列. 为叙述方便, 不妨设 $x_k\to\xi\in[a,b]$, $(k\to\infty)$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(\xi)=S(\xi)$, 所以对 $\varepsilon_0>0$, 存在 N, 成立

$$|S_N(\xi)-S(\xi)|<\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

由条件(1)与(2), $S_N(x)-S(x)$ 在 $x=\xi$ 连续, 由于 $x_k\to\xi(k\to\infty)$, 存在正整数 K, 使

$$|S_N(x_k)-S(x_k)|<\varepsilon_0$$

对一切 $k>K$ 成立.

现利用条件(3), 即 $\{S_n(x)\}$ 关于 n 的单调性, 则当 $n>N$ 与 $k>K$ 时,

$$|S_n(x_k) - S(x_k)| \leqslant |S_N(x_k) - S(x_k)| < \varepsilon_0.$$

由于 $n_k \to \infty (k \to \infty)$，当 k 充分大时，总能满足 $k > K$ 与 $n_k > N$，于是成立

$$|S_{n_k}(x_k) - S(x_k)| < \varepsilon_0,$$

这就与

$$|S_{n_k}(x_k) - S(x_k)| \geqslant \varepsilon_0 \quad (\forall k \in \mathbf{N}^+)$$

产生矛盾.

证毕

定理10.2.7中 x 的取值范围闭区间 $[a, b]$ 不能换成开区间 (a, b)，请读者自己分析一下原因.

对应函数项级数，我们得到

定理 10.2.7′　设函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 点态收敛于 $S(x)$，如果

(1) $u_n(x)(n = 1,2,\cdots)$ 在 $[a, b]$ 连续；

(2) $S(x)$ 在 $[a,b]$ 连续；

(3) 对任意固定的 $x \in [a, b]$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 是正项级数或负项级数，

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$.

处处不可导的连续函数之例

一般说来，数学分析所讨论的连续函数在其绝大部分连续点上总是可导的. 因此在数学分析的发展历史上，数学家们一直猜测：连续函数在其定义区间中，至多除去可列个点外都是可导的. 也就是说，连续函数的不可导点至多是可列集.

以后，随着级数理论的发展，Weierstrass 利用函数项级数第一个构造出了一个处处连续而处处不可导的函数，为上述猜测做了一个否定的终结. 下面我们叙述的反例相对简易些，它是由荷兰数学家 Van Der Waerden 于 1930 年给出的.

设 $\varphi(x)$ 表示 x 与最邻近的整数之间的距离，例如当 $x = 1.26$，则 $\varphi(x) = 0.26$；当 $x = 3.67$，则 $\varphi(x) = 0.33$. 显然 $\varphi(x)$ 是周期为 1 的连续函数，且 $|\varphi(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.

令

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(10^n x)}{10^n},$$

由于 $\left| \frac{\varphi(10^n x)}{10^n} \right| \leqslant \frac{1}{2 \cdot 10^n}$ 及 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 10^n}$ 的收敛性，应用定理10.2.2(Weierstrass判别法)，可知 $f(x)$ 表达式中的函数项级数关于 $x \in (-\infty, +\infty)$ 一致收敛. 再由 $\varphi(x)$ 的连续性，

应用定理 10.2.4′,得知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续.

现考虑 $f(x)$ 在任意一点 x 的可导性.由于 $f(x)$ 的周期性,不妨设 $0\leqslant x<1$,并将 x 表示成无限小数

$$x=0.a_1a_2\cdots a_n\cdots,$$

若 x 是有限小数时,则在后面添上无穷多个 0.然后我们取

$$h_m=\begin{cases}10^{-m}, & \text{当 } a_m=0,1,2,3,5,6,7,8,\\ -10^{-m}, & \text{当 } a_m=4,9,\end{cases}$$

例如设 $x=0.309\,546\cdots$,则我们取 $h_1=10^{-1},h_2=10^{-2},h_3=-10^{-3},h_4=10^{-4},h_5=-10^{-5},h_6=10^{-6},\cdots$.显然

$$h_m\to 0\quad(m\to\infty).$$

根据 h_m 的取法,可以知道:

(1) 当 $n\geqslant m$ 时,$\varphi(10^n(x+h_m))=\varphi(10^nx\pm 10^{n-m})=(10^nx)$;

(2) 当 $n<m$ 时,$10^n(x+h_m)$ 与 10^nx 有相同的最邻近整数点,因而

$$\varphi(10^n(x+h_m))-\varphi(10^nx)=\pm 10^{n-m},$$

其中符号是由 x,n 与 m 唯一确定.

现在考察

$$\frac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi(10^n(x+h_m)-\varphi(10^nx))}{10^nh_m},$$

在上式右端的和式中,当 $n\geqslant m$ 时,由于 $\varphi(10^n(x+h_m))=\varphi(10^nx)$,这些项都为 0;当 $n<m$ 时,由于分子与分母都为 $\pm 10^{n-m}$,但符号可能不同,因此这些项不是 $+1$ 就是 -1.于是我们得到

$$\frac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m}=\sum_{n=0}^{m-1}\pm 1,$$

等式右端必定是整数,且其奇偶性与 m 一致,由此可知

$$\lim_{m\to\infty}\frac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m}$$

不存在,也就是说,$f(x)$ 在任意一点 x 是不可导的.这样,一个处处连续,但处处不可导的函数反例通过函数项级数这一工具而被构造出来了.

习　题

1. 讨论下列函数项级数在所指定区间上的一致收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$,　　$x\in[0,1]$;

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)^2x^n$,　　$x\in[0,1]$;

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}xe^{-nx}$,　　(i) $x\in(0,+\infty)$,

(ii) $x \in [\delta, +\infty), \delta > 0$;

(4) $\sum_{n=0}^{\infty} x^2 e^{-nx}$, $x \in (0, +\infty)$;

(5) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{1+n^3x^2}$, $x \in (-\infty, +\infty)$;

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$, $x \in (-\infty, +\infty)$;

(7) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(1-x)x^n$, $x \in [0,1]$;

(8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$, $x \in (-\infty, +\infty)$;

(9) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \sin\frac{1}{3^n x}$, (i) $x \in (0, +\infty)$,

(ii) $x \in [\delta, +\infty)$, $\delta > 0$;

(10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n}}$, $x \in (-\infty, +\infty)$;

(11) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, $x \in (-\infty, +\infty)$;

(12) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

2. 证明:函数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2+1}$ 在$(0,2\pi)$连续,且有连续的导函数.

3. 证明:函数 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$ 在$(0,+\infty)$连续,且有各阶连续导数.

4. 证明:函数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 在$(1,+\infty)$连续,且有各阶连续导数;函数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$ 在$(0,+\infty)$连续,且有各阶连续导数.

5. 证明:函数项级数 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\frac{x}{n^2}$ 可以逐项求导,即

$$\frac{d}{dx}f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}\arctan\frac{x}{n^2}.$$

6. 设数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,证明:

(1) $\lim_{x\to 0+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$;　(2) $\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}$.

7. 设 $u_n(x), v_n(x)$ 在区间(a,b)连续,且 $|u_n(x)| \leqslant v_n(x)$ 对一切 n

$\in \mathbf{N}^+$ 成立. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ 在 (a,b) 点态收敛于一个连续函数, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 也必然收敛于一个连续函数.

8. 设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $x=a$ 与 $x=b$ 收敛, 且对一切 $n \in \mathbf{N}^+$, $u_n(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 单调增加, 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

9. 设对一切 $n \in \mathbf{N}^+$, $u_n(x)$ 在 $x=a$ 右连续, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $x=a$ 发散, 则对任意 $\delta > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $(a, a+\delta)$ 必定非一致收敛.

§3 幂级数

下面我们讨论一类特殊的函数项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots,$$

这样的函数项级数称为**幂级数**.

显然, 幂级数可以看成是一个"无限次多项式", 而它的部分和函数 $S_n(x)$ 是一个 n 次多项式. 为了方便, 我们通常取 $x_0 = 0$, 也就是讨论

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$

只要对所得的结果做一个平移 $x = t - x_0$, 就可以推广到 $x_0 \neq 0$ 的情况.

幂级数的收敛半径

对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 我们首先有

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x|,$$

根据数项级数的 Cauchy 判别法, 当上面的极限值小于 1 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛; 当上面的极限值大于 1 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散. 如果令

$$A = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

定义

$$R=\begin{cases}+\infty, & \text{当 } A=0,\\ \dfrac{1}{A}, & \text{当 } A\in(0,+\infty),\\ 0, & \text{当 } A=+\infty,\end{cases}$$

则我们有

定理 10.3.1(Cauchy-Hadamard 定理) 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 当 $|x|<R$ 时绝对收敛;当 $|x|>R$ 时发散.

注意在区间的端点 $x=\pm R$,幂级数收敛与否必须另行判断.

对于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$,则有平行的结论:幂级数在以 x_0 为中心,以 R 为半径的区间内绝对收敛,而在该区间外发散.在区间的端点 $x_0\pm R$,幂级数的敛散性必须另行判断.

数 R 称为幂级数的**收敛半径**.当 $R=+\infty$ 时,幂级数对一切 x 都是绝对收敛的;当 $R=0$ 时,幂级数仅当 $x=x_0$ 时收敛.

例 10.3.1 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{n^2}$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x+1)^n$ 的收敛半径都是 $R=1$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$ 的收敛域是 $[-1,1)$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{n^2}$ 的收敛域是 $[0,2]$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x+1)^n$ 收敛域是 $(-2,0)$.

例 10.3.2 考察幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{[2+(-1)^n]^n}{n}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^n$ 的收敛情况.

解 因为

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{[2+(-1)^n]^n}{n}}=3,$$

所以收敛半径为 $R=\dfrac{1}{3}$.请读者自己证明,当 $x=x_0+R=\dfrac{5}{6}$ 与 $x=x_0-R=\dfrac{1}{6}$ 时,幂级数都是发散的.因此它的收敛域是 $\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{5}{6}\right)$.

在判断数项级数的收敛性时,除了 Cauchy 判别法,还有 D'Alembert 判别法,下面的定理就是 D'Alembert 判别法在幂级数上的应用.

定理 10.3.2 (D'Alembert 判别法) 如果对幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 成立

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=A,$$

则此幂级数的收敛半径为 $R=\dfrac{1}{A}$.

定理的证明包含在引理 9.3.1 给出的不等式

$$\varliminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

中,此处从略.

例 10.3.3 考察幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^n}{n!}x^n$ 的收敛情况.

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \mathrm{e},$$

所以收敛半径为 $R = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

当 $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$ 时, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^n}{n!}x^n$ 是正项级数,由 Stirling 公式(例 9.5.5),

$$\frac{n^n}{n!}x^n \sim \frac{n^n}{\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}(n\to\infty),$$

可知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^n}{n!}x^n$ 在 $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$ 时发散;

当 $x = -\frac{1}{\mathrm{e}}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^n}{n!}x^n$ 是交错级数,由于

$$\left|\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}x^{n+1}}{\frac{n^n}{n!}x^n}\right| = \frac{1}{\mathrm{e}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1$$

且

$$\left|\frac{n^n}{n!}x^n\right| \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \to 0 \quad (n\to\infty),$$

可知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^n}{n!}x^n$ 在 $x = -\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时是 Leibniz 级数,所以收敛.

综上所述, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^n}{n!}x^n$ 的收敛域是 $\left[-\frac{1}{\mathrm{e}},\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

幂级数的性质

Abel 曾系统地研究过幂级数,并建立了 Abel 第一定理与第二定理,其中第一定理是这样的:设 $x_0 = 0$,如果幂级数在点 ξ 收敛,则当 $|x| < |\xi|$ 时绝对收敛;如果幂级数在点 η 发散,则当 $|x| > |\eta|$ 时发散.显然,这一结论已包含在定理 10.3.1 之中.下面我们叙述第二定理:

定理 10.3.3(Abel 第二定理) 设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为$R$,则

(i) $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$(-R,R)$内闭一致收敛,即在任意闭区间$[a,b]\subset(-R,R)$上一致收敛;

(ii) 若$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$x=R$收敛,则它在任意闭区间$[a,R]\subset(-R,R]$上一致收敛.

证

(i) 记$\xi=\max(|a|,|b|)$,对一切$x\in[a,b]$,成立

$$|a_nx^n|\leqslant|a_n\xi^n|.$$

由于$|\xi|<R$,所以$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n\xi^n|$收敛,由 Weierstrass 判别法,可知$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$[a,b]$上一致收敛.

(ii) 当$\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n$收敛时,由于$\left(\frac{x}{R}\right)^n$在$[a,R]$上一致有界$\left(\left|\left(\frac{x}{R}\right)^n\right|\leqslant 1\right)$,且关于$n$单调,根据 Abel 判别法,

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nR^n)\left(\frac{x}{R}\right)^n$$

在$[a,R]$上一致收敛.

证毕

类似地可进一步得到:若$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$x=-R$收敛,则它在任意闭区间$[-R,b]\subset[-R,R)$上一致收敛;若$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$x=\pm R$都收敛,则它在$[-R,R]$上一致收敛.

概括地说:幂级数在包含于收敛域中的任意闭区间上一致收敛.

根据 Abel 第二定理,可以得到幂级数的如下性质:

(1) **和函数的连续性:幂级数在它的收敛域上连续.**

定理 10.3.4 设$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为$R$,则和函数在$(-R,R)$连续;若$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$x=R$(或$x=-R$)收敛,则和函数在$x=R$(或$x=-R$)左(右)连续.

证 幂级数的一般项是幂函数,显然是连续函数.由 Abel 第二定理,

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域上内闭一致收敛，根据一致收敛函数项级数的和函数的连续性，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在包含于收敛域中的任意闭区间上连续，因而在它的整个收敛域上连续.

证毕

（2）**逐项可积性：幂级数在包含于收敛域中的任意闭区间上可以逐项求积分.**

定理 10.3.5　设 a, b 是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛域中任意二点，则

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n \mathrm{d}x,$$

特别，取 $a = 0, b = x$，则有

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1},$$

且逐项积分所得幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 与原幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 具有相同的收敛半径.

证　由 Abel 第二定理，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在其收敛域上内闭一致收敛. 应用一致收敛函数项级数的逐项积分定理，即得到幂级数的逐项可积性.

由于

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{\frac{|a_n|}{n+1}} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

可知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 具有相同的收敛半径.

证毕

注　虽然逐项积分所得的幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 与原幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n c^n$ 收敛半径相同，但收敛域有可能扩大. 请注意下面两个例题.

例 10.3.4　在例 10.2.5 中，通过对 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2}$ 的逐项积分，已得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots = \arctan x, \quad x \in (-1,1).$$

显然，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2}$ 的收敛域是 $(-1,1)$，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}$ 的收敛域

是$[-1,1]$.

由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$在$x=\pm 1$收敛,由幂级数和函数的连续性,即可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to 1-}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\lim_{x\to 1-}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$$
$$=\lim_{x\to 1-}\arctan x=\frac{\pi}{4},$$

也就是

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}+\cdots.$$

例 10.3.5 在例 10.2.6 中,通过对$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}$的逐项积分,已得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots=\ln(1+x),\quad x\in(-1,1).$$

显然,$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}$的收敛域是$(-1,1)$,但$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$的收敛域是$(-1,1]$.

由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$在$x=1$收敛,由幂级数和函数的连续性,即可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to 1-}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$
$$=\lim_{x\to 1-}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=\lim_{x\to 1-}\ln(1+x)=\ln 2,$$

也就是

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\cdots,$$

此即为例 2.4.10 的结果.

(3) **逐项可导性:幂级数在它的收敛域内部可以逐项求导.**

定理 10.3.6 设$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为$R$,则它在$(-R,R)$可以逐项求导,即

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}a_nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},$$

且逐项求导所得的幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$的收敛半径也是$R$.

证 首先我们有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n-1]{n\,|a_n|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ 的收敛半径也是 R，因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ 在 $(-R,R)$ 内闭一致收敛. 再由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-R,R)$ 收敛，应用函数项级数的逐项求导定理，即得到幂级数的逐项可导性.

证毕

注 虽然逐项求导所得的幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ 与原幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 收敛半径相同，但收敛域有可能缩小. 如考察例 10.3.4 中的 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$ 与例 10.3.5 中的 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$. 前者的收敛域是 $[-1,1]$；后者的收敛域是 $(-1,1]$，但它们经过逐项求导后，收敛域都缩小为 $(-1,1)$.

例 10.3.6 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 的和函数.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{(n+1)!}}{\dfrac{1}{n!}}=0,$$

可知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 的收敛半径为 $R=+\infty$，即它的收敛域为 $(-\infty,+\infty)$. 令 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$，$x\in(-\infty,+\infty)$，应用幂级数的逐项可导性，可得

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n!}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=S(x).$$

于是有

$$(\mathrm{e}^{-x}S(x))'=\mathrm{e}^{-x}(S'(x)-S(x))=0,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

这说明 $\mathrm{e}^{-x}S(x)$ 是一个常数，且该常数为 $(\mathrm{e}^{-x}S(x))_{x=0}=1$. 从而得到

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\mathrm{e}^x,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

例 10.3.7 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3^n}$ 之和.

解 先考察幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-1,1),$$

逐项求导后,再两边乘以 x,得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad x \in (-1,1).$$

令 $x = \frac{1}{3}$,则有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{3}{4},$$

于是得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n} = 2\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 2.$$

在定理9.4.7,我们曾证明,若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛,则它们的 Cauchy 乘积

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i+j=n+1} a_i b_j = \sum_{n=1}^{\infty} (a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1)$$

等于 $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$. 但是当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 不是绝对收敛时,则上述结论不一定成立. 下面我们应用幂级数的性质证明,即使 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 没有绝对收敛性,但只要它们的 Cauchy 乘积 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛,则上述结论仍然成立.

例 10.3.8 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 及它们的 Cauchy 乘积 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛,则

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right).$$

证 定义三个幂级数及它们的和函数如下:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n, \quad h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n.$$

则这三个幂级数在 $x = 1$ 都收敛,根据幂级数的性质,$f(x)$,$g(x)$,$h(x)$ 三个和函数都在$[0,1]$连续,且当$0 < x < 1$时,三个幂级数都绝对收敛,于是由定理 9.4.7,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n\right) = x\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n,$$

此即为

$$f(x)g(x) = xh(x), \quad x \in (0,1).$$

令 $x \to 1-$,得到 $f(1)g(1) = h(1)$,也就是

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n.$$

习 题

1. 求下列幂级数的收敛半径与收敛域:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} x^n$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)(x-1)^n$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n \cdot 2^n}$; (4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n+1)}{n+1}(x+1)^n$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$; (6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{n^n} x^{n^2}$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$; (8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$;

(9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^n$.

2. 设 $a > b > 0$,求下列幂级数的收敛域:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}\right) x^n$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n}$;

(3) $ax + bx^2 + a^2x^3 + b^2x^4 + \cdots + a^n x^{2n-1} + b^n x^{2n} + \cdots$.

3. 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2,讨论下列幂级数的收敛半径:

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n x^n$.

4. 应用逐项求导或逐项求积分,求下列幂级数的和函数,并指出它们的定义域.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$; (2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^2 x^n$; (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) x^n$.

5. 设 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，则不论 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = r$ 是否收敛，只要 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 在 $x = r$ 收敛，就成立

$$\int_0^r f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} r^{n+1},$$

并由此证明：

$$\int_0^1 \ln \frac{1}{1-x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

6. 证明：

(1) $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$ 满足方程 $y^{(4)} = y$；

(2) $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$ 满足方程 $xy'' + y' - y = 0$.

7. 应用幂级数性质求下列级数的和：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{2^n}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+2)}{4^{n+1}}$；　　(4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{2^n}$；

(5) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^n(2n+1)}$；　　(6) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n(n^2-1)}$.

§4 函数的幂级数展开

Taylor 级数与余项公式

上一节中已展示了幂级数的良好性质. 显而易见，如果一个函数在某一区间上能够表示成一个幂级数，将给理论上讨论其性质带来极大的方便，同时也具有重要的应用价值. 下面我们就来讨论函数可以表示成幂级数的条件，以及在这些条件满足时如何将函数表示成幂级数.

假设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域 $O(x_0, r)$ 可表示成幂级数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad x \in O(x_0, r),$$

也就是说，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ 在 $O(x_0, r)$ 上的和函数为 $f(x)$. 根据幂级数的逐项可导性，$f(x)$ 必定在 $O(x_0, r)$ 上任意阶可导，且对一切 $k \in \mathbf{N}^+$，

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n (x - x_0)^{n-k}.$$

令 $x = x_0$，得到

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0,1,2,\cdots,$$

也就是说，系数 $\{a_n\}$ 由和函数 $f(x)$ 唯一确定，我们称它们为 $f(x)$ 在 x_0 的 **Taylor 系数**.

反过来，设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域 $O(x_0, r)$ 上任意阶可导，则我们能求出它在 x_0 的 Taylor 系数 $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$，$n = 0,1,2\cdots$，并作出幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

这一幂级数称为 $f(x)$ 在 x_0的 **Taylor 级数**.

现在我们要问：是否存在常数 $\rho(0 < \rho \leqslant r)$，使得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ 在 $O(x_0, \rho)$ 上收敛于 $f(x)$？下面的例子告诉我们，答案并不是肯定的.

例 10.4.1　设

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

当 $x \neq 0$ 时，

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}},$$

$$f''(x) = \left(\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4}\right) e^{\frac{1}{x^2}},$$

$$\cdots\cdots$$

$$f^{(k)}(x) = P_{3k}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}},$$

$$\cdots\cdots$$

其中 $P_n(u)$ 是关于 u 的 n 次多项式.

由此可以依次得到

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0,$$

$$f''(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2}{x^4} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0,$$

$$\cdots\cdots$$

$$f^{(k)}(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f^{(k-1)}(x) - f^{(k-1)}(0)}{x} = \lim_{x \to 0} P_{3k-2}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} = 0,$$

……

因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 的 Taylor 级数为

$$0+0x+\frac{0}{2!}x^2+\frac{0}{3!}x^3+\cdots+\frac{0}{n!}x^n+\cdots,$$

它在$(-\infty,+\infty)$上收敛于和函数 $S(x)=0$. 显然,当 $x\neq 0$ 时,

$$S(x)\neq f(x).$$

这说明,一个任意阶可导的函数的 Taylor 级数并非一定能收敛于函数本身.

为了寻求一个函数的 Taylor 级数收敛于它本身的条件,我们回忆在第五章 §3 中所得到的 Taylor 公式:设 $f(x)$ 在 $O(x_0,r)$ 有 $n+1$ 阶导数,则

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+r_n(x),$$

其中 $r_n(x)$ 是 n 阶 Taylor 公式的余项. 现在我们假定讨论的函数 $f(x)$ 在 $O(x_0,r)$ 上任意阶可导,也就是说,上面的 Taylor 公式对一切自然数 n 成立,于是我们可以断言:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

在 $O(x_0,\rho)(0<\rho\leqslant r)$ 成立的充分必要条件是

$$\lim_{n\to\infty}r_n(x)=0$$

对一切 $x\in O(x_0,\rho)$ 成立.

这时,我们才称 $f(x)$ 在 $O(x_0,\rho)$ 可以展开成幂级数(或 Taylor 级数),或者称 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 是 $f(x)$ 在 $O(x_0,\rho)$ 上的**幂级数展开**(或 **Taylor 展开**).

在第五章 §3 中,曾导出余项

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\quad 0<\theta<1,$$

$r_n(x)$ 的这一形式称为 Lagrange 余项. 为了讨论各种函数的 Taylor 展开,我们还需要 $r_n(x)$ 的另一形式,即积分形式:

定理 10.4.1 设 $f(x)$ 在 $O(x_0,r)$ 上任意阶可导,则

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+r_n(x),\quad x\in O(x_0,r),$$

其中

$$r_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\mathrm{d}t.$$

证 由表达式

$$r_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

出发,逐次对等式两端进行求导运算,可依次得到

$$r_n'(x) = f'(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x - x_0)^{k-1},$$

$$r_n''(x) = f''(x) - \sum_{k=2}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-2)!}(x - x_0)^{k-2},$$

$$\cdots\cdots$$

$$r_n^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0),$$

$$r_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x).$$

令 $x = x_0$,便有

$$r_n(x_0) = r_n'(x_0) = r_n''(x_0) = \cdots = r_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

逐次应用分部积分法,可得

$$\begin{aligned}
r_n(x) &= r_n(x) - r_n(x_0) = \int_{x_0}^{x} r_n'(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{x_0}^{x} r_n'(t)\mathrm{d}(t - x) \\
&= \int_{x_0}^{x} r_n''(t)(x - t)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{2!}\int_{x_0}^{x} r_n''(t)\mathrm{d}(t - x)^2 \\
&= \frac{1}{2!}\int_{x_0}^{x} r_n'''(t)(x - t)^2\mathrm{d}t \\
&\cdots\cdots \\
&= \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} r_n^{(n+1)}(t)(x - t)^n\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x - t)^n\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

证毕

对余项 $r_n(x)$ 的积分形式应用积分第一中值定理,考虑到当 $t \in [x_0, x]$(或 $[x, x_0]$)时,$(x - t)^n$ 保持定号,于是就有

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int_{x_0}^{x}(x - t)^n\mathrm{d}t \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1,$$

这就是我们已经知道的 Lagrange 余项；如果将 $f^{(n+1)}(t)(x-t)^n$ 看作一个函数，应用积分第一中值定理，则有

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n}{n!}\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}t \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1,$$

$r_n(x)$ 的这一形式称为 **Cauchy 余项**.

初等函数的 Taylor 展开

我们先通过讨论使余项 $r_n(x)$ 趋于 0 的 x 的范围，导出基本初等函数的幂级数展开式，然后介绍将一般初等函数展开成幂级数的一些方法.

(1) $f(x) = \mathrm{e}^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

证 在第五章 §4 我们得到 e^x 在 $x=0$ 的 Taylor 公式

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + r_n(x), \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

其中 $r_n(x)$ 表示成 Lagrange 余项为

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{\mathrm{e}^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

由于

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

对一切 $x \in (-\infty, +\infty)$ 成立，所以 e^x 的 Taylor 展开式成立.

(2) $f(x) = \sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

证 在第五章 §4 我们得到 $\sin x$ 在 $x=0$ 的 Taylor 公式

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + r_{2n+2}(x),$$

$$x \in (-\infty, +\infty),$$

其中

$$r_{2n+2}(x) = \frac{f^{(2n+3)}(\theta x)}{(2n+3)!}x^{2n+3} = \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\sin\left(\theta x + \frac{2n+3}{2}\pi\right),$$

$$0<\theta<1.$$

由于

$$|r_{2n+2}(x)|\leqslant\frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}\to 0\quad(n\to\infty)$$

对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$ 成立，所以 $\sin x$ 的 Taylor 展开式成立.

同理可以得到

(3) $f(x)=\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$

$=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty).$

回忆在例 10.3.4 和例 10.3.5 中的讨论，我们有

(4) $f(x)=\arctan x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$

$=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots,\quad x\in[-1,1].$

(5) $f(x)=\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$

$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots,\quad x\in(-1,1].$

(6) $f(x)=(1+x)^\alpha$，$\alpha\neq 0$ 是任意实数.

当 α 是正整数 m 时，

$$f(x)=(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2}x^2+\cdots+mx^{m-1}+x^m,$$

即它的 Taylor 展开就是二项式展开，只有有限个项.

当 α 不是正整数时，由于 $f(x)=(1+x)^\alpha$ 的各阶导数为

$$f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k},\quad k=1,2,\cdots,$$

可知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的 Taylor 级数为

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n.$$

利用第五章的记号

$$\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!},\quad(n=1,2,\cdots)$$

和

$$\binom{\alpha}{0}=1$$

可将 $(1+x)^\alpha$ 的 Taylor 级数记为 $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$.

应用 D'Alembert 判别法,由

$$\lim_{n\to\infty}\left|\binom{\alpha}{n+1}\Big/\binom{\alpha}{n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| = 1,$$

可知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的 Taylor 级数的收敛半径为 $R=1$.

现考虑 $f(x)=(1+x)^\alpha$ 在 $x=0$ 的 Taylor 公式

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k + r_n(x),$$

其中 $r_n(x)$ 表示为 Cauchy 余项

$$\begin{aligned} r_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1} \\ &= (n+1)\binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n(1+\theta x)^{\alpha-1},\quad 0\leqslant\theta\leqslant 1. \end{aligned}$$

由于幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)\binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}$ 的收敛半径为 1,因此当 $x\in(-1,1)$ 时,它的一般项趋于 0,即

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)\binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}=0,\quad x\in(-1,1).$$

另外,因为 $0\leqslant\theta\leqslant 1$ 和 $-1<x<1$,我们有

$$0<\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n\leqslant 1,$$

和

$$0\leqslant(1+\theta x)^{\alpha-1}\leqslant\max\{(1+|x|)^{\alpha-1},(1-|x|)^{\alpha-1}\},$$

由此得到当 $x\in(-1,1)$ 时,

$$\lim_{n\to\infty}r_n(x)=0,$$

于是$(1+x)^\alpha$ 在 $x=0$ 的 Taylor 级数在$(-1,1)$ 收敛于$(1+x)^\alpha$,即

$$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n,\quad x\in(-1,1).$$

现讨论 $f(x)=(1+x)^\alpha$ 的 Taylor 展开在区间端点的收敛情况.将 $x=\pm1$ 代入幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$,并记所得到的数项级数为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n$:

(i) $\alpha\leqslant -1$. 这时级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n$ 一般项的绝对值为

$$|u_n|=\left|\binom{\alpha}{n}\right|\geqslant\frac{1\cdot 2\cdots n}{n!}=1,$$

因而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n$ 发散,即幂级数的收敛范围是$(-1,1)$.

(ii) $-1<\alpha<0$.

当 $x=1$ 时,级数 $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ 为交错级数.由 $0<\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right|<1$,可知

$$|u_n|=\left|\binom{\alpha}{n}\right|>\left|\binom{\alpha}{n+1}\right|=|u_{n+1}|,$$

并且

$$|u_n|=\left(1-\frac{1+\alpha}{1}\right)\left(1-\frac{1+\alpha}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{1+\alpha}{n-1}\right)\left(1-\frac{1+\alpha}{n}\right)$$
$$=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1+\alpha}{k}\right)\to 0\quad(n\to\infty),$$

可知级数 $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ 收敛.

当 $x=-1$,级数 $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ 为正项级数,且

$$|u_n|=\left|\binom{\alpha}{n}\right|$$
$$=|\alpha|\cdot\frac{1-\alpha}{1}\cdot\frac{2-\alpha}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{n-1-\alpha}{n-1}\cdot\frac{1}{n}>\frac{|\alpha|}{n},$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\alpha|}{n}$ 发散,可知级数 $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ 发散.因此,当 $-1<\alpha<0$ 时幂级数的收敛范围是 $(-1,1]$.

(iii) $\alpha>0$.对级数 $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ 的一般项取绝对值,然后应用 Raabe 判别法(定理 9.3.5),

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{|u_n|}{|u_{n+1}|}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{n+1}{|n-\alpha|}-1\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(1+\alpha)}{n-\alpha}=1+\alpha>1,$$

可知级数 $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ 绝对收敛,即幂级数的收敛范围是 $[-1,1]$.

归纳起来,当 α 不为 0 和正整数时,

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n,\quad\begin{cases}x\in(-1,1), & 当\ \alpha\leqslant -1,\\ x\in(-1,1], & 当\ -1<\alpha<0,\\ x\in[-1,1] & 当\ \alpha>0.\end{cases}$$

(7) $f(x)=\arcsin x=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad x\in[-1,1]$.

证 由(6),可知当 $x\in(-1,1)$ 时,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-x^2)^n$$

$$=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}+\cdots,$$

对等式两边从 0 到 x 积分，注意幂级数的逐项可积性与

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin x,$$

即得到当 $x\in(-1,1)$ 时，

$$\arcsin x=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

至于幂级数在区间端点 $x=\pm 1$ 的收敛性，已在例 9.3.8 中用 Raabe 判别法得到证明.

证毕

特别，取 $x=1$，我们得到关于 π 的又一个级数表示：

$$\frac{\pi}{2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1}.$$

下面我们通过例题介绍幂级数展开的一般方法.

例 10.4.2　求 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 在 $x=1$ 的幂级数展开.

解　当 $|x-1|<1$ 时，

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{1+(x-1)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n,$$

对等式两边求导，应用幂级数的逐项可导性，

$$-\frac{1}{x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(x-1)^{n-1},$$

于是得到

$$\frac{1}{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(x-1)^n,\quad x\in(0,2).$$

例 10.4.3　求 $f(x)=\dfrac{1}{3+5x-2x^2}$ 在 $x=0$ 的幂级数展开.

解

$$f(x)=\frac{1}{3+5x-2x^2}=\frac{1}{(3-x)(1+2x)}=\frac{1}{7}\left(\frac{1}{3-x}+\frac{2}{1+2x}\right)$$

$$=\frac{1}{7}\left[\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n+2\sum_{n=0}^{\infty}(-2x)^n\right]$$

$$=\frac{1}{7}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{3^{n+1}}-(-2)^{n+1}\right]x^n.$$

由于$\frac{1}{3-x}$的幂级数展开的收敛范围是$(-3,3)$，$\frac{2}{1+2x}$的幂级数展开的收敛范围是$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，因此 $f(x)$ 的幂级数展开在$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$成立.

设 $f(x)$ 的幂级数展开为$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，收敛半径为 R_1，$g(x)$ 的幂级数展开为$\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$，收敛半径为 R_2，则 $f(x)g(x)$ 的幂级数展开就是它们的 Cauchy 乘积：

$$f(x)g(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

其中 $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$，$|x| < \min\{R_1, R_2\}$.

当 $b_0 \neq 0$ 时，我们可以通过待定系数法求$\frac{f(x)}{g(x)}$的幂级数展开：设

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

则

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

分离 x 的各次幂的系数，可依次得到

$$b_0c_0 = a_0 \quad\Rightarrow\quad c_0 = \frac{a_0}{b_0},$$

$$b_0c_1 + b_1c_0 = a_1 \quad\Rightarrow\quad c_1 = \frac{a_1 - b_1c_0}{b_0},$$

$$b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0 = a_2 \quad\Rightarrow\quad c_2 = \frac{a_2 - b_1c_1 - b_2c_0}{b_0},$$

$$\cdots\cdots$$

一直继续下去，可求得所有的 c_n.

例 10.4.4　求 $e^x \sin x$ 的幂级数展开(到 x^5).

解

$$e^x \sin x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right)$$

$$= x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \cdots,$$

上述幂级数展开对一切 $x \in (-\infty, +\infty)$ 都成立.

例 10.4.5　求 $\tan x$ 的幂级数展开(到 x^5).

解　由于 $\tan x$ 是奇函数，我们可以令

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + \cdots,$$

请读者思考理由. 于是

$$(c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + \cdots)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots,$$

比较等式两端 x, x^3 与 x^5 的系数,就可得到

$$c_1 = 1,\quad c_3 = \frac{1}{3},\quad c_5 = \frac{2}{15},$$

因此

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots.$$

注　对上例,我们还可采用下述的"代入法"求解:在

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n = 1 + u + u^2 + \cdots$$

中,以 $u = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \cdots$ 代入,可得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos x} &= 1 + \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) + \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)^2 + \cdots \\ &= 1 + x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \cdots,\end{aligned}$$

然后求 $\sin x$ 与 $\frac{1}{\cos x}$ 的 Cauchy 乘积,同样得到上述关于 $\tan x$ 的幂级数展开.

需要指出,用上述方法作 Taylor 展开,我们无法同时得到其幂级数的收敛范围,只能知道在 $x = 0$ 的小邻域中,幂级数展开是成立的.(事实上,$\tan x$ 的幂级数展开的收敛范围是 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,它的证明需要用到复变函数的知识.)

上面介绍的"代入法"经常用于复合函数,例如 $e^{f(x)}$, $\ln(1 + f(x))$ 等函数的求幂级数展开问题.

例 10.4.6　求 $\ln\frac{\sin x}{x}$ 的幂级数展开(到 x^4),其中函数 $\frac{\sin x}{x}$ 应理解为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

解　首先,利用 $\sin x$ 的幂级数展开,可以得到

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots.$$

另外,我们有

$$\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \cdots,$$

将 $u = -\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots$ 代入上式,即得

$$\ln \frac{\sin x}{x} = \left(-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots\right)^2 + \cdots$$

$$= -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \cdots.$$

利用上例,我们可以得到一些有趣的结果.在例 9.5.7 中,我们已得到等式

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right),$$

两边取对数,再分别将 $\ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$ 展开成幂级数,

$$\ln \frac{\sin x}{x} = \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{n^2\pi^2} + \frac{1}{2}\frac{x^4}{n^4\pi^4} + \cdots\right).$$

将上式与例 10.4.6 中的结果相比较,它们的 x^2 系数,x^4 系数都对应相等,于是就得到等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

如果我们在计算时更精细些,也就是将 $\ln \frac{\sin x}{x}$ 的幂级数展开计算到 x^6, x^8,…,还可以获得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8}, \cdots$ 的精确值.

最后我们举例说明幂级数在近似计算中的应用.

例 10.4.7　计算 $I = \int_0^1 e^{-x^2}dx$,要求精确到 0.000 1.

解　由于我们无法将 e^{-x^2} 的原函数用初等函数表示出来,因而不能用 Newton-Leibniz 公式直接计算定积分 $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ 的值,但是应用函数的幂级数展开,可以计算出它的近似值,并精确到任意事先要求的程度.

函数 e^{-x^2} 的幂级数展开为

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \cdots, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

从 0 到 1 逐项积分,得

$$I = \int_0^1 e^{-x^2}dx$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1\ 320} + \frac{1}{9\ 360} - \frac{1}{75\ 600} + \cdots,$$

这是一个 Leibniz 级数,其误差不超过被舍去部分的第一项的绝对值(见定理 9.4.2 的注),由于

$$\frac{1}{75\ 600} < 1.5 \times 10^{-5},$$

因此前面 7 项之和具有四位有效数字,即

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 0.748\ 6.$$

例 10.4.8 在例 10.3.4 中,我们得到

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, \quad x \in [-1, 1],$$

取 $x = 1$,则得到

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots,$$

理论上,上式可以用来计算 π 的近似值,但由于这级数收敛速度太慢,要达到一定精确度的话,计算量比较大.如果我们取 $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$,则可得到

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \cdots\right),$$

或

$$\pi = 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \cdots - \frac{1}{19 \cdot 3^9} + \cdots\right).$$

这一级数的收敛速度就快得多了.这也是一个 Leibniz 级数,其误差不超过被舍去部分的第一项的绝对值.由于$\frac{2\sqrt{3}}{19 \cdot 3^9} < 10^{-5}$,所以前 9 项之和已经精确到小数点后第四位,即

$$\pi \approx 3.141\ 6.$$

习　　题

1. 求下列函数在指定点的 Taylor 展开,并确定它们的收敛范围:

(1) $1 + 2x - 3x^2 + 5x^3, x_0 = 1$;　　(2) $\frac{1}{x^2}, x_0 = -1$;

(3) $\frac{x}{2 - x - x^2}, x_0 = 0$;　　(4) $\sin x, x_0 = \frac{\pi}{6}$;

(5) $\ln x, x_0 = 2$;　　(6) $\sqrt[3]{4-x^2}, x_0 = 0$;

(7) $\dfrac{x-1}{x+1}, x_0 = 1$;　　(8) $(1+x)\ln(1-x), x_0 = 0$;

(9) $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}, x_0 = 0$;　　(10) $\dfrac{e^{-x}}{1-x}, x_0 = 0$.

2. 求下列函数在 $x_0 = 0$ 的 Taylor 展开

(1) $\dfrac{x}{\sin x}$ 至x^6;　　(2) $e^{\sin x}$ 至x^4;

(3) $\ln\cos x$ 至 x^6;　　(4) $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ 至x^4.

3. 利用幂级数展开,计算下列积分,要求精确到 0.001.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$;　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \cos x^2 dx$;

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctan x}{x}dx$;　　(4) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$.

4. 应用$\dfrac{e^x-1}{x}$的幂级数展开,证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1.$$

5. (1) 应用$\dfrac{\pi}{4} = \arctan\dfrac{1}{2} + \arctan\dfrac{1}{3}$, 计算 π 的值,要求精确到 10^{-4};

(2) 应用$\dfrac{\pi}{6} = \arcsin\dfrac{1}{2}$,计算 π 的值,要求精确到 10^{-4}.

§5　用多项式逼近连续函数

定义 10.5.1　设函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上有定义,如果存在多项式序列$\{P_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于 $f(x)$,则称 $f(x)$ 在这闭区间上可以用多项式一致逼近.

应用分析语言,"$f(x)$ 在$[a,b]$上可以用多项式一致逼近"可等价表述为:

对任意给定的 $\varepsilon > 0$,存在多项式 $P(x)$,使得

$$|P(x) - f(x)| < \varepsilon$$

对一切 $x \in [a,b]$ 成立.

也许读者会认为这个问题很简单:只要将 $f(x)$ 在$[a,b]$上展开成幂级数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n,\quad x \in [a,b],$$

然后令其部分和函数(多项式)

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k,$$

$f(x)$ 在$[a,b]$上不是就可以由多项式序列$\{S_n(x)\}$一致逼近了吗?

但是这么做需要函数具有很好的分析性质,因为一个函数能展开成幂级数的必要条

件之一是它任意次可导，而对仅要求"一个函数可以用多项式一致逼近"来说，这个条件实在是过分强了．究其原因，幂级数的部分和函数序列只是多项式序列的一种特殊情况，即对任意正整数 n，n 次多项式 $S_n(x)$ 只能是在 $n-1$ 次多项式 $S_{n-1}(x)$ 的基础上增加一项 $a_n(x-x_0)^n$，而不能更改 $S_{n-1}(x)$ 的任何一项，这样，留下的活动余地就极其有限，因此不得不对函数提出较高的要求．

如果不是用幂级数，而是用一般的多项式序列来逼近，则对函数的要求就可以弱得多．事实上，Weierstrass 首先证明了：闭区间 $[a,b]$ 上任意连续函数 $f(x)$ 都可以用多项式一致逼近．

这一定理的证法很多，以下证明是由前苏联数学家 Korovkin 在 1953 年给出的．

定理 10.5.1（Weierstrass 第一逼近定理） *设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，则对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在多项式 $P(x)$，使*

$$|P(x)-f(x)|<\varepsilon$$

对一切 $x\in[a,b]$ 成立．

证 不失一般性，我们设 $[a,b]$ 为 $[0,1]$．

设 X 是 $[0,1]$ 上连续函数全体构成的集合，Y 是多项式全体构成的集合，现定义映射

$$B_n: X\to Y$$

$$f(t)\mapsto B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k x^k(1-x)^{n-k},$$

这里 $B_n(f,x)$ 表示 $f\in X$ 在映射 B_n 作用下的像，它是以 x 为变量的 n 次多项式，称为 **Bernstein 多项式**．

关于映射 B_n，直接从定义出发，可证明它具有下述基本性质与基本关系式：

(1) B_n 是线性映射，即 $\forall f,g\in X$ 及 $\forall\alpha,\beta\in\mathbf{R}$，成立

$$B_n(\alpha f+\beta g,x)=\alpha B_n(f,x)+\beta B_n(g,x);$$

(2) B_n 具有单调性，即 $\forall f,g\in X$，若 $f(t)\geqslant g(t)$ 对一切 $t\in[0,1]$ 成立，则

$$B_n(f,x)\geqslant B_n(g,x)$$

对一切 $x\in[0,1]$ 成立；

(3) $B_n(1,x)=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=[x+(1-x)]^n=1;$

$$\begin{aligned}B_n(t,x)&=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\\&=x\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k}\\&=x[x+(1-x)]^n=x;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_n(t^2,x)&=\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}C_{n-1}^{k-1}x^k(1-x)^{n-k}\\&=\sum_{k=2}^{n}\frac{k-1}{n}C_{n-1}^{k-1}x^k(1-x)^{n-k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}C_{n-1}^{k-1}x^k(1-x)^{n-k}\end{aligned}$$

$$= \frac{n-1}{n}x^2\sum_{k=2}^{n}C_{n-2}^{k-2}x^{k-2}(1-x)^{n-k} + \frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k}$$

$$= \frac{n-1}{n}x^2 + \frac{x}{n} = x^2 + \frac{x-x^2}{n}.$$

综合上述三式,考虑函数$(t-s)^2$在B_n映射下的像,注意s在这里被视为常数,我们得到

$$\begin{aligned}B_n((t-s)^2,x) &= B_n(t^2,x) - 2sB_n(t,x) + s^2B_n(1,x)\\ &= x^2 + \frac{x-x^2}{n} - 2sx + s^2\\ &= \frac{x-x^2}{n} + (x-s)^2.\end{aligned}$$

现在我们来证明定理.

由于函数f在$[0,1]$连续,所以必定有界,即存在$M>0$,对于一切$t\in[0,1]$,成立

$$|f(t)| \leqslant M;$$

根据Cantor定理,f在$[0,1]$一致连续,于是对任意给定的$\varepsilon>0$,存在$\delta>0$,对一切$t,s\in[0,1]$,当$|t-s|<\delta$时,成立

$$|f(t)-f(s)| < \frac{\varepsilon}{2};$$

当$|t-s|\geqslant\delta$时,成立

$$|f(t)-f(s)| \leqslant 2M \leqslant \frac{2M}{\delta^2}(t-s)^2.$$

也就是说,对一切$t,s\in[0,1]$,成立

$$-\frac{\varepsilon}{2} - \frac{2M}{\delta^2}(t-s)^2 \leqslant f(t)-f(s) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\delta^2}(t-s)^2.$$

考虑上式的左端、中间、右端三式(关于t的连续函数)在映射B_n作用下的像(关于x的多项式),注意$f(s)$在这里被视为常数,即$B_n(f(s),x)=f(s)$,并根据上面性质(1),(2)与(3),得到对一切$x,s\in[0,1]$,成立

$$\begin{aligned}-\frac{\varepsilon}{2} - \frac{2M}{\delta^2}\left[\frac{x-x^2}{n} + (x-s)^2\right] &\leqslant B_n(f,x) - f(s)\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\delta^2}\left[\frac{x-x^2}{n} + (x-s)^2\right].\end{aligned}$$

令$s=x$,且注意$x(1-x)\leqslant\frac{1}{4}$,即得

$$\left|\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^kx^k(1-x)^{n-k} - f(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\delta^2}.$$

取$N=\left[\frac{M}{\delta^2\varepsilon}\right]$,当$n>N$时,

$$\left|\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^kx^k(1-x)^{n-k} - f(x)\right| < \varepsilon$$

对一切$x\in[0,1]$成立.

证毕

定理10.5.1还可以表述为:设 f 在 $[a,b]$ 连续,则它的Bernstein多项式序列 $\{B_n(f,x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f.

习 题

1. 求 $f(x)=x^3$ 的Bernstein多项式 $B_n(f,x)$.

2. 设 $f(x)=\sqrt{x}, x\in[0,1]$,求它的四次Bernstein多项式 $B_4(f,x)$.

3. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,证明:对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在有理系数多项式 $P(x)$,使得

$$|P(x)-f(x)|<\varepsilon$$

对一切 $x\in[a,b]$ 成立.

4. 设 $P_0(x)=0, P_{n+1}(x)=P_n(x)+\dfrac{x^2-P_n^2(x)}{2}, n=0,1,2,\cdots$,证明:$\{P_n(x)\}$ 在 $[-1,1]$ 一致收敛于 $|x|$.

第十一章　Euclid 空间上的极限和连续

§1　Euclid 空间上的基本定理

到目前为止，我们在数学分析课程中学习的都只是一元函数的分析性质. 但在现实生活中,除了非常简单的情况之外,可以仅用一个自变量和一个因变量的变化关系来刻画的问题可以说是比较少的. 比如,即便是像物理学中研究质点运动这么一个相对较为容易的问题,也需要用到三个空间变量 x、y、z 和一个时间变量 t 以及多个函数值(如位置、速度、加速度、动量等),更不用说在化学、生物及社会科学领域产生的远为复杂的情况. 这种多自变量和多因变量的变化关系,反映到数学上就是多元函数(或多元函数组).

从本节开始我们将转向研究多元函数(组). 多元函数的分析性质无非也是极限理论、连续性、可微性、可导性、可积性等,它们与一元函数的相应性质既有紧密联系,又有很大区别. 希望读者"温故而知新",在学习中注意对照、分析它们本质上的异同,举一反三,收到事半功倍之效果.

Euclid 空间上的距离与极限

前面说过,极限理论是整个数学分析的基础. 在导出多元函数的极限定义之前,我们先来回忆一下一元函数的情况.

极限定义

$$“\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0,$$

$$\forall\, x(0 < |x - x_0| < \delta): |f(x) - A| < \varepsilon”$$

意味着,在自变量的变化过程中,只要 x 与 x_0 充分接近($x \neq x_0$),函数值 $f(x)$ 就可以与 A 任意接近. 而这个"接近",不管是用符号"$0 < |x - x_0| < \delta$"和"$|f(x) - A| < \varepsilon$"表示,还是用语言"在 x_0 的 δ 去心邻域 $O(x_0, \delta)$ 中"和"落在点 A 的 ε 邻域中"表示,实质上都是用绝对值,即一维空间中两点间的距离刻画的. 显而易见,若没有距离的概念和定义,就无所谓"接近"或"不接近",也就没有"收敛"和"发散"—— 收敛就是距离趋向于零.

对于多元函数(组),上述的 x、x_0(及 $f(x)$、A)都是由多个分量组成的,为了研究多元函数的性质,我们先要将"距离"的概念推广至高维空间,定义出类似于"绝对值"那样的度量标准,然后才能在此基础上去相应地定义极限,进而构筑整个多元分析理论.

记 $\mathbf{R}$ 为实数全体,定义 n 个 $\mathbf{R}$ 的 Descartes 乘积集为

$$\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R} = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n), x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

$\mathbf{R}^n$ 中的元素 $\boldsymbol{x}$ 称为**向量**或**点**，x_i 称为 $\boldsymbol{x}$ 的**第 i 个坐标**. 特别地，$\mathbf{R}^n$ 中的零元素记为 $\mathbf{0}=(0,0,\cdots,0)$.

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中任意两个向量，λ 为任意实数，定义 $\mathbf{R}^n$ 中的加法和数乘运算：

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n),$$

$$\lambda\boldsymbol{x}=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n),$$

$\mathbf{R}^n$ 就成为向量空间.

如果再在 $\mathbf{R}^n$ 上引入内积运算

$$\langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\rangle = x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n=\sum_{k=1}^{n}x_ky_k,$$

那么它就被称为 **Euclid 空间**.

容易验证内积满足以下性质：设 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\mathbf{R}^n$, $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$, 则

(1) (**正定性**) $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle\geqslant 0$, 而 $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle=0\Leftrightarrow\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$;

(2) (**对称性**) $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle=\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle$;

(3) (**线性**) $\langle\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\rangle=\lambda\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\rangle+\mu\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\rangle$;

(4) (**Schwarz 不等式**) $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle^2\leqslant\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle$.

我们仅说明一下(4). 由(1)～(3)可得出，对于任意 $\lambda\in\mathbf{R}$ 都成立

$$\langle\lambda\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\lambda\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\rangle=\lambda^2\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle+2\lambda\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle+\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle\geqslant 0,$$

所以其判别式不大于零，即

$$4\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle^2-4\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle\leqslant 0.$$

这就得到了 Schwarz 不等式.

平面解析几何中两点 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)$、$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2)$ 间的距离公式

$$\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$

给我们以启示：可以按照这样的方式，为具有更多个分量的"点"定义其间的距离. 仍用绝对值的符号表示推广到 $\mathbf{R}^n$ 上的"距离"，则有

定义 11.1.1 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 中任意两点 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 的距离定义为

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2};$$

并将 $\boldsymbol{x}$ 到 $\mathbf{0}$ 的距离(即 $\boldsymbol{x}$ 的**模长**)称为 $\boldsymbol{x}$ 的 **Euclid 范数**(简称**范数**)，记作 $\|\boldsymbol{x}\|$.

Euclid 范数与内积间存在着关系

$$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}x_k^2}=\sqrt{<\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}>}.$$

定理 11.1.1 距离满足以下性质：

(a)(**正定性**) $|x-y| \geqslant 0$，而 $|x-y|=0 \Leftrightarrow x=y$；

(b)(**对称性**) $|x-y|=|y-x|$；

(c)(**三角不等式**) $|x-z| \leqslant |x-y|+|y-z|$.

证明留给读者.

有了距离就可以引入邻域以及收敛的概念.

定义 11.1.2 设 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n) \in \mathbf{R}^n$，$\delta>0$，则点集

$$O(a,\delta)=\{x \in \mathbf{R}^n \mid |x-a|<\delta\}$$
$$=\left\{x \in \mathbf{R}^n \,\middle|\, \sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\cdots+(x_n-a_n)^2}<\delta\right\}$$

称为点 a 的 δ 邻域，a 称为这个邻域的中心.

特别地，$O(a,\delta)$ 在 $\mathbf{R}$ 上就是开区间，在 $\mathbf{R}^2$ 上是开圆盘，在 $\mathbf{R}^3$ 上则是开球.

定义 11.1.3 设 $\{x_k\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点列. 若存在定点 $a \in \mathbf{R}^n$，使得对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正整数 $K \in \mathbf{N}^+$，

$$|x_k-a|<\varepsilon \text{（即 } x_k \in O(a,\varepsilon)\text{）}$$

对一切 $k>K$ 成立，则称点列 $\{x_k\}$ **收敛**于 a，记为 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k=a$. 而称 a 为点列 $\{x_k\}$ 的**极限**.

一个点列不收敛就称其**发散**.

记 $x_k=(x_1^k,x_2^k,\cdots,x_n^k)$，$k=1,2,\cdots$，$a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，利用不等式

$$|x_j^k-a_j| \leqslant |x_k-a|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i^k-a_i)^2} \leqslant \sum_{i=1}^{n}|x_i^k-a_i|,\ j=1,2,\cdots,n$$

可以证明：

定理 11.1.2 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k=a$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{k\to\infty} x_i^k=a_i$，$i=1,2,\cdots,n$.

这样，可以利用对其分量的讨论，将一维的一些结论平行地推广到高维去.

前面已给出了一维收敛数列的一些性质，如唯一性、有界性、保序性、夹逼性及四则运算法则. 由于高维的两个点之间不存在大小关系，因此保序性和夹逼性这两个与比较大小有关的性质已不再有意义了.

有界性牵涉到的是点的模长，我们对高维点集的有界性作如下定义：

定义 11.1.4 若存在正数 M，使得 $\forall x \in S$，

$$\|x\| \leqslant M,$$

(或等价地，存在正数 M'，使得 $S \subset O(0,M')$)，则称 S 为**有界集**.

可以证明唯一性(收敛点列 $\{x_k\}$ 的极限是唯一的)、有界性(收敛点列 $\{x_k\}$ 必定有界)和极限的四则运算法则在高维情况依然成立.

开集与闭集

在一维的情况，开区间和闭区间是有本质差别的．闭区间上的许多重要结果，如闭区间套定理、连续函数的若干性质，在开区间是不成立的．因此有理由相应地对高维空间的点集作类似划分．

设 S 是 $\mathbf{R}^n$ 上的点集，它在 $\mathbf{R}^n$ 上的补集 $\mathbf{R}^n \setminus S$ 记为 S^c．$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$，从其邻域与 S 的关系来分，无非是下列三种情况之一：

(1) 存在 $\boldsymbol{x}$ 的一个 δ 邻域 $O(\boldsymbol{x},\delta)$ 完全落在 S 中(注意：这时 $\boldsymbol{x}$ 必属于 S)，这时称 $\boldsymbol{x}$ 是 S 的**内点**．S 的内点全体称为 S 的内部，记为 S^o．

(2) 存在 $\boldsymbol{x}$ 的一个 δ 邻域 $O(\boldsymbol{x},\delta)$ 完全不落在 S 中，这时称 $\boldsymbol{x}$ 是 S 的外点．

(3) 不存在 $\boldsymbol{x}$ 的具有上述性质的 δ 邻域，即 $\boldsymbol{x}$ 的任意 δ 邻域都既包含 S 中的点，又包含不属于 S 的点，那么就称 $\boldsymbol{x}$ 是 S 的**边界点**．S 的边界点的全体称为 S 的**边界**，记为 ∂S．

要注意的是，内点必属于 S，外点必不属于 S(或者说必属于 S^c)，但边界点可能属于 S，也可能不属于 S．

内点、外点与边界点的示意图见图 11.1.1．

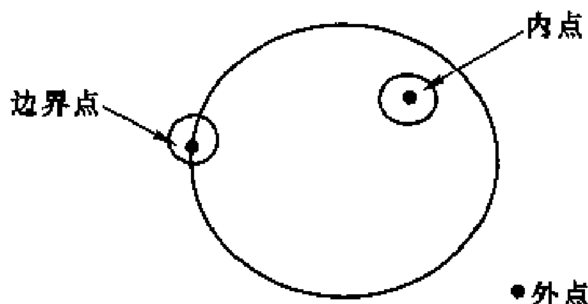


图 11.1.1

进一步，若存在 $\boldsymbol{x}$ 的一个邻域，其中只有 $\boldsymbol{x}$ 点属于 S，则称 $\boldsymbol{x}$ 是 S 的**孤立点**．显然，孤立点必是边界点．

若 $\boldsymbol{x}$ 的任意邻域都含有 S 中的无限个点，则称 $\boldsymbol{x}$ 是 S 的**聚点**．S 的聚点的全体记为 S'．显然，S 的内点和非孤立点的边界点必是聚点，因此 S 的聚点可能属于 S，也可能不属于 S．例如在 $\mathbf{R}$ 中，0 是点集 $\left\{\frac{1}{n} \middle| n = 1,2,\cdots\right\}$ 的聚点，但它不属于这个点集．

定理 11.1.3 $\boldsymbol{x}$ 是 S 的聚点的充分必要条件是：存在点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 满足 $\boldsymbol{x}_k \in S$，$\boldsymbol{x}_k \neq \boldsymbol{x}$，$k = 1,2,\cdots$，使得 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}$．

证明留作习题．

现在我们可以引出“开”和“闭”的概念了．

定义 11.1.5 若集合 S 中的每一个点都是它的内点，则称集合 S 为开

集;若集合 S 中包含了它的所有的聚点,则称集合 S 为**闭集**.

集合 S 与它的所有的聚点 S' 的并集称为 S 的**闭包**,记为 $\bar{S}$.

例 11.1.1　在 $\mathbf{R}^2$ 上,设

$$S = \{(x,y) \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 < 4\}.$$

那么

$$S^o = \{(x,y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\};$$
$$\partial S = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 4\};$$
$$S' = \{(x,y) \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\} = \bar{S}.$$

例 11.1.2　邻域是开集.

证　设邻域为 $O(\boldsymbol{a},r)$,$\boldsymbol{q}$ 为 $O(\boldsymbol{a},r)$ 上的任一点,则 $|\boldsymbol{q}-\boldsymbol{a}| < r$.因此存在正数 h 使得

$$|\boldsymbol{q}-\boldsymbol{a}| < r - h.$$

于是,对任意 $\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{q},h)$,成立不等式

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}| \leqslant |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{q}| + |\boldsymbol{q}-\boldsymbol{a}| < r,$$

因此 $\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{a},r)$,也即 $\boldsymbol{q}$ 是 $O(\boldsymbol{a},r)$ 的内点,由定义,$O(\boldsymbol{a},r)$ 是开集.

容易证明:

集合 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mid a_i < x_i < b_i, i = 1,2,\cdots,n\}$ 和 $\left\{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2 < r^2\right\}$ 都是开集,它们分别称为 **n 维开矩形**和 **n 维开球**;

集合 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mid a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, i = 1,2,\cdots,n\}$ 和 $\left\{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2 \leqslant r^2\right\}$ 都是闭集,它们分别称为 **n 维闭矩形**和 **n 维闭球**.

关于闭集有如下重要结论,这对于某些问题的证明是有力的工具.

定理 11.1.4　*S 为闭集的充分必要条件是 S^c 是开集.*

证　必要性.若 S 为闭集,由于 S 的一切聚点都属于 S,因此,对于任意 $\boldsymbol{x} \in S^c$,$\boldsymbol{x}$ 不是 S 的聚点.也就是说,存在 $\boldsymbol{x}$ 的邻域 $O(\boldsymbol{x},\delta)$,使得 $O(\boldsymbol{x},\delta) \cap S = \varnothing$,即 $O(\boldsymbol{x},\delta) \subset S^c$.因此 S^c 是开集.

再证充分性.对任意 $\boldsymbol{x} \in S^c$,由于 S^c 是开集,因此存在 $\boldsymbol{x}$ 的邻域 $O(\boldsymbol{x},\delta)$,使得 $O(\boldsymbol{x},\delta) \in S^c$,即 $\boldsymbol{x}$ 不是 S 的聚点.所以如果 S 有聚点,它就一定属于 S.

证毕

从这个定理立即得到:*S 为开集的充分必要条件是 S^c 是闭集.*

以下的引理是第一章 §1 中的 De Morgan 公式推广至任意多个集合的情况,其证明方法完全类似于第一章.

引理 11.1.1(De Morgan 公式)　*设 $\{S_\alpha\}$ 是若干(有限或无限多个)$\mathbf{R}^n$ 中子集 S_α 的一个组,则*

$$\text{a) } (\bigcup_{\alpha} S_\alpha)^c = \bigcap_{\alpha} S_\alpha^c,$$
$$\text{b) } (\bigcap_{\alpha} S_\alpha)^c = \bigcup_{\alpha} S_\alpha^c.$$

定理 11.1.5

1) 任意一组开集 $\{S_\alpha\}$ 的并集 $(\bigcup_\alpha S_\alpha)$ 是开集.

2) 任意一组闭集 $\{T_\alpha\}$ 的交集 $\bigcap_\alpha T_\alpha$ 是闭集.

3) 任意有限个开集 $S_1, S_2, \cdots, S_k$ 的交集 $\bigcap_{i=1}^{k} S_i$ 是开集.

4) 任意有限个闭集 $T_1, T_2, \cdots, T_k$ 的并集 $\bigcup_{i=1}^{k} T_\alpha$ 是闭集.

证 1) 如果 $x \in \bigcup_\alpha S_\alpha$，那么存在某个 α，使得 $x \in S_\alpha$. 而 S_α 是开集，因此 x 就是 S_α 的内点，所以也是 $\bigcup_\alpha S_\alpha$ 的内点，这说明 $\bigcup_\alpha S_\alpha$ 是开集.

2) 由 De Morgan 公式可得

$$(\bigcap_\alpha T_\alpha)^c = \bigcup_\alpha T_\alpha^c.$$

T_α 是闭集，从而 T_α^c 是开集. 由 1) 知 $\bigcup_\alpha T_\alpha^c$ 是开集，这说明了 $\bigcap_\alpha T_\alpha$ 的补集是开集，因此它是闭集.

3) 若 $x \in \bigcap_{i=1}^{k} S_i$，则 $x \in S_i$，因此存在 x 的邻域 $O(x, r_i)$，使得 $O(x, r_i) \subset S_i$. 取 $r = \min_{0 \leqslant i \leqslant k}(r_i)$，那么 $O(x, r) \subset S_i$ 对于每个 $i = 1, 2, \cdots, k$ 都成立，即 x 是 $\bigcap_{i=1}^{k} S_i$ 的内点，因此 $\bigcap_{i=1}^{k} S_i$ 是开集.

4) 利用 De Morgan 公式和 3) 的结论就可以得出.

证毕

请读者举例说明任意个开集的交集不一定仍是开集；任意个闭集的并集不一定仍是闭集.

Euclid 空间上的基本定理

下面主要以二维的情况为例，将实数理论中的一些重要结果推广到高维去.

定理 11.1.6（闭矩形套定理） 设 $\{\Delta_k\} = \{[a_k, b_k] \times [c_k, d_k]\}$, $k = 1, 2, \cdots$ 是一列闭矩形. 如果

(1) $\Delta_{k+1} \subset \Delta_k$，即 $a_k \leqslant a_{k+1} < b_{k+1} \leqslant b_k$, $c_k \leqslant c_{k+1} < d_{k+1} \leqslant d_k$, $k = 1, 2, \cdots$;

(2) $\sqrt{(b_k - a_k)^2 + (d_k - c_k)^2} \to 0 \quad (k \to \infty)$,

则存在唯一的点 $a = (\xi, \eta) \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \Delta_k$，且

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = \xi, \quad \lim_{k\to\infty} c_k = \lim_{k\to\infty} d_k = \eta.$$

这只要分别对 $\{[a_k, b_k]\}$ 和 $\{[c_k, d_k]\}$ 运用直线上的闭区间套定理就可以证明.

定理中的"闭"(闭集)和"套"(依次包含)是本质的,而集合 Δ_k 是否是闭矩形则无关紧要.读者还不难证明如下更一般的结论:

定理 11.1.6′(Cantor 闭区域套定理)　设 $\{S_k\}$ 是非空闭集序列,满足

$$S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_k \supset S_{k+1} \supset \cdots,$$

以及 $\lim\limits_{k\to\infty} \mathrm{diam}\, S_k = 0$,则存在唯一点属于 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} S_k$.

这里

$$\mathrm{diam}\, S = \sup\{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \mid \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S\},$$

它称为 S 的**直径**.

例 11.1.6　证明:三角形的中线交于一点.

证　我们将加上边界的三角形记为 $\triangle ABC$(如图 11.1.2),它是闭集.

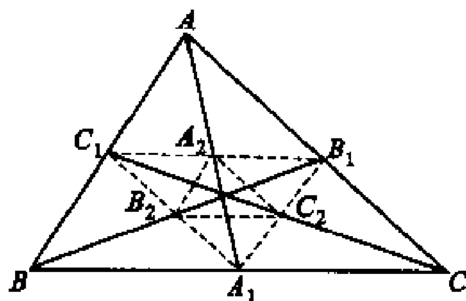


图 11.1.2

显然 $\triangle ABC$ 的三条中线 AA_1, BB_1 和 CC_1 包含在 $\triangle ABC$ 中,因此

$$\triangle A_1B_1C_1 \subset \triangle ABC.$$

注意到原来的三条中线的一段 A_1A_2、B_1B_2 和 C_1C_2 又是 $\triangle A_1B_1C_1$ 的三条中线,且 $\triangle ABC$ 的三条中线的两两交点也是 $\triangle A_1B_1C_1$ 的三条中线的两两交点,同样又有

$$\triangle A_2B_2C_2 \subset \triangle A_1B_1C_1$$

如此做下去,就得出三角形组成的闭集列

$$\triangle ABC \supset \triangle A_1B_1C_1 \supset \triangle A_2B_2C_2 \supset \cdots.$$

显然它们满足

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{diam} \triangle A_kB_kC_k = 0.$$

因此存在唯一的公共点 O 属于所有这些三角形.

因为三角形的三条中线的两两交点始终包含在三角形内,所以 O 点就是它们的交点.

定理 11.1.7(Bolzano-Weierstrass 定理) $\mathbf{R}^n$ 上有界点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 中必有收敛子列.

以二维的情况为例,只要先对 $\{\boldsymbol{x}_k\} = \{(x_k, y_k)\}$ 的第一个分量 $\{x_k\}$ 用一维的 Bolzano-Weierstrass 定理,找到其收敛子列 $\{x_{n_k}\}$;再对数列 $\{y_{n_k}\}$ 用一维的 Bolzano-Weierstrass 定理,找到其收敛子列 $\{y_{n_{k_m}}\}$,则 $\{(x_{n_{k_m}}, y_{n_{k_m}})\}$ 就是 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 的收敛子列.

从这个定理立即得到:

推论 11.1.1 $\mathbf{R}^n$ 上有界无限点集至少有一个聚点.

定义 11.1.6 若 $\mathbf{R}^n$ 上的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 满足:对于任意给定的 $\varepsilon > 0$,存在正整数 K,对任意 $k, l > K$,成立

$$|\boldsymbol{x}_l - \boldsymbol{x}_k| < \varepsilon,$$

则称 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 为**基本点列**(或 **Cauchy 点列**).

定理 11.1.8(Cauchy 收敛原理) $\mathbf{R}^n$ 上的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 收敛的充分必要条件是:$\{\boldsymbol{x}_k\}$ 为基本点列.

证 设 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 收敛于 $\boldsymbol{a}$,那么对于任意给定的 $\varepsilon > 0$,存在正整数 K,使得当 $k > K$ 时,不等式

$$|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

成立. 因此当 $k, l > K$ 时,由三角不等式得

$$|\boldsymbol{x}_l - \boldsymbol{x}_k| \leqslant |\boldsymbol{x}_l - \boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{a}| < \varepsilon,$$

即 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 为基本点列.

若 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 为基本点列,则由不等式

$$|x_i^l - x_i^k| \leqslant |\boldsymbol{x}_l - \boldsymbol{x}_k|, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

知对固定的 $i = 1, 2, \cdots, n$,数列 $\{x_i^k\}$ 是基本数列,因此收敛. 由定理 11.1.2 即知点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 收敛.

证毕

因此,第二章中给出的从实数的连续性到实数的完备性的 5 个等价定理中,除了"确界存在定理"和"单调有界数列收敛定理"由于涉及到点之间的大小关系而不再有意义之外,其余的结论在高维空间依然成立.

紧集

现在引入一个重要的概念.

定义 11.1.7 设 S 为 $\mathbf{R}^n$ 的子集. 如果 $\mathbf{R}^n$ 中的一组开集 $\{U_\alpha\}$ 满足 $\bigcup_\alpha U_\alpha \supset S$,那么称 $\{U_\alpha\}$ 为 S 的一个**开覆盖**.

如果 S 的任意一个开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 中总存在一个有限子覆盖,即存在 $\{U_\alpha\}$

中的有限个开集 $\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^{k}$，满足 $\bigcup_{i=1}^{k} U_{\alpha_i} \supset S$，则称 S 为紧集.

定理 11.1.9(Heine-Borel 定理) S 是紧集的充分必要条件为：它是有界闭集.

证 只证明 $n=2$ 的情形. 必要性：设 S 为紧集. 先证它是有界的. 显然 $\{O(x,1)\subset \mathbf{R}^2 \mid x\in S\}$ 是 S 的开覆盖，而 S 是紧的，因此其中存在 S 的有限子覆盖，即存在 $x_1,x_2,\cdots,x_k$，使得 $S\subset\bigcup_{i=1}^{k} O(x_i,1)$. 这就说明了 S 是有界集.

再用反证法证明 S 是闭集. 设存在 S 的聚点 $a\notin S$，构造开集

$$U_n=\left\{x \mid |x-a|>\frac{1}{n}\right\},$$

则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n=\mathbf{R}^2\setminus\{a\}\supset S$，即 $\{U_n\}$ 是 S 的一个开覆盖.

由聚点定义，存在点列 $\{x_k\}\in S(x_k\neq a)$ 满足 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k=a$. 由于对任意一个固定的 m，U_m 中至多含有 $\{x_k\}$ 中有限个点(请读者想一下为什么)，因此在 $\{U_n\}$ 中不存在 S 的有限子覆盖，这就与 S 是紧集产生了矛盾. 矛盾表明 S 是闭集.

充分性：用反证法. 假设 S 是有界闭集，但不是紧的，那么存在 S 的一个开覆盖 $\{U_\alpha\}$，它不包含 S 的有限子覆盖.

由于 S 为有界点集，那么它必包含在某个 2 维闭正方形 I_1 中. 将 I_1 分成 4 个全等的正方形 $I_{11},I_{12},I_{13},I_{14}$. 那么至少有一个 $I_{1k}(1\leqslant k\leqslant 4)$，使得 $I_{1k}\cap S$ 不能被 $\{U_\alpha\}$ 中的有限元素所覆盖，取其为 I_2.

同样将 I_2 分成 4 个全等的正方形 $I_{21},I_{22},I_{23},I_{24}$，也至少有一个 $I_{2k}(1\leqslant k\leqslant 4)$，使得 $I_{2k}\cap S$ 不能被 $\{U_\alpha\}$ 中的有限元素所覆盖，取其为 I_3.

如此下去就得到一列正方形

$$I_1\supset I_2\supset I_3\supset\cdots,$$

满足

(1) 闭集 $I_l\cap S$，$l=1,2,3,\cdots$ 不能被 $\{U_\alpha\}$ 中的有限个开集所覆盖. 因此 I_l 包含 S 中的无限个点；

(2) $\lim\limits_{l\to\infty}\operatorname{diam}(I_l\cap S)=0$.

由定理 11.1.6′，知存在唯一点 $a=(\xi,\eta)\in\bigcap_{l=1}^{\infty}(I_l\cap S)$.

任取包含点 a 的开集 $U_*\in\{U_\alpha\}$，显然只要适当选择 r，就有 $O(a,r)\subset U_*$. 又由于 $\lim\limits_{l\to\infty}\operatorname{diam}(I_l\cap S)=0$，则当 l 充分大时就成立 $I_l\cap S\subset O(a,r)\subset U_*$. 这就得到了矛盾.

证毕

定理 11.1.10 设 S 是 $\mathbf{R}^n$ 的子集，那么以下三个命题等价：

(1) S 是有界闭集.

(2) S 是紧集.

(3) S 的任一无限子集在 S 中必有聚点.

证 (1) 与(2) 的等价性就是定理 11.1.9.

(1)⇒(3)：设 S 是有界闭集. 由推论 11.1.1 即知 S 的无限子集必有聚点，而 S 是闭集，因此这个聚点必属于 S.

(3)⇒(1)：若 S 的任一无限子集在 S 中都有聚点，则显然 S 中的任一收敛点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 的极限必属于 S，因此 S 含有它的全部聚点，即 S 是闭集.

而若此时 S 不是有界的，那么在 S 中存在点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 满足

$$|\boldsymbol{x}_k| > k, \quad k = 1,2,\cdots.$$

$\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是无限集，且在 $\mathbf{R}^n$ 中(因而在 S 中) 没有聚点. 这个矛盾表明 S 是有界的.

证毕

Cantor 闭区域套定理、Bolzano-Weierstrass 定理、Cauchy 收敛原理和 Heine-Borel 定理称为 Euclid 空间上的基本定理，它们是相互等价的.

习 题

1. 证明定理 11.1.1：距离满足正定性、对称性和三角不等式.
2. 证明：若 $\mathbf{R}^n$ 中的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 收敛，则其极限是唯一的.
3. 设 $\mathbf{R}^n$ 中的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 和 $\{\boldsymbol{y}_k\}$ 收敛，证明对于任何实数 α,β，等式
$$\lim_{k\to\infty}(\alpha\boldsymbol{x}_k + \beta\boldsymbol{y}_k) = \alpha\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k + \beta\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{y}_k$$
成立.
4. 求下列 $\mathbf{R}^2$ 中子集的内部、边界与闭包：
   1) $S = \{(x,y) \mid x > 0, y \neq 0\}$；
   2) $S = \{(x,y) \mid 0 < x^2 + y^2 \leqslant 1\}$；
   3) $S = \left\{(x,y) \mid 0 < x \leqslant 1, y = \sin\dfrac{1}{x}\right\}$.
5. 求下列点集的全部聚点：
   (1) $S = \left\{(-1)^k\dfrac{k}{k+1} \,\middle|\, k = 1,2,\cdots\right\}$；
   (2) $S = \left\{\left(\cos\dfrac{2k\pi}{5}, \sin\dfrac{2k\pi}{5}\right) \,\middle|\, k = 1,2,\cdots\right\}$；
   (3) $S = \{(x,y) \mid (x^2+y^2)(y^2-x^2+1) \leqslant 0\}$.
6. 证明定理 11.1.3：$\boldsymbol{x}$ 是 S 的聚点的充分必要条件是：存在点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 满

足 $\boldsymbol{x}_k \in S$，$\boldsymbol{x}_k \neq \boldsymbol{x}$，$k = 1,2,\cdots$，且 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}$.

7. 设 U 是 $\mathbf{R}^2$ 上的开集，是否 U 的每个点都是它的聚点. 对于 $\mathbf{R}^2$ 中的闭集又如何呢?
8. 证明 $S \subset \mathbf{R}^n$ 的所有内点组成的点集 S° 必是开集.
9. 证明 $S \subset \mathbf{R}^n$ 的闭包 $\bar{S} = S \cup S'$ 必是闭集.
10. 证明 Cantor 闭区域套定理.
11. 举例说明：满足 $\lim\limits_{k\to\infty}|x_{k+1} - x_k| = 0$ 的点列 $\{x_k\}$ 不一定收敛.
12. 设 E、$F \subset \mathbf{R}^n$ 为紧集，证明 $E \cap F$ 和 $E \cup F$ 为紧集.
13. 用定义证明点集 $\{0\} \cup \left\{\dfrac{1}{k}\,\middle|\, k = 1,2,\cdots\right\}$ 是 $\mathbf{R}$ 中的紧集.
14. 应用 Heine-Borel 定理直接证明：$\mathbf{R}^n$ 上有界无限点集必有聚点.

§2 多元连续函数

多元函数

在科学技术及日常生活中，常常遇到的是因变量的变化与几个自变量有关. 例如一定量的理想气体的压强 P、体积 V 和绝对温度 T 之间具有关系

$$P = \frac{RT}{V} \qquad (R \text{ 是普适气体常量}),$$

即压强 P 的变化同时依赖于 V 和 T.

再如圆台的体积 V 和它的两个底半径 R，r 及高 h 之间有关系

$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2),$$

即体积 V 的变化同时依赖于 R，r 和高 H.

这些例子举不胜举. 它们表示的是因变量随多个自变量的变化而相应变化的某种规律，这是一元函数的推广，即**多元函数**. 下面几章中将导出多元函数微积分的重要理论和方法.

定义 11.2.1 设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 上的点集，D 到 $\mathbf{R}$ 的映射

$$f: D \to \mathbf{R},$$
$$\boldsymbol{x} \mapsto z$$

称为 n **元函数**，记为 $z = f(\boldsymbol{x})$.

其中，D 称为 f 的**定义域**，$\mathfrak{R} = \{u \mid u = f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in D\}$ 称为 f 的**值域**，$\Gamma = \{(\boldsymbol{x}, z) \mid z = f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in D\}$ 称为 f 的**图象**.

例 11.2.1 $z = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}$ 是二元函数，其定义域为

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\},$$

几何图象是一个上半椭球面(见图 11.2.1).

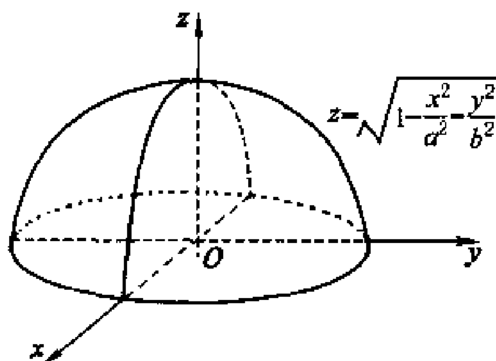


图 11.2.1

多元函数的极限

现在我们将一元函数的极限定义推广到多元函数.

定义 11.2.2　设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 上的开集,$\boldsymbol{x}_0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)\in D$,$z=f(\boldsymbol{x})$ 是定义在 $D\setminus\{\boldsymbol{x}_0\}$ 上的 n 元函数.如果存在实数 A,对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得

$$|f(\boldsymbol{x})-A|<\varepsilon$$

对于所有 $\boldsymbol{x}\in O(\boldsymbol{x}_0,\delta)\setminus\{\boldsymbol{x}_0\}$ 成立,则称 $\boldsymbol{x}$ 趋于 $\boldsymbol{x}_0$ 时 $f(\boldsymbol{x})$ **收敛**,并称 A 为 $f(\boldsymbol{x})$ 当 $\boldsymbol{x}$ 趋于 $\boldsymbol{x}_0$ 时的(**n 重**)**极限**,记为

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}f(\boldsymbol{x})=A\text{(或 }\lim_{\substack{x_1\to x_1^0\\ x_2\to x_2^0\\ \cdots\\ x_n\to x_n^0}}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=A\text{,或 }f(\boldsymbol{x})\to A\ (\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0)\text{)}.$$

注　在上面的定义中,"$\boldsymbol{x}\in O(x_0,\delta)\setminus\{\boldsymbol{x}_0\}$"也可以用下面的条件

$$|x_1-x_1^0|<\delta,\quad |x_2-x_2^0|<\delta,\cdots,|x_n-x_n^0|<\delta,\quad \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{x}_0$$

替代.请读者想想为什么.

例 11.2.2　设 $f(x,y)=(x+y)\sin\dfrac{y}{x^2+y^2}$,证明 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}f(x,y)=0$.

证　由于

$$|f(x,y)-0|=\left|(x+y)\sin\frac{y}{x^2+y^2}\right|\leqslant|x+y|\leqslant|x|+|y|,$$

所以,对于任意给定的 $\varepsilon>0$,只要取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$,那么当 $|x-0|<\delta$,$|y-0|<\delta$,且 $(x,y)\neq(0,0)$ 时,

$$|f(x,y)-0|\leqslant|x|+|y|<\delta+\delta=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

这说明了$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0$.

对一元函数而言，只要在 x_0 的左、右极限存在且相等，那么函数在 x_0 处的极限就存在.而多元函数就没有这样简单.根据极限存在的定义，要求当 x 以任何方式趋于 x_0 时，函数值都趋于同一个极限.这就为我们判断函数极限的不存在提供了方便，因为若自变量沿不同的两条曲线趋于某一定点时，函数的极限不同或不存在，那么这个函数在该点的极限一定不存在.

例 11.2.3　设 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0)$.

显然，当(x,y)沿 x 轴和 y 轴趋于$(0,0)$时，$f(x,y)$的极限都是 0.但它沿直线 $y=mx$ 趋于$(0,0)$时，

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=mx}}f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{mx^2}{x^2+m^2x^2}=\frac{m}{1+m^2},$$

它对不同的 m 有不同的极限值.这说明 $f(x,y)$ 在点$(0,0)$的极限不存在.

即使 x 沿任意直线趋于 x_0 时，$f(x,y)$的极限都存在且相等，仍无法保证它在 x_0 处有极限.

例 11.2.4　设 $f(x,y)=\dfrac{(y^2-x)^2}{y^4+x^2},(x,y)\neq(0,0)$.

当(x,y)沿直线 $y=mx$ 趋于$(0,0)$时，成立

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=mx}}f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{(m^2x^2-x)^2}{m^4x^4+x^2}=1;$$

在(x,y)沿 y 轴趋于$(0,0)$时也成立$\lim\limits_{\substack{y\to0\\x=0}}f(x,y)=1$，因此$(x,y)$沿任何直线趋于$(0,0)$时 $f(x,y)$ 极限存在且相等.

但 $f(x,y)$ 在点$(0,0)$的极限不存在.事实上，它在抛物线 $y^2=x$ 上的值为 0，因此当(x,y)沿这条抛物线趋于$(0,0)$时，它的极限为 0.

一元函数的极限的性质，如唯一性、局部有界性、局部保序性、局部夹逼性及极限的四则运算法则，对二元函数依然成立，这里不再细述，请读者自行加以证明.

累次极限

对重极限$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)$，人们很自然会想到的是，能否在一定条件下将重极限$(x,y)\to(x_0,y_0)$分解成为两个独立的极限 $x\to x_0$ 和 $y\to y_0$，再利用一元函数的极限理论和方法逐个加以处理？

这后一种极限称为**累次极限**.

定义 11.2.3　设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 上的开集，$(x_0,y_0)\in D$，$z=f(x,y)$ 为定义

在 $D\setminus\{(x_0,y_0)\}$ 上的二元函数. 如果对于每个固定的 $y\neq y_0$, 极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$ 存在, 并且极限

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}f(x,y)$$

存在, 那么称此极限值为函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的先对 x 后对 y 的**二次极限**.

同理可得到先对 y 后对 x 的二次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$.

累次极限存在与重极限存在的关系很复杂. 例 11.2.3 和例 11.2.4 其实已经告诉我们, 二次极限存在不能保证二重极限存在(请读者思考理由). 而从下面的例子可以知道, 二重极限存在同样不能保证二次极限存在.

例 11.2.5 (二重极限存在, 但两个二次极限均不存在) 设

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{y}, & x\neq 0 \text{ 且 } y\neq 0,\\ 0, & x=0 \text{ 或 } y=0.\end{cases}$$

由于

$$|f(x,y)|\leqslant x^2+y^2,$$

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}f(x,y)=0$. 但在 $(0,0)$ 点两个二次极限显然不存在.

例 11.2.6 (二重极限存在, 两个二次极限中有一个不存在) 设

$$f(x,y)=\begin{cases}y\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \text{ 且 } y\neq 0,\\ 0, & x=0 \text{ 或 } y=0.\end{cases}$$

显然有 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}f(x,y)=0$, 即二重极限存在. 但

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}f(x,y)=\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}y\sin\frac{1}{x}\right]=0,$$

而先对 x 后对 y 的二次极限不存在.

此外一个二次极限存在不能保证另一个二次极限也存在; 即使两个二次极限都存在, 也不一定相等. 也就是说, **两个极限运算不一定可以交换次序**(参见本节习题 6(2)).

不过, 在二重极限存在时, 我们有下面的结果:

定理 11.2.1 若二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点存在二重极限

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=A,$$

且当 $x\neq x_0$ 时存在极限

$$\lim_{y\to y_0}f(x,y)=\varphi(x),$$

那么 $f(x,y)$ 在(x_0,y_0)点的先对 y 后对 x 的二次极限存在且与二重极限相等,即

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}f(x,y)=\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=A.$$

证 只要证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=A$ 即可.

对于任意给定的 $\varepsilon>0$,由于 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=A$,所以存在 $\delta>0$,使得当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时有

$$|f(x,y)-A|<\frac{\varepsilon}{2},$$

于是对于每个满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 的 x,令 $y\to y_0$,就得到

$$|\varphi(x)-A|=\lim_{y\to y_0}|f(x,y)-A|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

这就是说,对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,

$$|\varphi(x)-A|<\varepsilon.$$

证毕

同样可证:在二重极限存在的情况下,如果当 $y\neq y_0$ 时存在极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=\phi(y)$,那么

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}f(x,y)=\lim_{y\to y_0}\phi(y)=\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y).$$

所以,若函数 $f(x,y)$ 的二重极限及两个二次极限都存在,则三者必相等,即

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}f(x,y)=\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y).$$

这意味着,此时极限运算可以交换次序.

多元函数的连续性

定义 11.2.4 设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 上的开集,$z=f(\boldsymbol{x})$ 是定义在 D 上的函数.设 $\boldsymbol{x}_0\in D$,如果

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}_0),$$

则称函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在点 $\boldsymbol{x}_0$ **连续**.用"$\varepsilon-\delta$"语言来说就是:如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得

$$|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0)|<\varepsilon$$

对于所有 $\boldsymbol{x}\in O(\boldsymbol{x}_0,\delta)$ 成立,则称函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 连续.

如果函数 $f(x)$ 在开集 D 上每一点连续,就称 $f(x)$ 在 D 上连续,或称 $f(x)$ 是 D 上的**连续函数**.

例 11.2.7 函数 $f(x,y)=\sin\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上连续.

证 设 (x_0,y_0) 为 $\mathbf{R}^2$ 上的任一点.由于

$$\begin{aligned}
&|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\\
=&\left|\sin\sqrt{x^2+y^2}-\sin\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right|\\
=&2\left|\cos\frac{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{2}\right|\\
\leqslant&\left|\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right|\\
\leqslant&\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\quad(\text{利用三角不等式}).
\end{aligned}$$

于是,对于任意给定的 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\varepsilon$,当 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时就成立

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon.$$

这说明 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点连续.由于 (x_0,y_0) 为 $\mathbf{R}^2$ 上的任一点,于是 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上连续.

一元连续函数和、差、积、商及复合函数性质同样可以平行地推广到多元连续函数.

例 11.2.8 计算极限 $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to0}}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 注意到函数 $\ln(x+e^y)$ 和 $\sqrt{x^2+y^2}$ 在自然定义域上的连续性,由极限的运算法则得

$$\lim_{\substack{x\to1\\y\to0}}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to0}}\ln(x+e^y)}{\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to0}}\sqrt{x^2+y^2}}=\ln2.$$

例 11.2.9 计算极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sin\left[(y+1)\sqrt{x^2+y^2}\right]}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 注意到 $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin t}{t}=1$ 就得

$$\begin{aligned}
&\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sin\left[(y+1)\sqrt{x^2+y^2}\right]}{\sqrt{x^2+y^2}}\\
=&\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sin\left[(y+1)\sqrt{x^2+y^2}\right]}{(y+1)\sqrt{x^2+y^2}}\cdot(y+1)
\end{aligned}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin\left[(y+1)\sqrt{x^2+y^2}\right]}{(y+1)\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(y+1)$$
$$= 1.$$

向量值函数

平面解析几何中熟知的参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [t_0, t_1]$$

是一元函数的另一种推广:多个因变量(x 和 y)按某种规律,随自变量 t 的变化而相应变化.一般地,

定义 11.2.5 设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 上的点集,D 到 $\mathbf{R}^m$ 的映射

$$f: D \to \mathbf{R}^m$$
$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto \boldsymbol{z} = (z_1, z_2, \cdots, z_m)$$

称为 ***n* 元 *m* 维向量值函数(或多元函数组)**,记为 $z = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. D 称为 $\boldsymbol{f}$ 的**定义域**,$\Re = \{z \in \mathbf{R}^m \mid z = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in D\}$ 称为 f 的**值域**.

多元函数是 $m = 1$ 的特殊情形.

显然,每个 $z_i(i = 1,2,\cdots,m)$ 都是 $\boldsymbol{x}$ 的函数 $z_i = f_i(\boldsymbol{x})$,它称为 f 的第 i 个坐标(或分量)函数,于是,f 可以表达为分量形式

$$\begin{cases} z_1 = f_1(\boldsymbol{x}), \\ z_2 = f_2(\boldsymbol{x}), \\ \quad \cdots\cdots \\ z_m = f_m(\boldsymbol{x}), \end{cases} \quad \boldsymbol{x} \in D.$$

因此 $\boldsymbol{f}$ 又可表示为

$$f = (f_1, f_2, \cdots, f_m).$$

例 11.2.10 设映射

$$\boldsymbol{f}: [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^3,$$
$$(r, \theta) \mapsto (x, y, z)$$

的具体分量形式是

$$\begin{cases} x = x(r,\theta) = r\cos\theta, \\ y = y(r,\theta) = r\sin\theta, \quad (r \in [0, +\infty), \theta \in [0, 2\pi]), \\ z = z(r,\theta) = r, \end{cases}$$

这是二元三维向量值函数,在空间解析几何中知道,它是三维空间的一张半圆锥面.

我们引进极限的概念:

定义 11.2.2′ 设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 上的开集,$\boldsymbol{x}_0 \in D$,$\boldsymbol{f}: D \setminus \{\boldsymbol{x}_0\} \to \mathbf{R}^m$ 是映射

(向量值函数). 如果存在 m 维向量 $\boldsymbol{A}$, 对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{A}|<\varepsilon$$

对于所有 $\boldsymbol{x}\in O(\boldsymbol{x}_0,\delta)\setminus\{\boldsymbol{x}_0\}$ 成立, 那么称 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 当 $\boldsymbol{x}$ 趋于 $\boldsymbol{x}_0$ 时的**极限**. 并称 $\boldsymbol{x}$ 趋于 $\boldsymbol{x}_0$ 时 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ **收敛**. 记为

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\ \text{或}\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\to\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0).$$

再引进连续的概念:

定义 11.2.4′ 设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 上的开集, $\boldsymbol{x}_0\in D$. $\boldsymbol{f}:D\to\mathbf{R}^m$ 是映射(向量值函数). 如果 $\boldsymbol{f}$ 满足

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0),$$

那么称 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点**连续**.

如果映射 $\boldsymbol{f}$ 在 D 上每一点连续, 就称 $\boldsymbol{f}$ 在 D 上连续. 这时称映射 $\boldsymbol{f}$ 为 D 上的**连续映射**.

如果我们如前所述将 $\boldsymbol{f}$ 表为 $\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_m)$, 那么下面的定理说明了我们可以利用坐标函数来判断 $\boldsymbol{f}$ 的连续性. 也就是说, 映射(向量值函数)的连续性可以归结到它的坐标函数的连续性上去.

定理 11.2.2 设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 上的开集, $\boldsymbol{x}_0\in D$. 那么映射 $\boldsymbol{f}:D\to\mathbf{R}^m$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点连续的充分必要条件为函数 $f_1,f_2,\cdots,f_m$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点连续.

证 这可由不等式

$$|f_j(\boldsymbol{x})-f_j(\boldsymbol{x}_0)|\leqslant|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)|=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\boldsymbol{x}_0))^2}$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{m}|f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\boldsymbol{x}_0)|,\qquad j=1,2,\cdots,m$$

直接得到.

证毕

设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 上的开集, D 为 $\mathbf{R}^l$ 上的开集. $\boldsymbol{g}:D\to\mathbf{R}^n$ 与 $\boldsymbol{f}:\Omega\to\mathbf{R}^m$ 为映射. 若 $\boldsymbol{g}$ 的值域 $\mathfrak{R}_g$ 满足 $\mathfrak{R}_g\subset\Omega$, 则可以定义**复合映射**

$$\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}:D\to\mathbf{R}^m,$$
$$\boldsymbol{u}\mapsto\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u})).$$

关于复合映射的连续性有下述结论:

定理 11.2.3 如果 $\boldsymbol{g}$ 在 D 上连续, $\boldsymbol{f}$ 在 Ω 上连续, 那么复合映射 $\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}$ 在 D 上连续.

请读者根据一元复合函数的类似结果自己补出证明.

例 11.2.11 设 $D=\{(u,v)\in\mathbf{R}^2\mid a<u<b,c<v<d\}$. 映射

$$f: D \to \mathbf{R}^3,$$
$$(u, v) \mapsto (x, y, z)$$

是二元三维向量值函数,它写成分量形式就是

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \quad (u, v) \in D. \\ z = z(u, v), \end{cases}$$

如果$x(u,v)$,$y(u,v)$和$z(u,v)$都是D上的连续函数,从几何上看,这就是空间上连续曲面的一般方程.

习 题

1. 确定下列函数的自然定义域:

(1) $u = \ln(y - x) + \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$;　　(2) $u = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} + \dfrac{1}{\sqrt{z}}$;

(3) $u = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - r^2} (R > r)$;

(4) $u = \arcsin \dfrac{z}{x^2 + y^2}$.

2. 讨论下列函数在(0,0)点的极限是否存在:

(1) $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}$;　　(2) $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$;

(3) $f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < y < x^2, \\ 0, & \text{其它点}; \end{cases}$　　(4) $f(x, y) = \dfrac{x^3 y^3}{x^4 + y^8}$.

3. 对多元函数证明极限的唯一性、局部有界性、局部保序性、局部夹逼性.

4. 对多元函数证明极限的四则运算法则:假设当$\boldsymbol{x}$趋于$\boldsymbol{x}_0$时$f(\boldsymbol{x})$和$g(\boldsymbol{x})$的极限存在,那么

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(\boldsymbol{x}) \pm g(\boldsymbol{x})) = \lim\limits_{x \to x_0} f(\boldsymbol{x}) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(\boldsymbol{x})$;

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(\boldsymbol{x}) \cdot g(\boldsymbol{x})) = \lim\limits_{x \to x_0} f(\boldsymbol{x}) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(\boldsymbol{x})$;

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(\boldsymbol{x}) / g(\boldsymbol{x})) = \lim\limits_{x \to x_0} f(\boldsymbol{x}) / \lim\limits_{x \to x_0} g(\boldsymbol{x})$, $\quad (\lim\limits_{x \to x_0} g(\boldsymbol{x}) \neq 0)$.

5. 求下列各极限:

(1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 1}} \dfrac{1 - xy}{x^2 + y^2}$;　　(2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{1 + x^2 + y^2}{x^2 + y^2}$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{\sqrt{1 + xy} - 1}{xy}$;　　(4) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{1 + x^2 + y^2} - 1}$;

(5) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{\ln(x^2 + e^{y^2})}{x^2 + y^2}$;　　(6) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}$;

(7) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$； (8) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$.

6. 讨论下列函数在点的二重极限和二次极限：

(1) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$；

(2) $f(x,y)=\dfrac{x^2(1+x^2)-y^2(1+y^2)}{x^2+y^2}$；

(3) $f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}$.

7. 验证函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^2}\left(y-\dfrac{1}{2}x^2\right), & x>0\text{ 且}\dfrac{1}{2}x^2<y\leqslant x^2,\\ \dfrac{1}{x^2}(2x^2-y), & x>0\text{ 且 }x^2<y<2x^2,\\ 0, & \text{其它点}\end{cases}$$

在原点不连续，而在其它点连续.

8. 讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

的连续范围.

9. 设二元函数 $f(x,y)$ 在开集 $D\subset\mathbf{R}^2$ 内对于变量 x 是连续的，对于变量 y 满足 Lipschitz 条件：

$$|f(x,y')-f(x,y'')|\leqslant L|y'-y''|,$$

其中 $(x,y'),(x,y'')\in D$，L 为常数(通常称为 Lipschitz 常数). 证明 $f(x,y)$ 在 D 内连续.

10. 证明：若 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{g}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中开集 $D\to\mathbf{R}^m$ 上的连续映射，则映射 $\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}$ 与函数 $\langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}\rangle$ 在 D 上都是连续的.

11. 证明复合映射的连续性(定理 11.2.3).

12. 设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 上的开集，$\boldsymbol{x}_0\in D$. 设 $\boldsymbol{f}:D\to\mathbf{R}^m$ 为向量值函数，它在 $\boldsymbol{x}_0$ 点连续，且 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\mathbf{0}$. 如果 $g(\boldsymbol{x})=|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})|^{\alpha}(\alpha>0)$，证明 $g(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点连续.

§3 连续函数的性质

紧集上的连续映射

现在，我们将一元连续函数在闭区间上的重要性质推广到多元连续函数.

回顾对一元函数的处理过程，是通过引入单侧连续的概念，先将“连续”从内点延伸到边界点，即由开区间连续扩展到闭区间连续，再对闭区间上连续函数进行讨论的.

现在对高维点集作类似处理，先将连续的概念扩展到边界.

定义 11.3.1 *设点集 $K \subset \mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{f}: K \to \mathbf{R}^m$ 为映射（向量值函数），$\boldsymbol{x}_0 \in K$. 如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得*

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)| < \varepsilon$$

（即 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in O(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0), \varepsilon)$）对于所有 $\boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{x}_0, \delta) \cap K$ 成立，则称 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 连续.

如果映射 $\boldsymbol{f}$ 在 K 上每一点连续，就称 $\boldsymbol{f}$ 在 K 上连续，或称映射 $\boldsymbol{f}$ 为 K 上的连续映射.

当 $\boldsymbol{x}_0$ 是 K 的内点时，这就是原来的定义；当 $\boldsymbol{x}_0$ 是 K 的边界点时，只要求 $\boldsymbol{x}_0$ 的 δ 邻域中属于 K 的那些点满足不等式

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)| < \varepsilon.$$

请读者与一元函数的单侧连续定义相比较.

闭区间实质上是一维空间中的有界闭集，顺理成章地，也应该要求 $\boldsymbol{f}$ 的定义域是高维空间中的有界闭集，即紧集. 这样，一元函数在闭区间上的性质就可以拓展至多元函数，这也就是引进紧集概念的一个原因.

先给出紧集上的连续映射的一个重要性质.

定理 11.3.1 *连续映射将紧集映射成紧集.*

证 设 K 是 $\mathbf{R}^n$ 中紧集，$\boldsymbol{f}: K \to \mathbf{R}^m$ 为连续映射. 记 K 的像集为

$$\boldsymbol{f}(K) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^m \mid \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in K\}.$$

由定理 11.1.10，只要证明 $\boldsymbol{f}(K)$ 中的任意一个无限点集必有聚点属于 $\boldsymbol{f}(K)$ 就可以了.

设 $\{\boldsymbol{y}_k\}$ 为 $\boldsymbol{f}(K)$ 的任意一个无限点集，对于每个 $\boldsymbol{y}_k$，任取一个满足 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k) = \boldsymbol{y}_k$ 的 $\boldsymbol{x}_k \in K$，$k = 1, 2, \cdots$，则 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 为紧集 K 中的无限点集，它必有聚点属于 K，即存在 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 的子列 $\{\boldsymbol{x}_{k_l}\}$ 满足

$$\lim_{l \to \infty} \boldsymbol{x}_{k_l} = \boldsymbol{a} \in K.$$

由 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 点的连续性得

$$\lim_{l \to \infty} \boldsymbol{y}_{k_l} = \lim_{l \to \infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{k_l}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}),$$

即 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ 是 $\{\boldsymbol{y}_k\}$ 的一个聚点，它显然属于 $\boldsymbol{f}(K)$. 因此，$\boldsymbol{f}(K)$ 是紧集.

证毕

设 $f(\boldsymbol{x})$ 是紧集 $K \subset \mathbf{R}^n$ 上的连续函数，那么 $f(K)$ 是 $\mathbf{R}$ 中的紧集，因此是有界闭集，因此 $f(K)$ 中的点的最大值和最小值一定在 $f(K)$ 中. 这样就可

得到以下结论：

定理 11.3.2(有界性定理) 设 $f(x)$ 是紧集 $K\subset\mathbf{R}^n$ 上的连续函数，则 $f(x)$ 在 K 上有界.

定理 11.3.3(最值定理) 设 $f(x)$ 是紧集 $K\subset\mathbf{R}^n$ 上的连续函数，则它在 K 上必能取到最大值和最小值，即存在 $\xi_1,\xi_2\in K$，使得对于一切 $x\in K$ 成立

$$f(\xi_1)\leqslant f(x)\leqslant f(\xi_2).$$

现在引入一致连续的概念.

定义 11.3.2 设 K 是 $\mathbf{R}^n$ 中点集，$\boldsymbol{f}:K\to\mathbf{R}^m$ 为映射. 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'')|<\varepsilon$$

对于 K 中所有满足 $|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}''|<\delta$ 的 $\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}''$ 成立，则称 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 K 上**一致连续**.

下面的定理说明了紧集上的连续映射的一致连续性质.

定理 11.3.4(一致连续性定理) 设 K 是 $\mathbf{R}^n$ 中紧集，$\boldsymbol{f}:K\to\mathbf{R}^m$ 为连续映射. 那么 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 K 上一致连续.

证 对于任意给定的 $\varepsilon>0$，由于 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 K 上连续，因此对于任意的 $\boldsymbol{a}\in K$，存在 $\delta_a>0$，使得当 $\boldsymbol{x}\in O(\boldsymbol{a},\delta_a)\cap K$ 时，

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

显然 $\{O(\boldsymbol{a},\frac{\delta_a}{2}),\boldsymbol{a}\in K\}$ 是 K 的开覆盖. 由于 K 是紧集，因此存在其中有限个开集 $O(\boldsymbol{a}_1,\frac{\delta_{a_1}}{2}),O(\boldsymbol{a}_2,\frac{\delta_{a_2}}{2}),\cdots,O(\boldsymbol{a}_m,\frac{\delta_{a_m}}{2})$ 覆盖了 K.

记 $\delta=\frac{1}{2}\min\limits_{1\leqslant j\leqslant m}\{\delta_{a_j}\}$，那么对于 K 中满足 $|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}''|<\delta$ 的任意 $\boldsymbol{x}'$ 和 $\boldsymbol{x}''$，不妨设 $\boldsymbol{x}'\in O(\boldsymbol{a}_t,\frac{\delta_{a_t}}{2})(1\leqslant t\leqslant m)$，则有

$$|\boldsymbol{x}''-\boldsymbol{a}_t|\leqslant|\boldsymbol{x}''-\boldsymbol{x}'|+|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{a}_t|<\frac{1}{2}\delta_{a_t}+\frac{1}{2}\delta_{a_t}=\delta_{a_t},$$

于是成立 $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'')-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}_t)|<\frac{\varepsilon}{2}$. 因此

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'')|&\leqslant|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'')-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}_t)|+|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}_t)|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

由定义，$\boldsymbol{f}$ 在 K 上一致连续.

证毕

连通集与连通集上的连续映射

在直线上,区间实质上是"连成一体"的点集,在高维"连成一体"的点集就是下面定义的连通集.

定义 11.3.3 设 S 是 $\mathbf{R}^n$ 中点集,若连续映射

$$\gamma:[0,1] \to \mathbf{R}^n$$

的值域全部落在 S 中,即满足 $\gamma([0,1]) \subset S$,则称 γ 为 S 中的道路,$\gamma(0)$ 与 $\gamma(1)$ 分别称为道路的起点与终点.

若 S 中的任意两点 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 之间,都存在 S 中满足 $\gamma(0)=\boldsymbol{x},\gamma(1)=\boldsymbol{y}$ 的道路 γ,则称 S 为(**道路**)**连通的**,或称 S 为**连通集**.

直观地说,这意味着 S 中任意两点可以用全部位于 S 中的曲线相联结(参见图 11.3.1).

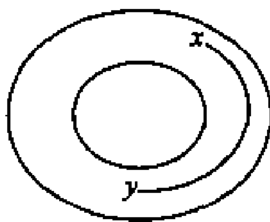


图 11.3.1

显然 $\mathbf{R}$ 上的连通子集为区间,而且 $\mathbf{R}$ 上的连通子集为紧集的充要条件为:它是闭区间.

定义 11.3.4 连通的开集称为(**开**)**区域**.(开)区域的闭包称为**闭区域**.

例如,若 $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$,那么开球

$$S = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mid |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}| < r\}$$

是区域;集合

$$S = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mid a_i < x_i < b_i, i = 1,2,\cdots,n\}$$

也是区域.请读者思考如何为 S 上任意两点构造相应的道路(连续映射).

定理 11.3.5 连续映射将连通集映射成连通集.

证 设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 中的连通集,$\boldsymbol{f}:D \to \mathbf{R}^m$ 为连续映射,记 $\boldsymbol{f}$ 的像集是

$$\boldsymbol{f}(D) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^m \mid \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in D\}.$$

对任意 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{f}(D)$,$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in D$.由 D 的连通性知,存在连续映射

$$\gamma:[0,1] \to D \subset \mathbf{R}^n,$$

使得 $\gamma(0)=\boldsymbol{x},\gamma(1)=\boldsymbol{y}$.因此对连续映射 $\boldsymbol{f}\circ\gamma = \boldsymbol{f}(\gamma(t)), t \in [0,1]$ 来说,有 $\boldsymbol{f}(\gamma([0,1])) \subset \boldsymbol{f}(D)$,即

$$\boldsymbol{f}\circ\gamma:[0,1] \to \boldsymbol{f}(D),$$

且 $\boldsymbol{f}(\gamma(0)) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 及 $\boldsymbol{f}(\gamma(1)) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$.这就是说,$\boldsymbol{f}\circ\gamma$ 是 $\boldsymbol{f}(D)$ 中的道路.

由 $f(x),f(y)$ 的任意性即知 $f(D)$ 是连通的.

证毕

推论 11.3.1 连续函数将连通的紧集映射成闭区间.

由此立即得到:

定理 11.3.6(中间值定理) 设 $K\subset\mathbf{R}^n$ 为连通的紧集,$f(x)$ 是 K 上的连续函数.那么 $f(x)$ 可取到它在 K 上的最小值 m 与最大值 M 之间的一切值.换言之,f 的值域是闭区间 $[m,M]$.

习 题

1.设 $D\subset\mathbf{R}^n$,$f:D\to\mathbf{R}^m$ 为连续映射.如果 D 中的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 满足 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{a}$,且 $\boldsymbol{a}\in D$,证明

$$\lim_{k\to\infty}f(\boldsymbol{x}_k)=f(\boldsymbol{a}).$$

2.设 f 是 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数,c 为实数.设

$$A_c=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\,|\,f(\boldsymbol{x})<c\},B_c=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\,|\,f(\boldsymbol{x})\leqslant c\}.$$

证明 A_c 为 $\mathbf{R}^n$ 上的开集,B_c 为 $\mathbf{R}^n$ 上的闭集.

3.设 A 为 $\mathbf{R}^n$ 上的非空子集,定义 $\mathbf{R}^n$ 上的函数 f 为

$$f(\boldsymbol{x})=\inf\{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\,|\,\boldsymbol{y}\in A\}.$$

它称为 $\boldsymbol{x}$ 到 A 的距离.证明:

(1) 当且仅当 $\boldsymbol{x}\in\bar{A}$ 时,$f(\boldsymbol{x})=0$.

(2) 对于任意 $x',x''\in\mathbf{R}^n$,不等式

$$|f(\boldsymbol{x}')-f(\boldsymbol{x}'')|\leqslant|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}''|$$

成立,即 f 在 $\mathbf{R}^n$ 上一致连续.

(3) 若 A 是紧集,则对于任意给定的 $c>0$,点集 $\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\,|\,f(\boldsymbol{x})\leqslant c\}$ 是紧集.

4.设 f 是 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数,满足

(1) 当 $\boldsymbol{x}\neq 0$ 时成立 $f(\boldsymbol{x})>0$;

(2) 对于任意 $\boldsymbol{x}$ 与 $c>0$,成立 $f(c\boldsymbol{x})=cf(\boldsymbol{x})$.

证明:存在 $a>0,b>0$,使得

$$a|\boldsymbol{x}|\leqslant f(\boldsymbol{x})\leqslant b|\boldsymbol{x}|.$$

提示:先在 $\mathbf{R}^n$ 的单位球面上考虑.

5.设 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ 为连续映射.证明对于任何 $\mathbf{R}^n$ 中子集 A 成立

$$f(\bar{A})\subset\overline{f(A)}.$$

举例说明 $f(\bar{A})$ 能够是 $\overline{f(A)}$ 的真子集.

第十二章　多元第第的微分学

§1　偏导数与全微分

偏导数

将气体状态方程 $PV = BT$ 改写成

$$V(P,T) = \frac{RT}{P} \quad (R \text{ 是普适气体常量}).$$

在等压过程中，方程中的 P 为常数，因此可以将 $V(P,T)$ 看成一元函数 $\widetilde{V}(T)$. 于是，气体体积 V 关于温度 T 的变化率就是 $\widetilde{V}$ 对 T 的导数

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{V}(T)}{\mathrm{d}T} = \frac{R}{P} > 0.$$

这说明此时体积随温度的变化单调增加：温度上升时体积增大；温度下降时体积减小.

而在等温过程中，T 为常数，因此可以将 $V(P,T)$ 看成一元函数 $\hat{V}(P)$. 于是，体积 V 关于压强 P 的变化率就是 $\hat{V}(P)$ 对 P 的导数

$$\frac{\mathrm{d}\,\hat{V}(P)}{\mathrm{d}P} = -\frac{RT}{P^2} < 0.$$

这说明此时体积随压强的变化而单调减少：压强增大时体积收缩；压强减小时体积膨胀. 这些是熟知的物理规律.

这种将一个变量视为常数，而对另一个变量求导，以求得函数关于某个因素的变化率的做法，就是对多元函数求偏导数.

现对二元函数引入偏导数的概念.

定义 12.1.1　设 $D \subset \mathbf{R}^2$ 为开集，

$$z = f(x,y), \quad (x,y) \in D$$

是定义在 D 上的二元函数，$P_0(x_0,y_0)$ 为 D 中一定点. 如果存在极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

那么就称函数 f 在点(x_0,y_0)关于 x **可偏导**，并称此极限为 f 在点(x_0,y_0)关于 x 的**偏导数**，记为$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)$（或 $f_x(x_0,y_0)$，$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$）.

如果函数 f 在 D 中点点都关于 x 可偏导，则 D 中每一点(x,y)与其相应的关于 x 的偏导数$f_x(x,y)$构成了一种对应关系即二元函数关系，它称为 f

关于 x 的**偏导函数**,记为

$$\frac{\partial z}{\partial x}(\text{或 } f_x(x,y),\frac{\partial f}{\partial x}).$$

类似地可定义 f 在点 (x_0,y_0) 关于 y 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)$(或 $f_y(x_0,y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$) 及关于 y 的偏导函数 $\frac{\partial z}{\partial y}$(或 $f_y(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}$).

若 f 在点 (x_0,y_0) 关于 x 和 y 均可偏导,就简称 f 在点 (x_0,y_0) 可偏导.

这样,上面求出的体积 V 关于温度 T 和压强 P 的变化率就可以分别写成

$$\frac{\partial V(P,T)}{\partial T}=\frac{R}{P}>0;\quad \frac{\partial V(P,T)}{\partial P}=-\frac{RT}{P^2}<0.$$

现在来看偏导数的几何意义.考虑函数

$$z=f(x,y),(x,y)\in D,$$

它的图象是一张曲面.平面 $y=y_0$ 与这张曲面的交线 l(见图 12.1.1) 方程为

$$l:\begin{cases}x=x,\\ y=y_0,\\ z=f(x,y_0)\end{cases}.$$

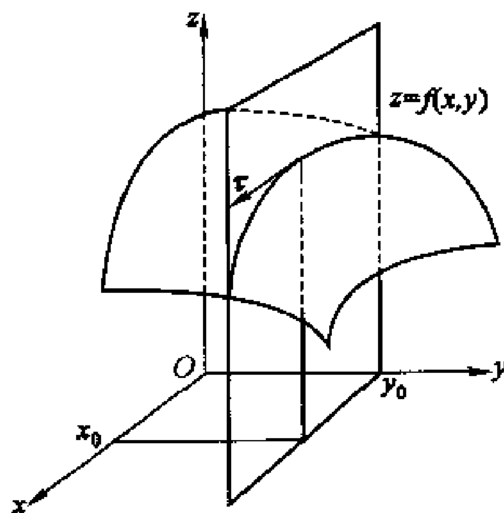


图 12.1.1

利用曲线的切向量的方向余弦表示式,该曲线在点 (x_0,y_0) 处的切向量 $\boldsymbol{\tau}$ 的方向余弦满足

$$\cos(\boldsymbol{\tau},x):\cos(\boldsymbol{\tau},y):\cos(\boldsymbol{\tau},z)=1:0:f_x(x_0,y_0),$$

也就是说,$f_x(x_0,y_0)$ 是平面 $y=y_0$ 上的曲线 l 在点 (x_0,y_0) 处的切线关于 x 轴的斜率.这是一元情况的直接推广.

从偏导数的定义可以看出，对某个变量求偏导数，只要在求导时将其它变量看成常数就可以了，这种思想可以推广到一般的 n 元函数上去：设 $\boldsymbol{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ 为开集 $D \subset \mathbf{R}^n$ 中一定点．定义 n 元函数

$$u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D$$

在 $\boldsymbol{x}^0$ 点关于 $x_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 的偏导数为

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$$

$$= \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1^0, \cdots, x_{i-1}^0, x_i^0 + \Delta x_i, x_{i+1}^0, \cdots, x_n^0,) - f(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)}{\Delta x_i},$$

（如果右面的极限存在的话）．

例 12.1.1 设 $f(x, y) = x^4 + 2x^2y + y^4$，求 $f_x(x, y), f_y(x, y), f_x(0,1)$ 和 $f_y(0,1)$．

解 把 y 看成常数，对 x 求导便得

$$f_x(x, y) = 4x^3 + 4xy.$$

于是 $f_x(0,1) = 0$．

把 x 看成常数，对 y 求导便得

$$f_y(x, y) = 2x^2 + 4y^3.$$

于是 $f_y(0,1) = 4$．

例 12.1.2 求函数 $u = \ln(x + y^2 + z^3)$ 的偏导数．

解

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x + y^2 + z^3},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x + y^2 + z^3},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3z^2}{x + y^2 + z^3}.$$

例12.1.3 设 $z = x^y (x > 0, x \neq 1)$，证明它满足方程

$$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y} = 2z.$$

证 由于$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$，因此

$$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y} \cdot yx^{y-1} + \frac{1}{\ln x} \cdot x^y \ln x = 2x^y = 2z.$$

“可导必定连续”是一元函数中的一条熟知的性质，但对多元函数来讲，类似性质并不成立，即可偏导未必连续．

例 12.1.4 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

计算 $f_x(0,0),f_y(0,0)$.

解 由定义得到

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\dfrac{\Delta x\cdot 0}{\Delta x^2+0^2}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{0}{\Delta x}=0.$$

同理 $f_y(0,0)=0$. 这说明了 $f(x,y)$ 在$(0,0)$点可偏导.

但我们已经知道,$f(x,y)$ 在$(0,0)$点不连续.

方向导数

偏导数反映的是二元函数沿 x 轴方向或 y 轴方向的变化率. 而在平面 $\mathbf{R}^2$ 上,从一点出发有无穷条射线,当然也可以讨论函数沿任一射线方向的变化率.

$\mathbf{R}^2$ 中的单位向量 $\boldsymbol{v}$ 总可以表示为 $\boldsymbol{v}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$,这里 α 为 $\boldsymbol{v}$ 与 x 轴正向的夹角,因此 $\boldsymbol{v}$ 代表了一个方向, $\cos\alpha,\sin\alpha(=\cos\beta)$ 就是 $\boldsymbol{v}$ 的方向余弦(其中 β 为 $\boldsymbol{v}$ 与 y 轴正向的夹角). 设 $P_0(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$,则以 P_0 为起点,方向为 $\boldsymbol{v}$ 的射线(图 12.1.2) 的参数方程为 $\boldsymbol{x}=\overrightarrow{OP_0}+t\boldsymbol{v},t\geqslant0$.

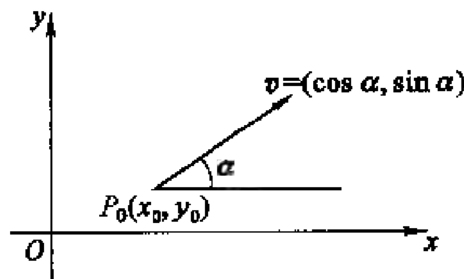


图 12.1.2

定义 12.1.2 设 $D\subset\mathbf{R}^2$ 为开集,

$$z=f(x,y),\quad (x,y)\in D$$

是定义在 D 上的二元函数,$P_0(x_0,y_0)$ 为 D 中一定点,$\boldsymbol{v}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 为一个方向. 如果极限

$$\lim_{t\to0+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\sin\alpha)-f(x_0,y_0)}{t}$$

存在，则称此极限为函数 f 在点 (x_0,y_0) 的沿方向 v 的**方向导数**，记为 $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0)$.

由于 x 轴和 y 轴的正向的方向分别为 $e_1=(1,0)$ 和 $e_2=(0,1)$，从定义立即得到，函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点处关于 x（或 y）可偏导的充分必要条件为 $f(x,y)$ 沿方向 e_1 和 $-e_1$（或方向 e_2 和 $-e_2$）的方向导数都存在且为相反数.

例 12.1.5 求 $f(x,y)=\begin{cases}|x^2-y^2|^{1/2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 的方向导数.

解 对于任一方向 $v(\cos\alpha,\sin\alpha)$，有

$$\frac{f(0+t\cos\alpha,0+t\sin\alpha)-f(0,0)}{t}=\frac{|t|}{t}|\cos^2\alpha-\sin^2\alpha|^{1/2}.$$

当 $\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$ 时，上式为零，因此 $f(x,y)$ 沿这样的方向的方向导数为零.

当 $\cos^2\alpha\neq\sin^2\alpha$ 时，当 $t\to 0+$ 时上式的极限为 $|\cos^2\alpha-\sin^2\alpha|^{1/2}$，它就是 $f(x,y)$ 沿方向 v 的方向导数. 同样可计算出，$f(x,y)$ 沿方向 $-v$ 的方向导数仍为 $|\cos^2\alpha-\sin^2\alpha|^{1/2}$.

特别地，$f(x,y)$ 沿方向 e_i 和 $-e_i(i=1,2)$ 的方向导数均为 1，因此 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的偏导数不存在.

同样，若将 $\mathbf{R}^n$ 中的单位向量 v（即满足 $\|v\|=1$ 的向量）视为一个方向，就可类似定义 n 元函数的方向导数：设 $D\subset\mathbf{R}^n$ 为开集，$x^0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$ 为 D 中一定点，$v=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$ 为一方向. 定义 D 上的 n 元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在点 x^0 的沿方向 v 的**方向导数**为

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial v}(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)\\ &=\lim_{t\to 0+}\frac{f(x_1^0+tv_1,x_2^0+tv_2,\cdots,x_n^0+tv_n)-f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)}{t},\end{aligned}$$

（如果右面的极限存在的话）.

全微分

以上讨论的是自变量沿某个给定方向变化时，函数的变化率. 但在实际问题中，自变量可以随意变化. 比如，对于气体状态方程 $V(P,T)=\frac{RT}{P}$，纯粹的等压或等温过程是不存在的. 真正需要考虑的是，若自变量 P 和 T 分别产生了增量 ΔP 和 ΔT 后，如何估计体积的改变量

$$\Delta V=V(P+\Delta P,T+\Delta T)-V(P,T).$$

一般地，对于函数 $z=f(x,y)$，记它的**全增量**为

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0),$$

我们引入如下定义：

定义 12.1.3 设 $D \subset \mathbf{R}^2$ 为开集，

$$z = f(x,y), \quad (x,y) \in D$$

是定义在 D 上的二元函数，$P_0(x_0,y_0)$ 为 D 中一定点.

若存在只与点(x_0,y_0)有关而与 $\Delta x, \Delta y$ 无关的常数 A 和 B，使得

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right),$$

则称函数 f 在点(x_0,y_0)处是**可微的**，并称其**线性主要部分** $A\Delta x + B\Delta y$ 为 f 在点(x_0,y_0)处的**全微分**，记为 $\mathrm{d}z|_{P_0}$ 或 $\mathrm{d}f(x_0,y_0)$.

若(在$\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2} \to 0$时)将自变量 x,y 的微分 $\Delta x, \Delta y$ 分别记为 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$，那么有全微分形式

$$\mathrm{d}z|_{P_0} = A\mathrm{d}x + B\mathrm{d}y.$$

下面说明几点.

首先，可以明显看出，如果 f 在点(x_0,y_0)处可微，则 f 在点(x_0,y_0)处是连续的：即**可微必连续**.

其次，若 $\Delta y = 0$，便得到

$$f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0) = A\Delta x + o(\Delta x),$$

于是

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x} = A$$

所以$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = A$. 同理可证$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = B$. 因此**可微必可偏导**，同时，得到**全微分公式**

$$\mathrm{d}f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\mathrm{d}y.$$

例 12.1.6 求函数 $z = \mathrm{e}^{xy}$ 在点(2,1)处的全微分.

解 由于

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\mathrm{e}^{xy}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x\mathrm{e}^{xy},$$

则$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,1)} = \mathrm{e}^2$，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,1)} = 2\mathrm{e}^2$. 所以函数在点(2,1)处的全微分为

$$\mathrm{d}z = \mathrm{e}^2\mathrm{d}x + 2\mathrm{e}^2\mathrm{d}y.$$

还可以进一步得到：

定理 12.1.1 设函数

$$z = f(x,y), \quad (x,y) \in D$$

在 $P_0(x_0,y_0)$ 可微，那么对于任一方向 $\boldsymbol{v}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$f$ 在 (x_0,y_0) 点沿 $\boldsymbol{v}$ 的方向导数存在，且

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\sin\alpha.$$

证 由定义和全微分公式，得

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0)&=\lim_{t\to 0+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\sin\alpha)-f(x_0,y_0)}{t}\\&=\lim_{t\to 0+}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)t\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)t\sin\alpha+o(t)}{t}\\&=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\sin\alpha.\end{aligned}$$

证毕

如果 $z=f(x,y)$ 在区域 D 上每一点处都是可微的，则称 f 在 D 上可微．此时成立

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy.$$

第三，用同样的思想可以定义一般 n 元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全微分，并可得到

$$du=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n.$$

如果 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 点可微，那么

$$\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\cos\theta_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cos\theta_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\cos\theta_n,$$

其中 $\boldsymbol{v}=(\cos\theta_1,\cos\theta_2,\cdots,\cos\theta_n)$ 为一方向，而 θ_i 就是 $\boldsymbol{v}$ 与 x_i 轴正向的夹角．

例 12.1.7 求函数 $u=x-\cos\frac{y}{2}+\arctan\frac{z}{y}$ 的全微分．

解 由于

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2}\sin\frac{y}{2}-\frac{z}{y^2+z^2},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{y}{y^2+z^2},$$

所以

$$du=dx+\left(\frac{1}{2}\sin\frac{y}{2}-\frac{z}{y^2+z^2}\right)dy+\frac{y}{y^2+z^2}dz.$$

第四，一元函数的可导与可微是等价的．在高维情形可微必可偏导，但可偏导并不一定可微．例如，函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在(0,0)点不连续,因此不可微,但它在(0,0)点是可偏导的(见例 12.1.4).

事实上,一个函数即使在某一点处连续,且所有方向导数都存在,也不一定在该点可微.

例 12.1.8 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^3}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

由于

$$|f(x,y)|=\left|\frac{2xy^3}{x^2+y^4}y\right|\leqslant\left|\frac{x^2+y^4}{x^2+y^4}y\right|=|y|,$$

所以 $f(x,y)$ 在(0,0)点连续;而 $f(x,y)$ 在(0,0)点沿方向 $\boldsymbol{v}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 的方向导数为

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v}&=\lim_{t\to 0+}\frac{f(0+t\cos\alpha,0+t\sin\alpha)-f(0,0)}{t}\\&=\lim_{t\to 0+}\frac{2\cos\alpha\sin^3\alpha}{\cos^2\alpha+t^2\sin^4\alpha}t^2=0.\end{aligned}$$

因此 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$. 但因为

$$f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]=f(\Delta x,\Delta y),$$

而

$$\lim_{\substack{\Delta y\to 0+\\ \Delta x=\Delta y^2}}\frac{f(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\lim_{\substack{\Delta y\to 0+\\ \Delta x=\Delta y^2}}\frac{\dfrac{2\Delta x\Delta y^3}{\Delta x^2+\Delta y^4}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$

$$\lim_{\Delta y\to 0+}\frac{\dfrac{2\Delta y^5}{\Delta y^4+\Delta y^4}}{\Delta y\sqrt{1+\Delta y^2}}=\lim_{\Delta y\to 0+}\frac{1}{\sqrt{1+\Delta y^2}}=1\neq 0,$$

即

$$\begin{aligned}&f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]\\&\neq o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}),\end{aligned}$$

所以 $f(x,y)$ 在(0,0)点不可微.

但关于可微有如下的充分条件:

定理 12.1.2 设函数 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 点的某个邻域上存在偏导数,并且偏导数在 P_0 点连续,那么 f 在 P_0 点可微.

证 由于

$$\begin{aligned}&f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\&=[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)]\end{aligned}$$

$$+[f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]$$
$$=f_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)\Delta x+f_y(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y,$$
$$0<\theta_1,\theta_2<1.$$

最后一步利用了微分中值定理.

因为 f_x 和 f_y 在 (x_0,y_0) 点连续,所以在 $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0$ 时

$$f_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)=f_x(x_0,y_0)+o(1),$$
$$f_y(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)=f_y(x_0,y_0)+o(1).$$

于是

$$\begin{aligned}\Delta z&=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\&=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+o(1)\Delta x+o(1)\Delta y\\&=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right),\end{aligned}$$

即 f 在 (x_0,y_0) 点可微.

证毕

梯度

定义 12.1.4 *设 $D\subset\mathbf{R}^2$ 为开集,$P_0(x_0,y_0)\in D$. 如果函数 $z=f(x,y)$ 在 P_0 点可偏导,则称向量 $(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0))$ 为 f 在点 P_0 的梯度,记为 $\mathrm{grad}\,f(P_0)$,即*

$$\mathrm{grad}\,f(P_0)=f_x(x_0,y_0)\boldsymbol{i}+f_y(x_0,y_0)\boldsymbol{j}.$$

如果 f 在 P_0 可微,注意到方向导数公式中 $\|\boldsymbol{v}\|=1$,则得到它的另一种表达:

$$\frac{\partial f}{\partial v}=\mathrm{grad}\,f\cdot\boldsymbol{v}=\|\mathrm{grad}\,f\|\cos(\mathrm{grad}\,f,\boldsymbol{v}).$$

其中 $(\mathrm{grad}\,f,\boldsymbol{v})$ 表示 $\mathrm{grad}\,f$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的夹角.

由此可见,函数 f 在任何一点的方向导数的绝对值不会超过它在该点的梯度的模 $\|\mathrm{grad}\,f\|$,且最大值 $\|\mathrm{grad}\,f\|$ 在梯度方向达到. 这就是说,沿着梯度方向函数值增加最快. 同样,f 的方向导数的最小值 $-\|\mathrm{grad}\,f\|$ 在梯度的反方向达到,或者说,沿着梯度相反方向函数值减少最快.

读者很容易证明梯度的下列基本性质:

1) 若 $f\equiv c$(c 为常数),则 $\mathrm{grad}\,f=0$.

2) 若 α、β 为常数,则 $\mathrm{grad}(\alpha f+\beta g)=\alpha\,\mathrm{grad}\,f+\beta\,\mathrm{grad}\,g$.

3) $\mathrm{grad}(f\cdot g)=f\cdot\mathrm{grad}\,g+g\cdot\mathrm{grad}\,f$

4) $\mathrm{grad}\left(\dfrac{f}{g}\right)=\dfrac{g\cdot\mathrm{grad}\,f-f\cdot\mathrm{grad}\,g}{g^2}\ (g\neq 0)$.

用同样的思想可以定义一般 n 元函数的梯度:设 $D\subset\mathbf{R}^n$ 为开集,$\boldsymbol{x}^0=$

$(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)\in D$. 如果函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点可偏导,我们称向量 $(f_{x_1}(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0),f_{x_2}(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0),\cdots,f_{x_n}(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0))$ 为 f 在点 $\boldsymbol{x}^0$ 的梯度,记为 $\mathrm{grad}\, f(\boldsymbol{x}^0)$. 上述公式也在高维成立.

例 12.1.9 设 $f(x,y)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}, a>b>0$. 在上半平面 $\{(x,y)\in \mathbf{R}^2 \mid y\geqslant 0\}$ 上,指出函数值增加最快的方向.

解 由于在梯度不为零处,梯度方向就是函数值增加最快的方向,即对于 $(x,y)\neq(0,0)$ 的点,梯度

$$\mathrm{grad}\, f(x,y)=\frac{2x}{a^2}\boldsymbol{i}+\frac{2y}{b^2}\boldsymbol{j}$$

的方向就是函数值增加最快的方向.

而在原点 $(0,0)$,函数的梯度为零向量,这就要用其它方法考虑.

由于

$$\begin{aligned} f(x,y)-f(0,0) &= \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \\ &= \frac{1}{b^2}(x^2+y^2)-\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)x^2, \end{aligned}$$

因此,在以原点为中心的任意小圆周上,当 $x=0$ 时 $f(x,y)-f(0,0)$ 最大,即函数值增加最大. 这就是说,在原点处,沿 y 轴方向函数值增加最快(参见图 12.1.3).

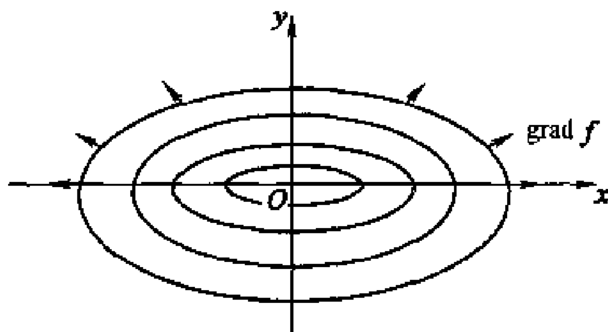


图 12.1.3

关于梯度以后在场论中还要详加讨论.

高阶偏导数

设 $z=f(x,y)$ 在区域 $D\subset \mathbf{R}^2$ 上具有偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_x(x,y) \text{ 和 } \frac{\partial z}{\partial y}=f_y(x,y).$$

那么在 D 上 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$ 都是 x,y 的二元函数. 如果这两个偏导函数

的偏导数也存在，则称它们是 $f(x,y)$ 的**二阶偏导数**.

按照对自变量的求导次序的不同，二阶偏导数有下列四种：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(f_x(x,y))=f_{xx}(x,y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(f_y(x,y))=f_{yx}(x,y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(f_x(x,y))=f_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(f_y(x,y))=f_{yy}(x,y),$$

其中第二、第三两个二阶偏导数称为混合偏导数.

可类似得到三阶、四阶以至更高阶偏导数. 二阶及二阶以上的偏导数统称为**高阶偏导数**.

同样可对 n 元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 定义高阶偏导数.

例 12.1.10 设 $z=\arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$. 那么

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)^2}\cdot\frac{(1-xy)-(x+y)(-y)}{(1-xy)^2}$$

$$=\frac{1+y^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2}$$

$$=\frac{1+y^2}{(1+x^2)(1+y^2)}=\frac{1}{(1+x^2)}.$$

同理

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+y^2}.$$

因此

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{-2x}{(1+x^2)^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=0,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{-2y}{(1+y^2)^2}.$$

注意本例中两个混合偏导数是相等的.

例 12.1.11 设 $f(x,y)=\begin{cases}xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 那么它的一阶偏导数为

$$f_x(x,y)=\begin{cases}y\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

$$f_y(x,y)=\begin{cases} y\dfrac{x^4-4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

于是

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}(0,0)=f_{xy}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f_x(0,0+\Delta y)-f_x(0,0)}{\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-\dfrac{\Delta y^5}{\Delta y^4}-0}{\Delta y}=-1,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(0,0)=f_{yx}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_y(0+\Delta x,0)-f_y(0,0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\dfrac{\Delta x^5}{\Delta x^4}-0}{\Delta x}=1.$$

即 $f(x,y)$ 在$(0,0)$点的两个混合偏导数不相等.

关于混合偏导数相等的条件有如下定理:

定理 12.1.3 如果函数 $z=f(x,y)$ 的两个混合偏导数 f_{xy} 和 f_{yx} 均在点(x_0,y_0)连续,那么等式

$$f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$$

成立.

证 考虑差商

$$I=\frac{[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)]-[f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]}{\Delta x\Delta y}.$$

设

$$\varphi(x)=f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0),$$
$$\phi(y)=f(x_0+\Delta x,y)-f(x_0,y).$$

那么利用微分中值定理可得

$$I=\frac{[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)]-[f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]}{\Delta x\Delta y}$$

$$=\frac{\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)}{\Delta x\Delta y}=\frac{\varphi'(x_0+\alpha_1\Delta x)\Delta x}{\Delta x\Delta y}$$

$$=\frac{[f_x(x_0+\alpha_1\Delta x,y_0+\Delta y)-f_x(x_0+\alpha_1\Delta x,y_0)]}{\Delta y}$$

$$=f_{xy}(x_0+\alpha_1\Delta x,y_0+\alpha_2\Delta y),\quad 0<\alpha_1,\alpha_2<1.$$

另一方面,将 I 重新组合还可以得到

$$I=\frac{[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)]-[f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)]}{\Delta x\Delta y}$$

$$= \frac{\phi(y_0+\Delta y)-\phi(y_0)}{\Delta x\Delta y} = \frac{\phi'(y_0+\alpha_3\Delta y)\Delta y}{\Delta x\Delta y}$$

$$= \frac{[f_y(x_0+\Delta x, y_0+\alpha_3\Delta y) - f_y(x_0, y_0+\alpha_3\Delta y)]}{\Delta x}$$

$$= f_{yx}(x_0+\alpha_4\Delta x, y_0+\alpha_3\Delta y), \quad 0<\alpha_3,\alpha_4<1.$$

因此

$$f_{xy}(x_0+\alpha_1\Delta x, y_0+\alpha_2\Delta y) = f_{yx}(x_0+\alpha_4\Delta x, y_0+\alpha_3\Delta y).$$

利用两个混合偏导数 f_{xy} 和 f_{yx} 在点 (x_0,y_0) 连续的条件,得到

$$\begin{aligned} f_{xy}(x_0,y_0) &= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f_{xy}(x_0+\alpha_1\Delta x, y_0+\alpha_2\Delta y) \\ &= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f_{yx}(x_0+\alpha_4\Delta x, y_0+\alpha_3\Delta y) \\ &= f_{yx}(x_0,y_0). \end{aligned}$$

证毕

在科学和工程技术的实际应用中,往往认为所出现的偏导数是连续的,所以不介意求偏导的次序.例如 $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}$ 就概括了六种不同次序的四阶混合偏导数

$$f_{xxyy}, f_{xyxy}, f_{yxxy}, f_{xyyx}, f_{yxyx}, f_{yyxx}.$$

读者在阅读有关书籍时,请注意这一点.

例 12.1.12 设 $z=(x^2+y^2)e^{x+y}$,计算 $\frac{\partial^{p+q} z}{\partial x^p\partial y^q}$.

解 由于

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k}(e^{x+y}) = \frac{\partial^k}{\partial y^k}(e^{x+y}) = e^{x+y}, \quad k=1,2,\cdots,$$

因此,关于 x 用一次 Leibniz 公式,得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^p z}{\partial x^p} &= (x^2+y^2)e^{x+y} + C_p^1(2x)e^{x+y} + C_p^2\cdot 2\cdot e^{x+y} \\ &= [x^2+y^2+2px+p(p-1)]e^{x+y}. \end{aligned}$$

再关于 y 用一次 Leibniz 公式,就得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{p+q} z}{\partial x^p\partial y^q} &= [x^2+y^2+2px+p(p-1)]e^{x+y} + C_q^1(2y)e^{x+y} + C_q^2\cdot 2\cdot e^{x+y} \\ &= [x^2+y^2+2(px+qy)+p(p-1)+q(q-1)]e^{x+y}. \end{aligned}$$

高阶微分

设 $z=f(x,y)$ 在区域 $D\subset \mathbf{R}^2$ 上具有连续偏导数,那么它是可微的,并且

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

若 z 还具有二阶连续偏导数，那么$\frac{\partial z}{\partial x}$与$\frac{\partial z}{\partial y}$也是可微的，由于自变量的微分 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$ 可视为与 x，y 无关的常量，从而 $\mathrm{d}z$ 可微. 我们称 $\mathrm{d}z$ 的微分为 z 的**二阶微分**，记为

$$\mathrm{d}^2 z = \mathrm{d}(\mathrm{d}z).$$

一般地，可在 z 的 k 阶微分 $\mathrm{d}^k z$ 的基础上定义它的 $k+1$ 阶微分为（如果存在的话）

$$\mathrm{d}^{k+1} z = \mathrm{d}(\mathrm{d}^k z), \quad k = 1,2,\cdots.$$

二阶及二阶以上的微分统称为**高阶微分**.

由于对自变量 x，y 总有

$$\mathrm{d}^2 x = \mathrm{d}(\mathrm{d}x) = 0, \quad \mathrm{d}^2 y = \mathrm{d}(\mathrm{d}y) = 0,$$

于是 $z = f(x,y)$ 的二阶微分为

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^2 z &= \mathrm{d}(\mathrm{d}z) = \mathrm{d}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y\right) \\
&= \mathrm{d}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\mathrm{d}^2 x + \mathrm{d}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\mathrm{d}y + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\mathrm{d}^2 y \\
&= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\mathrm{d}x + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\mathrm{d}x + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}y \\
&= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2.
\end{aligned}$$

这里 $\mathrm{d}x^2$ 和 $\mathrm{d}y^2$ 分别表示 $(\mathrm{d}x)^2$ 和 $(\mathrm{d}y)^2$.

若将$\frac{\partial}{\partial x}$和$\frac{\partial}{\partial y}$看作求偏导数的运算符号，并约定

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

等等，那么一阶和二阶的微分公式可以分别表示为

$$\mathrm{d}z = \left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}\right)z,$$

$$\mathrm{d}^2 z = \left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z,$$

读者不难用数学归纳法证明高阶微分公式

$$\mathrm{d}^k z = \left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k z, \quad k = 1,2,\cdots.$$

同样可对 n 元函数 $u = f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 定义各阶微分，并且上式依然成立，即

$$\mathrm{d}^k u = \left(\mathrm{d}x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathrm{d}x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + \mathrm{d}x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k u, \quad k = 1,2,\cdots.$$

例 12.1.13 设 $u = xyz$,计算 $\mathrm{d}^3 u$.

解 易算得

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} = 0,$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z^2} = 0,$$

以及

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 1.$$

因此

$$\mathrm{d}^3 u = \left(\mathrm{d}x \frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{d}y \frac{\partial}{\partial y} + \mathrm{d}z \frac{\partial}{\partial z}\right)^3 u = 6\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

向量值函数的导数

为了方便,以下除非特别说明,总是将向量记号 $\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 等视为列向量.将 $\mathbf{R}^n$ 上区域 D 上的 n 元 m 值向量值函数

$$\boldsymbol{f}: D \to \mathbf{R}^m$$
$$\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

写成坐标分量形式

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ \quad \cdots\cdots \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n), \end{cases} \quad (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D,$$

设点 $\boldsymbol{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)^{\mathrm{T}} \in D$(记号"T"表示转置).

将上面关于多元函数的讨论用于 $\boldsymbol{f}$ 的每一个分量函数,即可平行地得到:

1. 若 $\boldsymbol{f}$ 的每一个分量函数 $f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$($i = 1,2,\cdots,m$)都在 $\boldsymbol{x}^0$ 点可偏导,就称**向量值函数** $\boldsymbol{f}$ **在** $\boldsymbol{x}^0$ **点可导**,并称矩阵

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}^0)\right)_{m \times n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}^0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}^0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}^0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}^0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}^0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}^0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}^0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}^0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}^0) \end{pmatrix}$$

为向量值函数 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点的**导数**或 **Jacobi 矩阵**,记为 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}^0)$(或 $D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0)$,

$\mathrm{J}_f(\boldsymbol{x}^0))$.

注 n 元函数 $z=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 $m=1$ 时的特殊情形，所以它在 $\boldsymbol{x}^0$ 点的导数就是

$$f'(\boldsymbol{x}^0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}^0),\frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}^0),\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}^0)\right).$$

如果向量值函数 $\boldsymbol{f}$ 在 D 上每一点可导，就称 $\boldsymbol{f}$ 在 D 上可导. 这时候的对应关系

$$\boldsymbol{x}\in D\ \mapsto \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})=\mathrm{J}_f(\boldsymbol{x})$$

称为 $\boldsymbol{f}$ 在 D 上的导数，记为 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$(或 $D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, $\mathrm{J}_f(\boldsymbol{x})$).

例 12.1.14 向量值函数

$$\boldsymbol{f}:[\alpha,\beta]\to\mathbf{R}^3$$
$$t\mapsto\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}$$

用坐标分量表示就是

$$\begin{cases}x=x(t),\\y=y(t),\quad t\in[\alpha,\beta].\\z=z(t),\end{cases}$$

这是空间曲线的参数方程，$\boldsymbol{f}$ 的导数 $(x'(t),y'(t),z'(t))^{\mathrm{T}}$ 就是曲线在 $(x(t),y(t),z(t))$ 点的切向量. 如果这条曲线是质点随时间 t 运动的轨迹，那么 $\boldsymbol{f}$ 的导数 $(x'(t),y'(t),z'(t))^{\mathrm{T}}$ 就是质点运动的速度.

例 12.1.15 求向量值函数

$$\boldsymbol{f}(x,y,z)=\begin{pmatrix}x^3+ze^y\\y^3+z\ln x\end{pmatrix}$$

在 $(1,1,1)$ 点的导数.

解 这时坐标分量函数为

$$f_1(x,y,z)=x^3+ze^y,\quad f_2(x,y,z)=y^3+z\ln x,$$

因此

$$\boldsymbol{f}'(1,1,1)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x}&\dfrac{\partial f_1}{\partial y}&\dfrac{\partial f_1}{\partial z}\\[2mm]\dfrac{\partial f_2}{\partial x}&\dfrac{\partial f_2}{\partial y}&\dfrac{\partial f_2}{\partial z}\end{pmatrix}_{(1,1,1)}$$
$$=\begin{pmatrix}3x^2&ze^y&e^y\\[1mm]\dfrac{z}{x}&3y^2&\ln x\end{pmatrix}_{(1,1,1)}=\begin{pmatrix}3&e&e\\1&3&0\end{pmatrix}.$$

2. 若 $\boldsymbol{f}$ 的每一个分量函数 $f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)(i=1,2,\cdots,m)$ 的偏导数都在 $\boldsymbol{x}^0$ 点连续，就称向量值函数 $\boldsymbol{f}$ 的导数在 $\boldsymbol{x}^0$ 点连续.

3. 若存在只与 $\boldsymbol{x}^0$ 有关，而与 $\Delta\boldsymbol{x}$ 无关的 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$，使得在 $\boldsymbol{x}^0$ 附近成立

$$\Delta\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0+\Delta\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0)=\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{x}+\boldsymbol{o}(\Delta\boldsymbol{x}),$$

(其中 $\Delta\boldsymbol{x}=(\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n)^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{o}(\Delta\boldsymbol{x})$ 是向量，其模是 $\|\Delta\boldsymbol{x}\|$ 的高阶无穷小量.) 则称向量值函数 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点可微，并称 $\boldsymbol{A}\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ (即 $\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{x}$) 为 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点的微分，记为 $\mathrm{d}\boldsymbol{y}$. 因此 $\mathrm{d}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\mathrm{d}\boldsymbol{x}$.

如果向量值函数 $\boldsymbol{f}$ 在 D 上每一点可微，则称 $\boldsymbol{f}$ 在 D 上可微.

定理 12.1.4 向量值函数 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}^0$ 处可微的充分必要条件是它的坐标分量函数 $f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)(i=1,2,\cdots,m)$ 都在 $\boldsymbol{x}^0$ 点可微. 此时成立微分公式

$$\mathrm{d}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}^0)\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

证 必要性. 设 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点可微，记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix},$$

和

$$\boldsymbol{o}(\Delta\boldsymbol{x})=((o(\Delta\boldsymbol{x}))_1,(o(\Delta\boldsymbol{x}))_2,\cdots,(o(\Delta\boldsymbol{x}))_n)^{\mathrm{T}},$$

则可将 $\Delta\boldsymbol{y}$ 写成分量形式

$$\Delta f_i=\Delta y_i=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\Delta x_k+(o(\Delta\boldsymbol{x}))_i,\quad i=1,2,\cdots,m,$$

并满足

$$\lim_{\|\Delta\boldsymbol{x}\|\to 0}\frac{(o(\Delta\boldsymbol{x}))_i}{\|\Delta\boldsymbol{x}\|}=0,\quad i=1,2,\cdots,m.$$

由函数微分的定义，即知 $f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)(i=1,2,\cdots,m)$ 在 $\boldsymbol{x}^0$ 处可微，并且 $a_{ij}=\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$，也就是

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}^0).$$

充分性. 设 $f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)(i=1,2,\cdots,m)$ 在 $\boldsymbol{x}^0$ 处可微. 那么由定义得

$$\Delta y_i=\Delta f_i=\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}^0)\Delta x_1+\frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}^0)\Delta x_2+\cdots+\frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}^0)\Delta x_n$$
$$+o(\|\Delta\boldsymbol{x}\|),\quad i=1,2,\cdots,m.$$

将上式写成矩阵乘积形式，并令 $\mathbf{A} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}^0)\right)_{m\times n}$，就知道 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点可微.

证毕

这样，综合上述三点并结合第十一章，我们可以统一表述：

向量值函数 $\boldsymbol{f}$ 连续、可导和可微就是它的每一个坐标分量函数 $f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)(i = 1,2,\cdots,m)$ 连续、可导和可微.

此外，在用Jacobi矩阵定义了向量值函数的导数 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}^0)$ 之后，多元函数和向量值函数情况下的微分公式与一元函数时的形式

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$$

完全一致. 也就是说，只要将 x, y 和 f 理解为向量，这就是多元函数和向量值函数的微分公式.

习 题

1. 求下列函数的偏导数：

(1) $z = x^5 - 6x^4y^2 + y^6$;　　(2) $z = x^2\ln(x^2 + y^2)$;

(3) $z = xy + \frac{x}{y}$;　　(4) $z = \sin(xy) + \cos^2(xy)$;

(5) $z = \mathrm{e}^x(\cos y + x\sin y)$;　　(6) $z = \tan\left(\frac{x^2}{y}\right)$;

(7) $z = \sin\frac{x}{y}\cdot\cos\frac{y}{x}$;　　(8) $z = (1 + xy)^y$;

(9) $z = \ln(x + \ln y)$;　　(10) $z = \arctan\frac{x + y}{1 - xy}$;

(11) $u = \mathrm{e}^{x(x^2+y^2+z^2)}$;　　(12) $u = x^{\frac{y}{z}}$;

(13) $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$;　　(14) $u = x^{y^z}$;

(15) $u = \sum_{i=1}^{n} a_ix_i$，$a_i$ 为常数；　　(16) $u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j$，$a_{ij} = a_{ji}$.

2. 设 $f(x,y) = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$，求 $f_x(3,4)$ 及 $f_y(3,4)$.

3. 设 $z = \mathrm{e}^{\frac{x}{y^2}}$，验证 $2x\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

4. 曲线 $\begin{cases} z = \frac{x^2 + y^2}{4} \\ y = 4 \end{cases}$ 在点(2,4,5)处的切线与 x 轴的正向所夹的角度是多少？

5. 求下列函数在指定点的全微分：

(1) $f(x,y)=3x^2y-xy^2$,在点$(1,2)$;

(2) $f(x,y)=\ln(1+x^2+y^2)$,在点$(2,4)$;

(3) $f(x,y)=\dfrac{\sin x}{y^2}$,在点$(0,1)$和$\left(\dfrac{\pi}{4},2\right)$.

6. 求下列函数的全微分:

(1) $z=y^x$;　　(2) $z=xye^{xy}$;

(3) $z=\dfrac{x+y}{x-y}$;　　(4) $z=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

(5) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$;　　(6) $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$.

7. 求函数 $z=xe^{2y}$ 在点$P(1,0)$处的沿从点$P(1,0)$到点$Q(2,-1)$方向的方向导数.

8. 设 $z=x^2-xy+y^2$,求它在点$(1,1)$处的沿方向 $v=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 的方向导数,并指出:

(1) 沿哪个方向的方向导数最大?

(2) 沿哪个方向的方向导数最小?

(3) 沿哪个方向的方向导数为零?

9. 如果函数 $f(x,y)$ 在点$(1,2)$处的从点$(1,2)$到点$(2,2)$方向的方向导数为2,从点$(1,2)$到点$(1,1)$方向的方向导数为-2.求

(1) 这个函数在点$(1,2)$处的梯度;

(2) 点$(1,2)$处的从点$(1,2)$到点$(4,6)$方向的方向导数.

10. 求下列函数的梯度:

(1) $z=x^2+y^2\sin(xy)$;　　(2) $z=1-\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)$;

(3) $u=x^2+2y^2+3z^2+3xy+4yz+6x-2y-5z$,在点$(1,1,1)$.

11. 验证函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在原点$(0,0)$连续且可偏导,但它在该点不可微.

12. 验证函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

的偏导函数 $f_x(x,y)$,$f_y(x,y)$ 在原点$(0,0)$不连续,但它在该点可微.

13. 证明函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在原点(0,0)处沿各个方向的方向导数都存在,但它在该点不连续,因而不可微.

14. 计算下列函数的高阶导数:

(1) $z=\arctan\dfrac{y}{x}$,求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;

(2) $z=x\sin(x+y)+y\cos(x+y)$,求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;

(3) $z=xe^{xy}$,求$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y},\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$;

(4) $u=\ln(ax+by+cz)$,求$\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4},\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}$;

(5) $z=(x-a)^p(y-b)^q$,求$\dfrac{\partial^{p+q}z}{\partial x^p\partial y^q}$;

(6) $u=xyze^{x+y+z}$,求$\dfrac{\partial^{p+q+r}u}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}$.

15. 计算下列函数的高阶微分:

(1) $z=x\ln(xy)$,求 d^2z;

(2) $z=\sin^2(ax+by)$,求 d^3z;

(3) $u=e^{x+y+z}(x^2+y^2+z^2)$,求 d^4z;

(4) $z=e^x\sin y$,求 d^kz.

16. 验证:

(1) $y=e^{-kn^2t}\sin(nx)$ 满足热传导方程$\dfrac{\partial z}{\partial x}=k\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;

(2) $u=z\arctan\dfrac{x}{y}$ 满足 Laplace 方程$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$.

17. 设$f(r,t)=t^\alpha e^{-\frac{r^2}{4t}}$,确定 α 使得f满足方程

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right).$$

18. 求下列向量值函数在指定点的导数:

(1) $\boldsymbol{f}(x)=(a\cos x,b\sin x,cx)$,在 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 点;

(2) $\boldsymbol{f}(x,y,z)=(3x+e^y\cot z,x^3+y^3\tan z)$,在$(1,2,\dfrac{\pi}{4})$点;

(3) $\boldsymbol{g}(u,v)=(u\cos v,u\sin v,v)$,在$(1,\pi)$点.

19. 设 $\boldsymbol{f}:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ 为向量值函数.

(1) 如果坐标分量函数 $f_1(x,y,z)=x, f_2(x,y,z)=y,$ $f_3(x,y,z)=z$,证明 $\boldsymbol{f}$ 的导数是单位阵;

(2) 写出坐标分量函数的一般形式,使 $\boldsymbol{f}$ 的导数是单位阵;

(3) 如果已知 $\boldsymbol{f}$ 的导数是对角阵 $\mathrm{diag}(p(x),q(y),r(z))$,那么坐标分量函数应该具有什么样的形式?

§2 多元复合函数的求导法则

链式规则

设 $z=f(x,y),(x,y)\in D_f$ 是区域 $D_f\subset\mathbf{R}^2$ 上的二元函数,而

$$\boldsymbol{g}:D_g\to\mathbf{R}^2,$$
$$(u,v)\mapsto(x(u,v),y(u,v))$$

是区域 $D_g\subset\mathbf{R}^2$ 上的二元二维向量值函数.如果 $\boldsymbol{g}$ 的值域 $\mathfrak{R}_g\subset D_f$,那么可以构造复合函数

$$z=f\circ\boldsymbol{g}=f[x(u,v),y(u,v)],\quad (u,v)\in D_g.$$

复合函数有如下求偏导数的法则.

定理 12.2.1(链式规则) 设 $\boldsymbol{g}$ 在 $(u_0,v_0)\in D_g$ 点可导,即 $x=x(u,v),y=y(u,v)$ 在 (u_0,v_0) 点可偏导.记 $x_0=x(u_0,v_0),y_0=(u_0,v_0)$,如果 f 在 (x_0,y_0) 点可微,那么

$$\frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0)=\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)+\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0),$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0)=\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)+\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0).$$

证 只证明第一式.由于在点可微,因此

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$
$$=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y+o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right).$$

设

$$\Delta x=x(u_0+\Delta u,v_0)-x(u_0,v_0),\quad \Delta y=y(u_0+\Delta u,v_0)-y(u_0,v_0),$$

由于 $x=x(u,v),y=y(u,v)$ 在 (u_0,v_0) 点可偏导,所以成立

$$\lim_{\Delta u\to0}\frac{\Delta x}{\Delta u}=\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0),\lim_{\Delta u\to0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=\frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0),$$

并且有 $\lim\limits_{\Delta u\to0}\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=0$.于是当 $\Delta u\to0$ 时,

$$\frac{o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)}{\Delta u}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \cdot \dfrac{|\Delta u|}{\Delta u} \cdot \sqrt{\left(\dfrac{\Delta x}{\Delta u}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta y}{\Delta u}\right)^2}, & 当\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \neq 0 \\ 0, & 当\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = 0 \end{cases}$$

$$= o(1),$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)$$

$$= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{f(x(u_0 + \Delta u, v_0), y(u_0 + \Delta u, v_0)) - f(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0))}{\Delta u}$$

$$= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta u}$$

$$= \lim_{\Delta u \to 0} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \frac{\Delta x}{\Delta u} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \frac{\Delta y}{\Delta u}\right] + \lim_{\Delta u \to 0} \frac{o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)}{\Delta u}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0).$$

证毕

注意,定理条件"f 可微"不能减弱为"f 可偏导".

例 12.2.1 从上节已经知道,

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^3}{x^2 + y^4}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

在$(0,0)$点可偏导,且 $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$,但它在$(0,0)$点不可微.

现在设 x, y 分别是自变量 t 的函数

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t, \end{cases}$$

直接代入就知这个复合函数实质上是 $z = t$,因此它在 $t = 0$ 点的导数为

$$\frac{dz}{dt}(0) = 1.$$

但若贸然套用链式规则,就会得到

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt}(0) &= [f_x(t^2, t) \cdot 2t + f_y(t^2, t) \cdot 1]\big|_{t=0} \\ &= [f_x(0,0) \cdot 2 \cdot 0 + f_y(0,0) \cdot 1] = 0 \end{aligned}$$

的错误结果.

下面不加证明地把链式规则推至一般情况.

设

$$z = f(y_1, y_2, \cdots, y_m), \quad (y_1, y_2, \cdots, y_m) \in D_f$$

为区域 $D_f \subset \mathbf{R}^m$ 上的 m 元函数.又设

$$\boldsymbol{g}: D_g \to \mathbf{R}^m$$
$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto (y_1, y_2, \cdots, y_m)$$

为区域 $D_g \subset \mathbf{R}^n$ 上的 n 元 m 维向量值函数.如果 $\boldsymbol{g}$ 的值域 $\Re_g \subset D_f$,那么可以构造复合函数

$$\begin{aligned} z &= f \circ \boldsymbol{g} \\ &= f[y_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), y_2(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots, y_m(x_1, x_2, \cdots, x_n)], \\ &\quad (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D_g. \end{aligned}$$

定理 12.2.2(链式规则)　设 $\boldsymbol{g}$ 在 $\boldsymbol{x}^0 \in D_g$ 点可导,即 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 在 $\boldsymbol{x}^0$ 点可偏导,且 f 在 $\boldsymbol{y}^0 = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^0)$ 点可微,则

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}^0) &= \frac{\partial z}{\partial y_1}(\boldsymbol{y}^0)\frac{\partial y_1}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}^0) + \frac{\partial z}{\partial y_2}(\boldsymbol{y}^0)\frac{\partial y_2}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}^0) + \cdots \\ &\quad + \frac{\partial z}{\partial y_m}(\boldsymbol{y}^0)\frac{\partial y_m}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}^0), i = 1, 2, \cdots, n. \end{aligned}$$

上式可以用矩阵表示为

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right)_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^0} \\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial y_1}, \frac{\partial z}{\partial y_2}, \cdots, \frac{\partial z}{\partial y_m}\right)_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^0} \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^0} \end{aligned}$$

或用向量值函数的导数记号表为

$$(f \circ \boldsymbol{g})'(\boldsymbol{x}_0) = f'(\boldsymbol{y}_0)\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}_0).$$

例12.2.2　设 $z = \arctan(xy), y = \mathrm{e}^x$,求 $\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

解　由链式规则

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{1 + x^2y^2} + \frac{x}{1 + x^2y^2} \cdot \mathrm{e}^x = \frac{\mathrm{e}^x(1 + x)}{1 + x^2\mathrm{e}^{2x}}.$$

于是

$$\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = 1.$$

例12.2.3　设 $z = \frac{x^2}{y}$,而 $x = u - 2v, y = 2u + v$,计算 $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$.

解

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{2x}{y}\cdot 1+\left(-\frac{x^2}{y^2}\right)\cdot 2\\ &= \frac{2(u-2v)}{2u+v}-\frac{2(u-2v)^2}{(2u+v)^2} = \frac{2(u-2v)(u+3v)}{(2u+v)^2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{2x}{y}\cdot(-2)+\left(-\frac{x^2}{y^2}\right)\cdot 1\\ &= -\frac{4(u-2v)}{2u+v}-\frac{(u-2v)^2}{(2u+v)^2} = \frac{(2v-u)(9u+2v)}{(2u+v)^2}.\end{aligned}$$

例12.2.4 设 $z=(2x+y)^{x+2y}$,计算$\frac{\partial z}{\partial x}$,$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 设 $u=2x+y, v=x+2y$,则 $z=u^v$.于是

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = vu^{v-1}\cdot 2+u^v\ln u\cdot 1\\ &= 2(x+2y)(2x+y)^{x+2y-1}+(2x+y)^{x+2y}\ln(2x+y)\\ &= (2x+y)^{x+2y}\left(\frac{2(x+2y)}{2x+y}+\ln(2x+y)\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = vu^{v-1}\cdot 1+u^v\ln u\cdot 2\\ &= (x+2y)(2x+y)^{x+2y-1}+2(2x+y)^{x+2y}\ln(2x+y)\\ &= (2x+y)^{x+2y}\left(\frac{x+2y}{2x+y}+2\ln(2x+y)\right).\end{aligned}$$

例12.2.5 设 $w=f(x^2+y^2+z^2,xyz)$,f 具有二阶连续偏导数,计算 $\frac{\partial w}{\partial x}$,$\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial x}$.

解 将 $w=f(x^2+y^2+z^2,xyz)$ 看成复合函数

$$w=f(u,v),\quad \begin{cases}u=x^2+y^2+z^2,\\ v=xyz.\end{cases}$$

显然

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=yz.$$

因此由链式规则得

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=2x\frac{\partial w}{\partial u}+yz\frac{\partial w}{\partial v}.$$

注意到$\frac{\partial w}{\partial u}$和$\frac{\partial w}{\partial v}$仍是复合函数,于是由

$$\frac{\partial u}{\partial z}=2z,\quad \frac{\partial v}{\partial z}=xy,$$

再反复运用链式规则就得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial x} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(2x\frac{\partial w}{\partial u} + yz\frac{\partial w}{\partial v}\right)\\ &= 2x\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right) + y\frac{\partial w}{\partial v} + yz\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)\\ &= 2x\left(2z\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + xy\frac{\partial^2 w}{\partial v\partial u}\right) + y\frac{\partial w}{\partial v} + yz\left(2z\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v} + xy\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right)\\ &= 4xz\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2y(x^2+z^2)\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v} + xy^2 z\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + y\frac{\partial w}{\partial v}.\end{aligned}$$

若用函数符号加下标 i 表示对其第 i 个变量的偏导数($i = 1,2$),即

$$f_1 = \frac{\partial f(u,v)}{\partial u},\quad f_2 = \frac{\partial f(u,v)}{\partial v},\quad f_{12} = \frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial u\partial v},$$

如此等等,则上面的结果可表示为

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2xf_1 + yzf_2, \frac{\partial^2 w}{\partial z\partial x} = 4xzf_{11} + 2y(x^2+z^2)f_{12} + xy^2 zf_{22} + yf_2.$$

例12.2.6　已知 $u = u(x,y)$ 为可微函数,试求 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ 在极坐标下的表达式.

解　直角坐标与极坐标有如下关系:

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta.$$

将 x,y 看成中间变量,就得到

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta.$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y}.$$

将第一式乘 r 后的平方加上第二式的平方,即有

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2.$$

现在设

$$f: D_f \to \mathbf{R}^2,$$
$$(u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v))$$

是区域 $D_f \subset \mathbf{R}^2$ 上的二元二维向量值函数.又设

$$\boldsymbol{g}: D_g \to \mathbf{R}^2,$$
$$(s,t) \mapsto (u(s,t), v(s,t))$$

是区域 $D_f \subset \mathbf{R}^2$ 上的二元二维向量值函数.如果 $\boldsymbol{g}$ 的值域 $\Re_g \subset D_f$,可以构造复合向量值函数 $\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}$.具体写出来就是

$$\begin{cases} x = x[u(s,t), v(s,t)], \\ y = y[u(s,t), v(s,t)], \end{cases} \quad (s,t) \in D_g.$$

如果 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{g}$ 分别在 D_f 与 D_g 上具有连续导数，那么由定理 12.2.1 知道

$$\frac{\partial x}{\partial s}(s,t) = \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\frac{\partial u}{\partial s}(s,t) + \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\frac{\partial v}{\partial s}(s,t),$$

$$\frac{\partial x}{\partial t}(s,t) = \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\frac{\partial u}{\partial t}(s,t) + \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\frac{\partial v}{\partial t}(s,t),$$

$$\frac{\partial y}{\partial s}(s,t) = \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\frac{\partial u}{\partial s}(s,t) + \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\frac{\partial v}{\partial s}(s,t),$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(s,t) = \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\frac{\partial u}{\partial t}(s,t) + \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\frac{\partial v}{\partial t}(s,t).$$

写成矩阵形式就是

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s}(s,t) & \dfrac{\partial x}{\partial t}(s,t) \\ \dfrac{\partial y}{\partial s}(s,t) & \dfrac{\partial y}{\partial t}(s,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial s}(s,t) & \dfrac{\partial u}{\partial t}(s,t) \\ \dfrac{\partial v}{\partial s}(s,t) & \dfrac{\partial v}{\partial t}(s,t) \end{pmatrix},$$

即

$$(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})'(s,t) = \boldsymbol{f}'(u,v)\boldsymbol{g}'(s,t).$$

事实上，可以有如下的一般结果.

定理 12.2.3　*设 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{g}$ 分别是 $D_f(\subset \mathbf{R}^k) \to \mathbf{R}^m$ 与 $D_g(\subset \mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}^k$ 上的多元向量值函数，且分别在区域 D_f 与 D_g 上具有连续导数. 如果 $\mathfrak{R}_g \subset D_f$，并记 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$，那么复合向量值函数 $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$ 在 D_g 上也具有连续的导数，并且等式*

$$(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}'[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})] \cdot \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})$$

成立. 这里的 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{u})$、$\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})$ 和 $(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})'(\boldsymbol{x})$ 是相应的 Jacobi 矩阵.

证明留给读者.

例 12.2.7　设向量值函数

$$\boldsymbol{f}: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$$

的坐标分量函数为

$$\begin{cases} x = \cos u \sin v, \\ y = \sin u \cos v. \end{cases}$$

向量值函数

$$\boldsymbol{g}: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$$

的坐标分量函数为

$$\begin{cases} u = s + t, \\ v = s - t. \end{cases}$$

于是,复合函数 $f\circ g$ 的坐标分量函数为

$$\begin{cases} x = \cos(s+t)\sin(s-t), \\ y = \sin(s+t)\cos(s-t). \end{cases}$$

它们的偏导数可以用如下方式算出来:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial s} & \dfrac{\partial u}{\partial t} \\ \dfrac{\partial v}{\partial s} & \dfrac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\sin u\sin v & \cos u\cos v \\ \cos u\cos v & -\sin u\sin v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\sin u\sin v + \cos u\cos v & -\sin u\sin v - \cos u\cos v \\ \cos u\cos v - \sin u\sin v & \cos u\cos v + \sin u\sin v \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\cos(u+v) & -\cos(u-v) \\ \cos(u+v) & \cos(u-v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos 2s & -\cos 2t \\ \cos 2s & \cos 2t \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

一阶全微分的形式不变性

本段中总假设讨论的函数满足相应的可微条件.

设 $z = f(x,y)$ 为二元函数,那么当 x,y 为自变量时,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

而当 x,y 为中间变量时,如

$$x = x(u,v), \qquad y = y(u,v),$$

这时 $dx = x_u du + x_v dv$, $dy = y_u du + y_v dv$,那么由链式规则得

$$\begin{aligned}
dz &= \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv \\
&= (z_x x_u + z_y y_u)du + (z_x x_v + z_y y_v)dv \\
&= z_x(x_u du + x_v dv) + z_y(y_u du + y_v dv) \\
&= \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.
\end{aligned}$$

这说明了无论 x,y 是自变量,还是中间变量,一阶全微分具有相同的形式,这就是**一阶全微分的形式不变性**.

对于多元函数 $z = f(\boldsymbol{y})$,其中 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_m)^{\mathrm{T}}$. 当 $\boldsymbol{y}$ 为自变量时,一阶全微分形式为

$$dz = f'(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}.$$

而当 $\boldsymbol{y}$ 为中间变量 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$($\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$)时,$d\boldsymbol{y} = \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$. 由定理 12.2.2,得

$$dz = (f\circ \boldsymbol{g})'(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = f'(\boldsymbol{y})\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = f'(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}) = f'(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{y}.$$

这说明一阶全微分的形式不变性是普遍成立的.

要注意的是,全微分的形式不变性在高阶微分时是不成立的.例如函数 $z = f(x,y)$,当 x,y 为自变量时,

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2,$$

而当 x,y 为中间变量时

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial z}{\partial x}d^2x + \frac{\partial z}{\partial y}d^2y.$$

与一维情况相同,当 x,y 为自变量时,$d^2x = d^2y = 0$;而当 x,y 为中间变量时,d^2x 与 d^2y 一般不为零,请读者自行举例说明.

例 12.2.8　设 $z = \sqrt[3]{\frac{x+y}{x-y}}$,求全微分 dz.

解　在 $z = \sqrt[3]{\frac{x+y}{x-y}}$ 的两边取对数,

$$\ln z = \frac{1}{3}[\ln(x+y) - \ln(x-y)].$$

两边求全微分,利用一阶全微分的形式不变性,得到

$$\frac{dz}{z} = \frac{1}{3}\left[\frac{dx+dy}{x+y} - \frac{dx-dy}{x-y}\right],$$

即

$$dz = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{x+y}{x-y}}\frac{xdy - ydx}{x^2-y^2}.$$

我们还顺便得到了

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{x+y}{x-y}}\frac{y}{x^2-y^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{x+y}{x-y}}\frac{x}{x^2-y^2},$$

这是求偏导数的方法之一.

例 12.2.9　设 $z = \ln(x+y)$,求 d^kz.

解　设 $u = x+y$,则

$$du = dx + dy,\quad d^2u = 0,$$

因此

$$d^ku = 0,\quad k \geqslant 2.$$

于是

$$dz = \frac{du}{u} = \frac{dx+dy}{x+y}.$$

$$d^2z = d\left(\frac{du}{u}\right) = d\left(\frac{1}{u}\right)du + \frac{1}{u}d^2u = -\frac{du^2}{u^2} = -\frac{(dx+dy)^2}{(x+y)^2}.$$

$$d^3z = d\left(-\frac{du^2}{u^2}\right) = d\left(-\frac{1}{u^2}\right)du^2 - \frac{1}{u^2}d(du^2)$$
$$= \frac{2!du^3}{u^3} = \frac{2!(dx+dy)^3}{(x+y)^3}.$$

这样用归纳法可得

$$d^kz = (-1)^{k+1}\frac{(k-1)!(dx+dy)^k}{(x+y)^k},\quad k = 1,2,\cdots.$$

习　　题

1. 利用链式规则求偏导数：

(1) $z = \tan(3t+2x^2-y^2)$, $x = \frac{1}{t}$, $y = \sqrt{t}$，求$\frac{dz}{dt}$；

(2) $z = e^{x-2y}$, $x = \sin t$, $y = t^3$，求$\frac{d^2z}{dt^2}$；

(3) $w = \frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$, $y = a\sin x$, $z = \cos x$，求$\frac{dw}{dx}$；

(4) $z = u^2\ln v$, $u = \frac{x}{y}$, $v = 3x-2y$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$；

(5) $u = e^{x^2+y^2+z^2}$, $z = y^2\sin x$，求$\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$；

(6) $w = (x+y+z)\sin(x^2+y^2+z^2)$, $x = te^s$, $y = e^t$, $z = e^{s+t}$，求$\frac{\partial w}{\partial s}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$；

(7) $z = x^2+y^2+\cos(x+y)$, $x = u+v$, $y = \arcsin v$，求$\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}$；

以下假设 f 具有二阶连续偏导数.

(8) $u = f\left(xy,\frac{x}{y}\right)$，求$\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$；

(9) $u = f(x^2+y^2+z^2)$，求$\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$；

(10) $w = f(x,y,z)$, $x = u+v$, $y = u-v$, $z = uv$，求$\frac{\partial w}{\partial u}$, $\frac{\partial w}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}$.

2. 设 $z = \arctan\frac{x}{y}$, $x = u+v$, $y = u-v$，验证

$$\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u-v}{u^2+v^2}.$$

3. 设 φ 和 Ψ 具有二阶连续导数,验证

(1) $u = y\varphi(x^2 - y^2)$ 满足 $y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{y}u$;

(2) $u = \varphi(x - at) + \Psi(x + at)$ 满足波动方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

4. 设 $z = f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数,写出 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 在坐标变换

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2, \\ v = 2xy \end{cases}$$

下的表达式.

5. 如果函数 $f(x,y)$ 满足

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y), \quad t > 0,$$

那么 f 称为 n 次齐次函数.

(1) 证明 n 次齐次函数 f 满足方程

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf;$$

(2) 利用上述性质,对于 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 求出 $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$.

6. 设向量值函数 $\boldsymbol{f}:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ 的坐标分量函数为

$$\begin{cases} x = u^2 + v^2, \\ y = u^2 - v^2, \\ z = uv. \end{cases}$$

向量值函数 $\boldsymbol{g}:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ 的坐标分量函数为

$$\begin{cases} u = r\cos\theta, \\ v = r\sin\theta. \end{cases}$$

求复合函数 $\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}$ 的导数.

7. 设 $w = f(x,u,v), u = g(y,z), v = h(x,y)$,求 $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}$.

8. 求下列函数的全微分:

(1) $u = f(ax^2 + by^2 + cz^2)$;

(2) $u = f(x + y, xy)$;

(3) $u = f(\ln(1 + x^2 + y^2 + z^2), e^{x+y+z})$.

9. 设 $f(t)$ 具有任意阶连续导数,而 $u = f(ax + by + cz)$. 对任意正整数 k,求 $d^k u$.

§3 Taylor公式

我们已经学过关于一元函数的Taylor公式,并且知道它有很多应用. 事实

上，关于多元函数也同样有Taylor公式，它也有着许多重要的应用. 例如，在函数估计和近似计算等方面的应用. Taylor 公式的基本想法就是在某点附近，利用一个函数的各阶导数在该点的值构造多项式来逼近这个函数. 我们现在先给出二元函数的 Taylor 公式.

定理 12.3.1(Taylor 公式) 设 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的邻域 $U = O((x_0,y_0),r)$ 上具有 $k+1$ 阶连续偏导数，那么对于 U 内每一点 $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ 都成立

$$\begin{aligned} &f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\\ =\ & f(x_0,y_0) + \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)\\ &+ \frac{1}{2!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0) + \cdots\\ &+ \frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x_0,y_0) + R_k, \end{aligned}$$

其中 $R_k = \dfrac{1}{(k+1)!}\left(\Delta x\dfrac{\partial}{\partial x} + \Delta y\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^{k+1} f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)(0<\theta<1)$ 称为 **Lagrange 余项**.

证 对于给定点 $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\in U$，构造辅助函数

$$\phi(t) = f(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y),$$

则由定理条件可知，一元函数 $\phi(t)$ 在 $|t|\leqslant 1$ 上具有 $k+1$ 阶连续导数，因此在 $t=0$ 处成立 Taylor 公式

$$\begin{aligned} \phi(t) = &\ \phi(0) + \phi'(0)t + \frac{1}{2!}\phi''(0)t^2 + \cdots\\ &+ \frac{1}{k!}\phi^{(k)}(0)t^k + \frac{1}{(k+1)!}\phi^{(k+1)}(\theta t)t^{k+1}, 0<\theta<1. \end{aligned}$$

特别当 $t=1$ 时，有

$$\begin{aligned} \phi(1) = &\ \phi(0) + \phi'(0) + \frac{1}{2!}\phi''(0) + \cdots\\ &+ \frac{1}{k!}\phi^{(k)}(0) + \frac{1}{(k+1)!}\phi^{(k+1)}(\theta), 0<\theta<1. \end{aligned}$$

应用复合函数的链式规则易算出

$$\phi'(t) = \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y),$$

$$\phi''(t) = \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y),$$

……

$$\phi^{(k)}(t) = \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y),$$

代入 $\phi(1)$ 即得定理结论.

证毕

我们先给出 Taylor 公式的一些简单应用.

当 $k = 0$ 时,我们就得到在 U 上成立微分中值公式

$$\begin{aligned} &f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= f_x(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta x + f_y(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta y, \quad 0 < \theta < 1. \end{aligned}$$

这个结果的直接推论就是

推论 12.3.1 如果函数 $f(x,y)$ 在开区域 $D \subset \mathbf{R}^2$ 上的偏导数恒为零,那么它在 D 上必是常值函数.

请读者作为练习自行证明.

例 12.3.1 近似计算$(1.08)^{3.96}$.

我们考虑函数 $f(x,y) = x^y$ 在$(1,4)$ 点的 Taylor 公式.由于

$$\begin{aligned} &f(1,4) = 1, \\ &f_x(x,y) = yx^{y-1}, \quad f_x(1,4) = 4, \\ &f_y(x,y) = x^y \ln x, \quad f_y(1,4) = 0, \\ &f_{xx}(x,y) = y(y-1)x^{y-2}, \quad f_{xx}(1,4) = 12, \\ &f_{yy}(x,y) = x^y(\ln x)^2, \quad f_{yy}(1,4) = 0, \\ &f_{xy}(x,y) = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x, \quad f_{xy}(1,4) = 1. \end{aligned}$$

因此应用定理 12.3.1 就得(展开到二阶为止)

$$\begin{aligned} x^y = &1 + 4(x-1) + 6(x-1)^2 + (x-1)(y-1) \\ &+ o((x-1)^2 + (y-1)^2). \end{aligned}$$

取 $x = 1.08, y = 3.96$,那么略去余项就得

$$(1.08)^{3.96} \approx 1 + 4 \times 0.08 + 6 \times 0.08^2 - 0.08 \times 0.04 = 1.355\,2.$$

它与精确值 1.356 307 21… 的误差已小于千分之二.

例 12.3.2 在计算机上求$\frac{\partial f}{\partial x}$在点$(x,y)$的值,通常选取一个很小的 h,然后用中心差商

$$\frac{f\left(x + \frac{h}{2}, y\right) - f\left(x - \frac{h}{2}, y\right)}{h}$$

近似代替$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$.对$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$ 作同样处理,即有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \approx \frac{1}{h}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\left(x + \frac{h}{2}, y\right) - \frac{\partial f}{\partial x}\left(x - \frac{h}{2}, y\right)\right]$$

$$\approx \frac{\dfrac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}-\dfrac{f(x,y)-f(x-h,y)}{h}}{h}$$

$$=\frac{f(x+h,y)-2f(x,y)+f(x-h,y)}{h^2}.$$

在 y 方向也采用这个方法,记

$$\Delta_h f(x,y)$$

$$=\frac{f(x+h,y)+f(x,y+h)+f(x-h,y)+f(x,y-h)-4f(x,y)}{h^2}.$$

就可以通过计算 $\Delta_h f(x,y)$ 来求得 $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(x,y)$ 的近似值.

这是一个重要的近似计算公式,由于在计算 (x,y) 处的二阶偏导数时用到了 $f(x,y)$ 在 (x,y) 及它的上、下、左、右共五个点的函数值(见图 12.3.1),因此称 $\Delta_h f(x,y)$ 为**五点差分格式**.

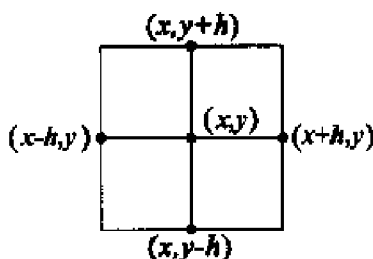


图 12.3.1

现假设 $f(x,y)$ 具有四阶连续偏导数,则显然有

$$f_{xxxx}(x+\theta h,y)=f_{xxxx}(x,y)+o(1),$$

利用 Taylor 公式,就得到

$$\begin{aligned}f(x\pm h,y)&=f(x,y)\pm hf_x(x,y)+\frac{h^2}{2}f_{xx}(x,y)\\&\quad\pm\frac{h^3}{6}f_{xxx}(x,y)+\frac{h^4}{24}f_{xxxx}(x+\theta h,y)\\&=f(x,y)\pm hf_x(x,y)+\frac{h^2}{2}f_{xx}(x,y)\\&\quad\pm\frac{h^3}{6}f_{xxx}(x,y)+\frac{h^4}{24}f_{xxxx}(x,y)+o(h^4).\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}f(x,y\pm h)&=f(x,y)\pm hf_y(x,y)+\frac{h^2}{2}f_{yy}(x,y)\\&\quad\pm\frac{h^3}{6}f_{yyy}(x,y)+\frac{h^4}{24}f_{yyyy}(x,y)+o(h^4).\end{aligned}$$

结合这两式,就得到五点差分格式的**截断误差**(用近似公式代替精确关系所产生的误差)为

$$\Delta_h f(x,y)-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(x,y)=\frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)f(x,y)+o(h^2)$$
$$=O(h^2).$$

下面不加证明地写出一般元函数的 Taylor 公式.

定理 12.3.3 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在点 $(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$ 附近具有 $k+1$ 阶的连续偏导数,那么这点附近成立如下的 Taylor 公式:

$$\begin{aligned}&f(x_1^0+\Delta x_1,x_2^0+\Delta x_2,\cdots,x_n^0+\Delta x_n)\\=&f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)+\left(\sum_{i=1}^n\Delta x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)\\&+\frac{1}{2!}\left(\sum_{i=1}^n\Delta x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)+\\&\cdots+\frac{1}{k!}\left(\sum_{i=1}^n\Delta x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)+R_k,\end{aligned}$$

其中 Lagrange 余项

$$R_k=\frac{1}{(k+1)!}\left(\sum_{i=1}^n\Delta x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{k+1}f(x_1^0+\theta\Delta x_1,x_2^0+\theta\Delta x_2,\cdots,x_n^0+\theta\Delta x_n),$$
$$0<\theta<1.$$

这个公式还可以用向量记号简记为

$$f(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x})=\sum_{j=0}^k\frac{1}{j!}\left((\Delta\boldsymbol{x})\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{1\times n}\right)^j f(x_0)$$
$$+\frac{1}{(k+1)!}\left((\Delta\boldsymbol{x})\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{1\times n}\right)^{k+1}f(\boldsymbol{x}_0+\theta\Delta\boldsymbol{x}),\quad 0<\theta<1.$$

习 题

1. 写出函数 $f(x,y)=3x^3+y^3-2x^2y-2xy^2-6x-8y+9$ 在点 $(1,2)$ 的 Taylor 展开式.
2. 将函数 $f(x,y)=\sin x\ln(1+y)$ 在 $(0,0)$ 点 Taylor 展开,展开到三阶导数为止.
3. 求函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^{x+y}$ 在 $(0,0)$ 点的 n 阶 Taylor 展开式,并写出余项.
4. 设 $f(x,y)=\dfrac{\cos y}{x}$, $x>0$.

   1) 将 $f(x,y)$ 在 $(1,0)$ 点展开到一阶导数,并计算余项 R_1.

2) 将 $f(x,y)$ 在 $(1,0)$ 点展开到 k 阶导数，并证明在 $(1,0)$ 的某个邻域内，余项 R_k 满足当 $k\to\infty$ 时，$R_k\to 0$.

5. 对于函数 $f(x,y)=xy$，在第 I 象限(包括边界)的每一点，指出函数值增加最快的方向.

6. 利用 Taylor 公式近似计算 $8.96^{2.03}$(展开到二阶).

7. 设 n 元函数 f 在 $\mathbf{R}^n$ 上具有连续偏导数，证明对任意 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，成立下述 **Hadmard 公式**：

$$f(\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}\int_0^1(y_i-x_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}+t(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}))\mathrm{d}t.$$

§4 隐函数

前面讨论的函数大多是 $z=f(x,y)$ 形式，如马鞍面方程 $z=xy$，半圆锥面方程 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 等等. 这种因变量在等式左边，自变量在等式右边的函数表达形式通称显函数.

但在理论与实际问题中更多遇到的是函数关系无法用显式表达的情况. 如在一元函数中提过的反映行星运动的 Kepler 方程

$$F(x,y)=y-x-\varepsilon\sin y=0,\quad 0<\varepsilon<1,$$

这里 x 是时间，y 是行星与太阳的连线扫过的扇形的弧度，ε 是行星运动的椭圆轨道的离心率. 从天体力学上考虑，y 必定是 x 的函数，但要将函数关系用显式表达出来却无能为力.

这种自变量和因变量混合在一起的方程(组) $H(x,y)=0$，在一定条件下也表示 y 与 x 之间的函数关系，通称隐函数.

那么自然要问，这种函数方程(组)何时确实表示了一个隐函数(向量值隐函数)，又如何保证该隐函数具有连续和可微等分析性质？这些正是本节要讨论的问题.

单个方程的情形

先看一个简单例子. 在平面上的单位圆周方程

$$x^2+y^2=1$$

中，变量 x 与 y 的地位是平等的，那么在什么条件下可以将 x 看成自变量，y 看成 x 的函数呢？

读者不假思索就可以写出，在上半平面为 $y=\sqrt{1-x^2}$，面在下半平面为 $y=-\sqrt{1-x^2}$. 那么思考得更深入一步，如果考虑的区域既含上半平面的点，又含下半平面的点呢？

显然，对单位圆周上的 $(\pm 1,0)$ 点，无论将 δ 取得多么小，在它的 δ 邻域中

总会发生同一个 x 值对应两个不同 y 值的现象,按定义,这时 y 不是 x 的函数.而在单位圆周上的其他处,则不会发生这种情况(见图 12.4.1).

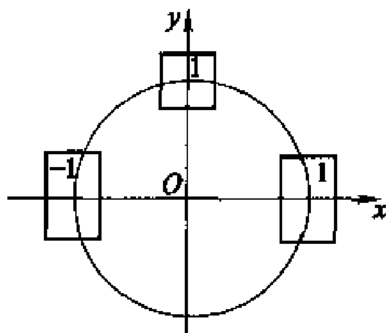


图 12.4.1

将单位圆周方程写为

$$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0,$$

易发现$(\pm 1,0)$是使得 $F_y(x,y) = 0$ 的仅有的两个点,这提示 $F_y(x,y) \neq 0$ 对于确定 y 是 x 的隐函数可能有着重要作用.

进一步,若方程 $F(x,y) = 0$ 确实决定了 y 是 x 的函数,假设 $y = y(x)$ 可导,则由 $F(x,y(x)) \equiv 0$ 及复合函数的链式规则,有

$$\frac{\mathrm{d}F(x,y(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

$$= F_x + F_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0,$$

这再次提示我们,条件"$F_y(x,y) \neq 0$"可能具有举足轻重的意义.

事实上,我们有下面的定理:

定理 12.4.1(一元隐函数存在定理) 若二元函数 $F(x,y)$ 满足条件:

(1) $F(x_0,y_0) = 0$;

(2) 在闭矩形 $D = \{(x,y) \mid |x - x_0| \leqslant a, |y - y_0| \leqslant b\}$ 上,$F(x,y)$ 连续,且具有连续偏导数 F_x, F_y;

(3) $F_y(x_0,y_0) \neq 0$,

那么

(i) 在点(x_0,y_0)附近可以从函数方程

$$F(x,y) = 0$$

唯一确定隐函数

$$y = f(x), \quad x \in O(x_0,\rho),$$

它满足 $F(x,f(x)) = 0$,以及 $y_0 = f(x_0)$;

(ii) 隐函数 $y = f(x)$ 在 $x \in O(x_0,\rho)$ 上连续;

(iii) 隐函数 $y = f(x)$ 在 $x \in O(x_0,\rho)$ 上具有连续的导数，且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}.$$

证 不失一般性，设 $F_y(x_0,y_0) > 0$.

先证明隐函数的存在性.

由连续函数 F_y 的保号性可知，必有 $0 < \alpha \leqslant a, 0 < \beta \leqslant b$，使得在闭矩形 $D^* = \{(x,y) \mid |x - x_0| \leqslant \alpha, |y - y_0| \leqslant \beta\}$ 上成立

$$F_y(x,y) > 0.$$

于是，对固定的 x_0，y 的函数 $F(x_0,y)$ 在 $[y_0 - \beta, y_0 + \beta]$ 是严格单调增加的.

又由于 $F(x_0,y_0) = 0$，从而

$$F(x_0,y_0 - \beta) < 0, \quad F(x_0,y_0 + \beta) > 0.$$

由 $F(x,y)$ 在 D^* 上的连续性得知，一定存在 $\rho > 0$，使得在线段

$$x_0 - \rho < x < x_0 + \rho, \quad y = y_0 + \beta$$

上 $F(x,y_0 + \beta) > 0$，而在线段

$$x_0 - \rho < x < x_0 + \rho, \quad y = y_0 - \beta$$

上 $F(x,y_0 - \beta) < 0$.

因此，对于 $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ 内的任一点 $\bar{x}$，将 $F(\bar{x},y)$ 看成 y 的函数，它在 $[y_0 - \beta, y_0 + \beta]$ 上是连续的，而由刚才的讨论知

$$F(\bar{x},y_0 - \beta) < 0, \quad F(\bar{x},y_0 + \beta) > 0,$$

根据零点存在定理，必有 $\bar{y} \in (y_0 - \beta, y_0 + \beta)$ 使得 $F(\bar{x},\bar{y}) = 0$. 又因为在 D^* 上 $F_y > 0$，因此这样的 $\bar{y}$ 是唯一的.

这样，就得到定义在 $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ 上的 y 与 x 的对应函数 $y = f(x)$，它满足 $F(x,f(x)) \equiv 0$，而且显然成立 $y_0 = f(x_0)$.

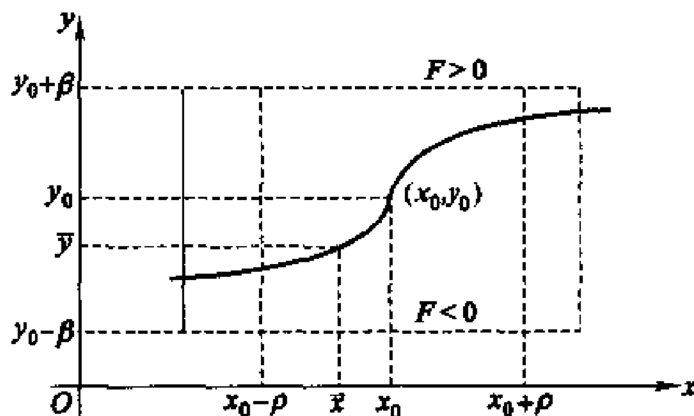


图 12.4.2

再证隐函数 $y=f(x)$ 在 $(x_0-\rho,x_0+\rho)$ 上的连续性.

设 $\bar{x}$ 为 $(x_0-\rho,x_0+\rho)$ 上的任一点.对于任意给定的 $\varepsilon>0$(ε 适当小),由于 $F(\bar{x},\bar{y})=0(\bar{y}=f(\bar{x}))$,由前面的讨论知

$$F(\bar{x},\bar{y}-\varepsilon)<0,\quad F(\bar{x},\bar{y}+\varepsilon)>0.$$

而由于 $F(x,y)$ 在 D^* 上的连续性,一定存在 $\delta>0$,使得当 $x\in O(\bar{x},\delta)$ 时,

$$F(x,\bar{y}-\varepsilon)<0,\quad F(x,\bar{y}+\varepsilon)>0.$$

通过类似前面的讨论即得到,当 $x\in O(\bar{x},\delta)$ 时,相应的隐函数值必满足 $f(x)\in(\bar{y}-\varepsilon,\bar{y}+\varepsilon)$,即

$$|f(x)-f(\bar{x})|<\varepsilon.$$

这就是说,$y=f(x)$ 在 $(x_0-\rho,x_0+\rho)$ 上连续.

最后证明 $y=f(x)$ 在 $(x_0-\rho,x_0+\rho)$ 上的可导性.

设 $\bar{x}$ 为 $(x_0-\rho,x_0+\rho)$ 上的任一点.取 Δx 充分小使得 $\bar{x}+\Delta x\in(x_0-\rho,x_0+\rho)$,记 $\bar{y}=f(\bar{x})$ 以及 $\bar{y}+\Delta y=f(\bar{x}+\Delta x)$,则显然成立 $F(\bar{x},\bar{y})=0$ 和 $F(\bar{x}+\Delta x,\bar{y}+\Delta y)=0$.

应用多元函数的微分中值公式得

$$\begin{aligned}0&=F(\bar{x}+\Delta x,\bar{y}+\Delta y)-F(\bar{x},\bar{y})\\&=F_x(\bar{x}+\theta\Delta x,\bar{y}+\theta\Delta y)\Delta x+F_y(\bar{x}+\theta\Delta x,\bar{y}+\theta\Delta y)\Delta y,\text{其中 }0<\theta<1.\end{aligned}$$

注意到在 D^* 上 $F_y\neq0$,因此

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{F_x(\bar{x}+\theta\Delta x,\bar{y}+\theta\Delta y)}{F_y(\bar{x}+\theta\Delta x,\bar{y}+\theta\Delta y)}.$$

令 $\Delta x\to0$,注意到 F_x 和 F_y 的连续性就得到

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\bar{x}}=-\frac{F_x(\bar{x},\bar{y})}{F_y(\bar{x},\bar{y})}.$$

即

$$f'(\bar{x})=-\frac{F_x(\bar{x},f(\bar{x}))}{F_y(\bar{x},f(\bar{x}))}.$$

证毕

这个定理只是保证了在一定的条件下,函数方程 $F(x,y)=0$ 在局部(不一定是整体)确定了 y 关于 x 的函数关系 $y=f(x)$,而并不意味这种关系能用显式具体表示出来.例如,本节开始给出的 Kepler 方程

$$y-x-\varepsilon\sin y=0,\quad 0<\varepsilon<1.$$

如果取 $F(x,y)=y-x-\varepsilon\sin y$,那么 $F_y(x,y)=1-\varepsilon\cos\theta>0$,所以 y 对 x 的依赖关系,即隐函数 $y=f(x)$ 肯定是存在的,但它不能用显式表示.

定理 12.4.1 可以直接推广到多元函数的情形,其证明方法也相似,所以我们不加证明地写出这个结果.

定理 12.4.2(多元隐函数存在定理)　若 $n+1$ 元函数 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)$ 满足条件:

(1) $F(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0,y^0)=0$;

(2) 在闭长方体 $D=\{(x,y)\mid |y-y^0|\leqslant b,|x_i-x_i^0|\leqslant a_i,i=1,2,\cdots,n\}$ 上,函数 F 连续,且具有连续偏导数 $F_y,F_{x_i},i=1,2,\cdots,n$;

(3) $F_y(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0,y^0)\neq 0$,

那么

(i) 在点 $(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0,y^0)$ 附近可以从函数方程

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)=0$$

唯一确定隐函数

$$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in O((x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0),\rho),$$

它满足 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n,f(x_1,x_2,\cdots,x_n))=0$, 以及 $y^0=f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$;

(ii) 隐函数 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在 $O((x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0),\rho)$ 上连续;

(iii) 隐函数 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在 $O((x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0),\rho)$ 上具有连续的偏导数,且

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}=-\frac{F_{x_i}(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)}{F_y(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

以方程

$$F(x,y,z)=0$$

为例,若其满足条件 $F_z\neq 0$,则存在相应的隐函数 $z=f(x,y)$.利用复合函数求导的链式规则,在方程两边分别对 x 和 y 求偏导,得到

$$F_x+F_z\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad F_y+F_z\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

从而

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

求多元隐函数也可同此办理.若 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)$ 满足隐函数存在定理条件,那么方程

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)=0$$

两边对 x_i 求偏导,得到

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_i}=0,$$

即

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{\partial F}{\partial x_i}\Big/\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{F_{x_i}}{F_y}, \quad i = 1,2,\cdots,n.$$

例12.4.1 在上半椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1(z>0)$上,求$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 这时,

$$F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,\text{且 } F_z=\frac{2z}{c^2}>0,$$

这保证了隐函数 $z=f(x,y)$ 的存在性.在方程两边分别对 x 和 y 求偏导,得

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2z}{c^2}\frac{\partial z}{\partial x}=0, \qquad \frac{2y}{b^2}+\frac{2z}{c^2}\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

从而有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c^2}{a^2}\frac{x}{z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{c^2}{b^2}\frac{y}{z}.$$

读者可以用它的显式表达式 $z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ 来验证以上结果的正确性.

例12.4.2 设方程 $x^2+y^2+z^2=4z$ 确定 z 为 x,y 的函数,求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$和$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 在方程 $x^2+y^2+z^2=4z$ 两边对 x 求偏导,得

$$2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}=4\frac{\partial z}{\partial x},$$

所以$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{2-z}$.

再对上一等式两边对 x 求偏导得

$$2+2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+2z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=4\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

即

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}{2-z}=\frac{(2-z)^2+x^2}{(2-z)^3}.$$

在方程 $x^2+y^2+z^2=4z$ 两边对 y 求偏导,得

$$2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}=4\frac{\partial z}{\partial y},$$

所以$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{2-z}$.

再对上一等式两边对 x 求偏导，得

$$2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+2z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},$$

即

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}}{2-z}=\frac{xy}{(2-z)^3}.$$

例12.4.3 设方程 $F(xz,yz)=0$ 确定 z 为 x,y 的函数，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 若$\frac{\partial F}{\partial z}=xF_1+yF_2\neq 0$，就可以应用隐函数存在定理.

在方程 $F(xz,yz)=0$ 两边对 x 求偏导得

$$\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)F_1+y\frac{\partial z}{\partial x}F_2=0,$$

所以$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{zF_1}{xF_1+yF_2}$.

再在上一等式两边对 x 求导得

$$\left(2\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)F_1+\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2F_{11}+\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)y\frac{\partial z}{\partial x}F_{12}$$
$$+y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}F_2+y\frac{\partial z}{\partial x}\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)F_{21}+\left(y\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2F_{22}=0.$$

于是

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$
$$=-\frac{2\frac{\partial z}{\partial x}F_1+\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2F_{11}+\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)y\frac{\partial z}{\partial x}F_{12}+y\frac{\partial z}{\partial x}\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)F_{21}+\left(y\frac{\partial z}{\partial x}\right)F_{22}}{xF_1+yF_2}$$
$$=-\frac{2\frac{\partial z}{\partial x}F_1+\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2F_{11}+2\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)y\frac{\partial z}{\partial x}F_{12}+\left(y\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2F_{22}}{xF_1+yF_2}.$$

但 $z+x\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yzF_2}{xF_1+yF_2}$，所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{2\frac{\partial z}{\partial x}F_1+\left(\frac{yzF_2}{xF_1+yF_2}\right)^2F_{11}+2\left(\frac{yzF_2}{xF_1+yF_2}\right)y\frac{\partial z}{\partial x}F_{12}+\left(y\frac{\partial z}{\partial x}\right)F_{22}}{xF_1+yF_2}$$
$$=\frac{2zF_1^2}{(xF_1+yF_2)^2}-\frac{y^2z^2(F_2^2F_{11}-2F_1F_2F_{12}+F_1^2F_{22})}{(xF_1+yF_2)^3}.$$

多个方程的情形

由线性代数的知识知道,在

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

时,从线性方程组

$$\begin{cases} a_1 u + b_1 v + c_1 x + d_1 y = 0, \\ a_2 u + b_2 v + c_2 x + d_2 y = 0 \end{cases}$$

中可以唯一解出

$$u = -\frac{(c_1 b_2 - b_1 c_2)x + (d_1 b_2 - b_1 d_2)y}{(a_1 b_2 - b_1 a_2)},$$

$$v = -\frac{(a_1 c_2 - c_1 a_2)x + (a_1 d_2 - d_1 a_2)y}{(a_1 b_2 - b_1 a_2)}.$$

也就是说,这时可以确定 u,v 为 x,y 的函数,或者说 (u,v) 是 (x,y) 的向量值函数.

对于一般的函数方程组

$$\begin{cases} F(x,y,u,v) = 0, \\ G(x,y,u,v) = 0, \end{cases}$$

在一定的条件下,也可以在某个局部确定 u,v 为 x,y 的函数.

定理 12.4.3(多元向量值隐函数存在定理) 若函数 $F(x,y,u,v)$ 和 $G(x,y,u,v)$ 满足条件:

(1) $F(x_0,y_0,u_0,v_0) = 0, G(x_0,y_0,u_0,v_0) = 0$;

(2) 在闭长方体

$$D = \{(x,y,u,v) \mid |x - x_0| \leqslant a, \\ |y - y_0| \leqslant b, |u - u_0| \leqslant c, |v - v_0| \leqslant d\}$$

上,函数 F,G 连续,且具有连续偏导数;

(3) 在 (x_0,y_0,u_0,v_0) 点,Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} \neq 0,$$

那么

(i) 在 (x_0,y_0,u_0,v_0) 点附近可以从函数方程组

$$\begin{cases} F(x,y,u,v) = 0, \\ G(x,y,u,v) = 0 \end{cases}$$

唯一确定向量值隐函数

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}, (x,y) \in O((x_0,y_0),\rho),$$

它满足 $\begin{cases}F(x,y,f(x,y),g(x,y))=0,\\ G(x,y,f(x,y),g(x,y))=0\end{cases}$ 以及 $u_0=f(x_0,y_0),v_0=g(x_0,y_0)$;

(ii) 这个向量值隐函数在 $O((x_0,y_0),\rho)$ 上连续;

(iii) 这个向量值隐函数在 $O((x_0,y_0),\rho)$ 上具有连续的导数,且

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{pmatrix}.$$

证 我们先证明存在性和连续可偏导性.

由于在点 (x_0,y_0,u_0,v_0) 处

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}\neq 0,$$

所以 F_u 与 F_v 至少有一个在此点不为零.不妨假设 F_u 不等于零,那么对方程 $F(x,y,u,v)=0$ 应用隐函数存在定理就知道,在 (x_0,y_0,u_0,v_0) 附近,存在具有连续偏导数的隐函数 $u=\phi(x,y,v)$,满足

$$F(x,y,\phi(x,y,v),v)=0,\quad u_0=\phi(x_0,y_0,v_0).$$

将 $u=\phi(x,y,v)$ 代入 $G(x,y,u,v)=0$,再看函数方程

$$H(x,y,v)=G(x,y,\phi(x,y,v),v)=0.$$

由于在 (x_0,y_0,v_0) 点处,(相应地在 (x_0,y_0,u_0,v_0) 点处),

$$H_v=G_u\phi_v+G_v=G_u\left(-\frac{F_v}{F_u}\right)+G_v=\frac{F_uG_v-F_vG_u}{F_u}=\frac{1}{F_u}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\neq 0,$$

对方程 $H(x,y,v)=G(x,y,\phi(x,y,v),v)=0$ 应用隐函数存在定理就知道,在 (x_0,y_0,v_0) 附近,存在具有连续偏导数的隐函数 $v=g(x,y)$,它满足 $H(x,y,g(x,y))=0$,即 $G(x,y,\phi(x,y,g(x,y)),g(x,y))=0$. 如果记 $f(x,y)=\phi(x,y,g(x,y))$,那么在 (x_0,y_0) 附近必成立

$$\begin{cases}F(x,y,f(x,y),g(x,y))=0,\\ G(x,y,f(x,y),g(x,y))=0.\end{cases}$$

由隐函数存在定理知道函数 $u=\phi(x,y,v)$ 在 (x_0,y_0,v_0) 附近、$v=g(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 附近都具有连续偏导数,因此复合函数 $f(x,y)=\phi(x,y,g(x,y))$ 在 (x_0,y_0) 附近具有连续偏导数. 即向量值函数 $\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f(x,y)\\ g(x,y)\end{pmatrix}$ 在某个邻域 $O((x_0,y_0),\rho)$ 内具有连续偏导数.

应用多元函数的链式规则,就有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial G}{\partial x}+\dfrac{\partial G}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial G}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\end{cases}$$

因此

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v}\\[2mm] \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial x}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial G}{\partial x}\end{pmatrix}.$$

同理,由

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial y}+\dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial G}{\partial y}+\dfrac{\partial G}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial G}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}=0\end{cases}$$

得到

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v}\\[2mm] \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial G}{\partial y}\end{pmatrix}.$$

两个矩阵式子合并就得

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v}\\[2mm] \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y}\end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v}\\[2mm] \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y}\end{pmatrix}.$$

证毕

注 将(iii)中的公式解出来就是

$$u_x=-\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}\Big/\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)},\quad v_x=-\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}\Big/\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)},$$

$$u_y=-\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}\Big/\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)},\quad v_y=-\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}\Big/\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}.$$

一般地,我们考虑 m 个函数组成的方程组

$$\begin{cases} F_1(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m)=0,\\ F_2(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m)=0,\\ \cdots\cdots \\ F_m(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m)=0, \end{cases}$$

我们称

$$\frac{\partial(F_1,F_2,\cdots,F_m)}{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_m)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

为 $F_1,F_2,\cdots,F_m$ 关于 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 的 Jacobi 行列式.

两个函数的结果可以直接推广到多个函数的情形,其证明方法也相似,所以我们不加证明地写出这个结果.

定理 12.4.4 若 $n+m$ 元函数 $F_i(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m),i=1,2,\cdots,m$ 满足以下条件:

1) $F_i(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0,y_1^0,y_2^0,\cdots,y_m^0)=0,i=1,2,\cdots,m$;

2) 在闭长方体

$$D=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m)\mid |x_i-x_i^0| \leqslant a_i,i=1,2,\cdots,n;|y_j-y_j^0|\leqslant b_j,j=1,2,\cdots,m\}$$

上,函数 $F_i,i=1,2,\cdots,m$ 连续,且具有连续偏导数;

3) 在 $(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0,y_1^0,y_2^0,\cdots,y_m^0)$ 点处,Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(F_1,F_2,\cdots,F_m)}{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_m)}\neq 0.$$

那么

i) 在点 $(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0,y_1^0,y_2^0,\cdots,y_m^0)$ 的某个邻域上,可以从函数方程组

$$\begin{cases} F_1(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m)=0,\\ F_2(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m)=0,\\ \cdots\cdots \\ F_m(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m)=0, \end{cases}$$

唯一确定向量值隐函数

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n) \end{pmatrix}, (x_1,x_2,\cdots,x_n) \in O((x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0),\rho),$$

它满足方程

$$F_i(x_1,x_2,\cdots,x_n,f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$
$$f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n),\cdots,f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)) = 0,$$

以及 $y_i^0 = f_i(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0), i = 1,2,\cdots,m$；

ii) 这个向量值隐函数在 $O((x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0),\rho)$ 上连续；

iii) 这个向量值隐函数在 $O((x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0),\rho)$ 上具有连续的导数，且

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \frac{\partial F_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

在具体计算中，在定理 12.4.4 的条件下对于向量值隐函数求偏导，通常用如下方法得出：分别对

$$F_i(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m) = 0, \quad i = 1,2,\cdots,m$$

关于 x_j 求偏导得

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_j} = 0, \quad i = 1,2,\cdots,m.$$

联立这个方程组，应用 Cramer 法则就得到

$$\frac{\partial y_k}{\partial x_j} = -\frac{\dfrac{\partial(F_1,\cdots,F_{k-1},F_k,F_{k+1},\cdots,F_m)}{\partial(y_1,\cdots,y_{k-1},x_j,y_{k+1},\cdots,y_m)}}{\dfrac{\partial(F_1,F_2,\cdots,F_m)}{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_m)}}, \quad k = 1,2,\cdots,m, \quad j = 1,2,\cdots,n.$$

例12.4.4 设函数方程组

$$\begin{cases} u+v+w+x+y=a, \\ u^2+v^2+w^2+x^2+y^2=b^2, \\ u^3+v^3+w^3+x^3+y^3=c^3 \end{cases}$$

确定 u,v,w 为 x,y 的隐函数. 求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial x}$.

解 将方程组化为

$$\begin{cases} F(x,y,u,v,w)=u+v+w+x+y-a=0, \\ G(x,y,u,v,w)=u^2+v^2+w^2+x^2+y^2-b^2=0, \\ H(x,y,u,v,w)=u^3+v^3+w^3+x^3+y^3-c^3=0 \end{cases}$$

那么在

$$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2u & 2v & 2w \\ 3u^2 & 3v^2 & 3w^2 \end{vmatrix}=6(v-u)(w-v)(w-u)\neq 0$$

的条件下,可以确定(u,v,w)为(x,y)的向量值函数. 此时,对以上三个方程关于 x 求偏导,得

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}+1=0, \\ 2u\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}+2w\frac{\partial w}{\partial x}+2x=0, \\ 3u^2\frac{\partial u}{\partial x}+3v^2\frac{\partial v}{\partial x}+3w^2\frac{\partial w}{\partial x}+3x^2=0, \end{cases}$$

解此方程组得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{(v-x)(w-x)}{(v-u)(w-u)},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{(u-x)(w-x)}{(u-v)(w-v)},$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{(u-x)(v-x)}{(u-w)(v-w)}.$$

例12.4.5 设在直角坐标系下,函数 $z=z(x,y)$ 具有二阶连续偏导数,并满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

将自变量作变换

$$\begin{cases} u=x+y, \\ v=x-y, \end{cases}$$

因变量也作变换 $w=xy-z$,导出 w 关于 u,v 的偏导数所满足的方程.

解　从自变量的变换中可以解出 $x=\frac{u+v}{2}, y=\frac{u-v}{2}$，因此 $w=xy-z$ 也是 u, v 的函数. 由于 $z=xy-w$，利用链式规则对此等式两边关于 x 和 y 分别求偏导得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y-\left(\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)=y-\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{\partial w}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x-\left(\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)=x-\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}.$$

进一步还可得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial v\partial u}\right)-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right)=-\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}-\frac{\partial^2 w}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial v\partial u}\right)-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right)=1-\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial v\partial u}\right)+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}-\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right)=-\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}-\frac{\partial^2 w}{\partial v^2},$$

将这些表达式代入方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 就得

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\frac{1}{2}.$$

这样一来，方程就大大简化了.

实际上，我们还可以将这个方程解出来. 在等式 $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\frac{1}{2}$ 两边对 u 积分得

$$\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{1}{2}u+\phi(v).$$

再对 u 积分一次就得

$$w=\frac{1}{4}u^2+\phi(v)u+\Psi(v).$$

其中 ϕ 与 Ψ 是 v 的任意的二阶连续可微函数. 回忆一下所用的变量代换就知道，方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 的解的一般形式为

$$z=xy-\frac{1}{4}(x+y)^2-(x+y)\phi(x-y)-\Psi(x-y).$$

这个例子说明，通过适当的变量代换，常常可以将微分方程化简乃至解出，这是微分方程和数学物理中一个常用的方法.

逆映射定理

一元函数的反函数存在定理在高维是否也有相应的结果呢？我们先来看看二维情形.

设 D 为 $\mathbf{R}^2$ 中的开集，$f: D\to\mathbf{R}^2$ 为映射，其坐标分量函数表示为

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v). \end{cases}$$

如果 f 在 D 上可导(即 $x(u,v)$ 和 $y(u,v)$ 可偏导),我们称

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

为映射 f 的 Jacobi 行列式.

定理 12.4.5　设 $P_0=(u_0,v_0)\in D, x_0=x(u_0,v_0), y_0=y(u_0,v_0), P_0'=(x_0,y_0)$,且 f 在 D 上具有连续导数.如果在 P_0 点处 f 的 Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0.$$

那么存在 P_0' 的一个邻域 $O(P_0',\rho)$,在这个邻域上存在 f 的具有连续导数的逆映射 g:

$$\begin{cases} u = u(x,y), \\ v = v(x,y), \end{cases}\quad (x,y)\in O(P_0',\rho),$$

满足

(1) $u_0=u(x_0,y_0), v_0=v(x_0,y_0)$;

(2) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial y}{\partial v}\Big/\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial x}{\partial v}\Big/\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},$

$\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial y}{\partial u}\Big/\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},\quad \dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial x}{\partial u}\Big/\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}.$

证　考虑函数方程组

$$\begin{cases} F(x,y,u,v) = x - x(u,v) = 0, \\ G(x,y,u,v) = y - y(u,v) = 0. \end{cases}$$

由假设,在 (x_0,y_0,u_0,v_0) 点处

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0.$$

由向量值函数的隐函数存在定理,在 (x_0,y_0,u_0,v_0) 附近存在向量值函数 g:

$$\begin{cases} u = u(x,y), \\ v = v(x,y), \end{cases}\quad (x,y)\in O(P_0',\rho).$$

满足

i) $u_0=u(x_0,y_0), v_0=v(x_0,y_0)$;

ii) $\begin{cases} x - x(u(x,y),v(x,y)) = 0, \\ y - y(u(x,y),v(x,y)) = 0, \end{cases}$

而且 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 $O(P_0',\rho)$ 上具有连续的偏导数.这说明在 $O(P_0',\rho)$ 上 g 为 f 的逆映射.

在 ii) 中对 x 求偏导得

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=1,$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=0.$$

因此

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial v}\bigg/\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial y}{\partial u}\bigg/\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}.$$

同理可得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial x}{\partial v}\bigg/\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial x}{\partial u}\bigg/\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}.$$

证毕

注 从定理的 2) 可以立即得到

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\cdot\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=1.$$

即映射 f 与其逆映射 g 的 Jacobi 行列式互为倒数，这是一元函数的反函数求导公式的推广.

例如极坐标变换(即映射)

$$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$$

的 Jacobi 行列式为

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix}=r.$$

因此在任意点 $(x,y)(x^2+y^2\neq 0)$ 附近，存在逆变换 $r=r(x,y),\theta=\theta(x,y)$.

一般来说，连续映射不一定将开集映射为开集. 例如，常值映射就不是将开集映射为开集. 但一个连续映射在某个开集上的 Jacobi 行列式恒不等于零，那么它将这个开集映射为开集，这就是下面的定理.

定理 12.4.6 *设 D 为 $\mathbf{R}^2$ 中的开集，且映射 $f:D\to\mathbf{R}^2$，$x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$ 在 D 上具有连续导数. 如果 f 的 Jacobi 行列式*

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

在 D 上恒不为零，那么 D 的像集 $f(D)$ 是开集.

证 沿用定理 12.4.4 的记号.

设 $P_0'(x_0,y_0)$ 为 $f(D)$ 上的任一点，那么从定理 12.4.5 的证明可知，存在 P_0' 的一个邻域 $O(P_0',\rho)$，使得这个邻域中的点都是 f 的像点，因此 P_0' 是 $f(D)$ 的内点. 这就是说，$f(D)$ 是开集.

证毕

定理 12.4.5 和定理 12.4.6 在高维也成立. 请有兴趣的读者考虑一下.

习 题

1. 求下列方程所确定的隐函数的导数或偏导数：

(1) $\sin y+e^x-xy^2=0$，求 $\dfrac{dy}{dx}$；

(2) $x^y=y^x$，求 $\dfrac{dy}{dx}$；

(3) $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$,求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$;

(4) $\arctan\dfrac{x+y}{a}-\dfrac{y}{a}=0$,求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$;

(5) $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$,求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和$\dfrac{\partial z}{\partial y}$;

(6) $\mathrm{e}^z-xyz=0$,求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 和$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$;

(7) $z^3-3xyz=a^3$,求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 和$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$;

(8) $f(x+y,y+z,z+x)=0$,求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和$\dfrac{\partial z}{\partial y}$;

(9) $z=f(xz,z-y)$,求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 和$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$;

(10) $f(x,x+y,x+y+z)=0$,求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 和$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

2. 设 $y=\tan(x+y)$ 确定 y 为 x 的隐函数,验证

$$\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}=-\frac{2(3y^4+8y^2+5)}{y^3}.$$

3. 设 ϕ 是可微函数,证明由 $\phi(cx-az,cy-bz)=0$ 所确定的隐函数 $z=f(x,y)$ 满足方程

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c.$$

4. 设方程 $\phi(x+zy^{-1},y+zx^{-1})=0$ 确定隐函数 $z=f(x,y)$,证明它满足方程

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy.$$

5. 求下列方程组所确定的隐函数的导数或偏导数:

(1) $\begin{cases}z-x^2-y^2=0,\\ x^2+2y^2+3z^2=4a^2,\end{cases}$ 求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 和$\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}$;

(2) $\begin{cases}xu+yv=0,\\ yu+xv=1,\end{cases}$ 求$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 和$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$;

(3) $\begin{cases}u=f(u,x,v+y),\\ v=g(u-x,v^2y),\end{cases}$ 求$\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 和$\dfrac{\partial v}{\partial x}$;

(4) $\begin{cases}x=u+v,\\ y=u-v,\\ z=u^2v^2,\end{cases}$ 求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和$\dfrac{\partial z}{\partial y}$;

(5) $\begin{cases} x = e^u \cos v, \\ y = e^u \sin v, \\ z = u^2 + v^2, \end{cases}$ 求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$和$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

6. 求微分:

(1) $x + 2y + z - 2\sqrt{xyz} = 0$,求 dz;

(2) $\begin{cases} x + y = u + v, \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{\sin u}{\sin v}, \end{cases}$ 求 du 与 dv.

7. 设 $z = f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数. 在极坐标 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ 变换下,求

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

关于极坐标的表达式.

8. 证明:通过适当线性变换

$$\begin{cases} u = x + \lambda y, \\ v = x + \mu y, \end{cases}$$

可以将方程

$$A\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad (AC - B^2 < 0)$$

化简为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0.$$

并说明此时 λ, μ 为一元二次方程 $A + 2Bt + Ct^2 = 0$ 的两个相异实根.

9. 通过自变量变换 $\begin{cases} x = e^{\xi}, \\ y = e^{\eta}, \end{cases}$ 变换方程

$$ax^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2bxy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + cy^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad (a, b, c \text{ 为常数}).$$

10. 通过自变量变换 $\begin{cases} u = x - 2\sqrt{y}, \\ v = x + 2\sqrt{y}, \end{cases}$ 变换方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y} \quad (y > 0).$$

11. 导出新的因变量关于新的自变量的偏导数所满足的方程:

(1) 用 $\begin{cases} u = x^2 + y^2, \\ v = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}, \end{cases}$ 及 $w = \ln z - (x + y)$ 变换方程

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=(y-x)z;$$

(2) 用 $\begin{cases}u=x,\\ v=x+y,\end{cases}$ 及 $w=x+y+z$ 变换方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\left(1+\frac{y}{x}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0;$$

(3) 用 $\begin{cases}u=x+y,\\ v=\dfrac{x}{y},\end{cases}$ 及 $w=\dfrac{z}{x}$ 变换方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y}=0.$$

12. 设 $y=f(x,t)$，而 t 是由方程 $F(x,y,t)=0$ 所确定的 x,y 的隐函数(其中 f 和 F 都具有一阶连续偏导数). 证明

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial t}-\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial y}+\dfrac{\partial F}{\partial t}}.$$

§5 偏导数在几何中的应用

空间曲线的切线和法平面

一条空间曲线可以看成一个质点在空间运动的轨迹. 取定一个直角坐标系，设质点在时刻 t 位于点 $P(x(t),y(t),z(t))$ 处，也就是它在任一时刻的坐标可用

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t), \quad a\leqslant t\leqslant b\\ z=z(t),\end{cases}$$

来表示，随着 t 的连续变动，相应的点 (x,y,z) 就在空间画出一条曲线.

这个表达式称为**空间曲线的参数方程**，它也可以写成向量的形式

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k},\quad a\leqslant t\leqslant b.$$

定义 12.5.1 若 $\boldsymbol{r}'(t)=x'(t)\boldsymbol{i}+y'(t)\boldsymbol{j}+z'(t)\boldsymbol{k}$ 在 $[a,b]$ 上连续，并且 $\boldsymbol{r}'(t)\neq 0, t\in[a,b]$，则称

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k},\quad a\leqslant t\leqslant b$$

所描述的空间曲线为**光滑曲线**.

设 Γ 为一条光滑的空间曲线，现在来讨论 Γ 上一点 $P_0(x(t_0),y(t_0),z(t_0))$ 处的切线. 切线的定义与平面的情况相同，即割线的极限位置.

记 $x_0=x(t_0), y_0=y(t_0), z_0=z(t_0)$. 取 Γ 上一点 $P_1(x(t),y(t),$

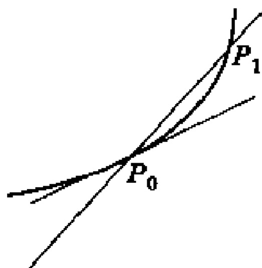


图 12.5.1

$z(t))$,则过 P_0 和 P_1 的割线的方程为

$$\frac{x-x_0}{x(t)-x(t_0)}=\frac{y-y_0}{y(t)-y(t_0)}=\frac{z-z_0}{z(t)-z(t_0)}.$$

将其改写为

$$\frac{x-x_0}{\dfrac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}}=\frac{y-y_0}{\dfrac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}}=\frac{z-z_0}{\dfrac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0}},$$

再令 $t\to t_0$,注意到 Γ 是光滑曲线,就得到它在 P_0 点的切线方程

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}.$$①

显然

$$\boldsymbol{r}'(t_0)=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$$

就是曲线 Γ 在 P_0 点的**切向量**.

过点 P_0 且与切线垂直的平面称为曲线在 P_0 点的**法平面**.显然,法平面的法向量就是 Γ 在 P_0 点的切向量,因此曲线在 P_0 点的法平面方程可写成

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0.$$

特别地,如果曲线的方程为

$$y=f(x),\qquad z=g(x),$$

把它看成以 x 为参数的参数方程

$$\begin{cases}x=x,\\ y=f(x),\\ z=g(x),\end{cases}$$

即得到它在 $P(x_0,f(x_0),g(x_0))$ 点的切线方程为

---

① 这个公式应按空间解析几何中有关直线的对称式方程的说明来理解.例如,当 $x'(t_0)\neq 0$, $y'(t_0)\neq 0, z'(t_0)=0$ 时,这个公式应理解为 $\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{x'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{y'(t_0)},\\ z=z_0.\end{cases}$

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - f(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{z - g(x_0)}{g'(x_0)};$$

法平面方程为

$$(x - x_0) + f'(x_0)(y - f(x_0)) + g'(x_0)(z - g'(x_0)) = 0.$$

空间曲线还可以表示为空间中两张曲面的交.设曲线 Γ 的方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0. \end{cases}$$

$P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为 Γ 上一点,且 Jacobi 矩阵

$$J = \begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{pmatrix}$$

在 P_0 点是满秩的.我们来求曲线 Γ 在 P_0 点的切线与法平面方程.

由于矩阵 J 在 P_0 点满秩,不失一般性,假设在 P_0 点成立

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} = \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix} \neq 0.$$

由隐函数存在定理,在 P_0 附近唯一确定了满足 $y_0 = f(x_0), z_0 = g(x_0)$ 的隐函数

$$y = f(x), \quad z = g(x), \quad x \in O(x_0,\varepsilon).$$

且有

$$f'(x_0) = \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}(P_0) \Big/ \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(P_0),$$

$$g'(x_0) = \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}(P_0) \Big/ \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(P_0).$$

于是,曲线 Γ 在 P_0 点的切线方程为

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(P_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}(P_0)} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}(P_0)};$$

法平面方程为

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(P_0)(x - x_0) + \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}(P_0)(y - y_0) + \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}(P_0)(z - z_0) = 0.$$

由空间解析几何知道,由一点及两个线性无关(即非平行)的向量确定一张过该点的平面(称为这两个向量张成的平面),平面上的任一向量都可以表为这两个向量的线性组合.

定理 12.5.1　曲线 Γ 在 P_0 点的法平面就是由梯度向量 grad $F(P_0)$ 和 grad $G(P_0)$ 张成的过 P_0 的平面.

证 由于矩阵 $J = \begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{pmatrix}$ 满秩，因此

$$\text{grad } F(P_0) = (F_x(P_0), F_y(P_0), F_z(P_0))$$

与

$$\text{grad } G(P_0) = (G_x(P_0), G_y(P_0), G_z(P_0))$$

线性无关，因此它们可以张成一个过 P_0 点的平面 π.

要证明平面 π 就是曲线 Γ 在 P_0 点的法平面，只要证明 Γ 在 P_0 点的切向量与 π 垂直，即与 $\text{grad } F(P_0)$ 和 $\text{grad } G(P_0)$ 均垂直即可.

因为曲线 Γ 在 P_0 点的切向量为

$$\boldsymbol{\tau} = \left(\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(P_0), \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}(P_0), \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}(P_0)\right),$$

于是

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} \cdot \text{grad } F(P_0) &= F_x(P_0)\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(P_0) \\ &\quad + F_y(P_0)\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}(P_0) + F_z(P_0)\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}(P_0) \\ &= \begin{vmatrix} F_x(P_0) & F_y(P_0) & F_z(P_0) \\ F_x(P_0) & F_y(P_0) & F_z(P_0) \\ G_x(P_0) & G_y(P_0) & G_z(P_0) \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

同理 $\boldsymbol{\tau} \cdot \text{grad } G(P_0) = 0$. 因此平面 π 就是曲线 Γ 在 P_0 点的法平面.

证毕

这个定理刻画了曲线 Γ 在 P_0 点的法平面的几何性质.

例 12.5.1 一质点一方面按逆时针方向以等角速度 ω 绕 z 轴旋转，另一方面又沿 z 轴正向以匀速 c 上升，已知时刻 $t = 0$ 时质点在点 $(a,0,0)(a>0)$ 处，求

(1) 该质点的运动轨迹 Γ;

(2) 该质点在时刻 t 的速度;

(3) 当 $\omega = 1$ 时，曲线 Γ 在 $t = \frac{\pi}{2}$ 时所对应点处的切线与法平面方程.

解 (1) 设在时刻 t，质点在 $P(x,y,z)$ 处，θ 为 OM 与 x 轴正向的夹角，如图 12.5.2 所示.

因为质点按逆时针方向以等角速度 ω 绕 z 轴旋转，而且 $t = 0$ 时质点在 $(a,0,0)$ 处，所以

$$\theta = \omega t,$$

于是

$$x = a\cos\theta = a\cos\omega t,$$

$$y = a\sin\theta = a\sin\omega t.$$

又因为质点以匀速 c 上升，于是

$$z = ct.$$

那么质点运动的轨迹方程为

$$\begin{cases} x = a\cos\omega t, \\ y = a\sin\omega t, \quad 0 \geqslant t. \\ z = ct. \end{cases}$$

这样的曲线称为螺旋线.

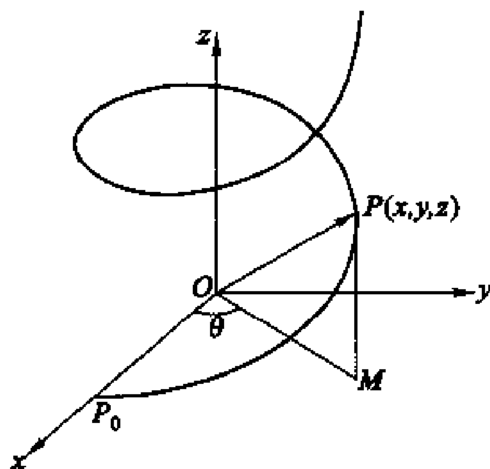


图 12.5.2

(2) 我们将质点的轨迹方程用向量值函数写出来就是

$$\boldsymbol{r}(t) = (a\cos\omega t, a\sin\omega t, ct),$$

那么质点的运动速度就为

$$\boldsymbol{r}'(t) = (-a\omega\sin\omega t, a\omega\cos\omega t, c).$$

(3) 当 $\omega = 1$ 时，曲线 Γ 的方程即为

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \\ z = ct. \end{cases}$$

而 $t = \frac{\pi}{2}$ 时对应曲线上的点 $M_0(0, a, \frac{c\pi}{2})$. 由于 $\boldsymbol{r}'(t) = (-a\sin t, a\cos t, c)$，因此

$$\boldsymbol{r}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-a, 0, c).$$

那么曲线 Γ 在 M_0 点的切线方程为

$$\frac{x-0}{-a}=\frac{y-a}{0}=\frac{z-\frac{c\pi}{2}}{c},$$

或

$$\begin{cases}\dfrac{x}{-a}=\dfrac{z-\frac{c\pi}{2}}{c},\\ y=a.\end{cases}$$

曲线 Γ 在 M_0 点的法平面方程为

$$-ax+cz-\frac{c^2\pi}{2}=0.$$

例 12.5.2　求曲线 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2-2y=4\\ x+y+z=0\end{cases}$ 在点$(1,1,-2)$处的切线和法平面的方程.

解法一　直接利用公式求解.

曲线 Γ 的方程即为

$$\begin{cases}F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2y-4=0,\\ G(x,y,z)=x+y+z=0.\end{cases}$$

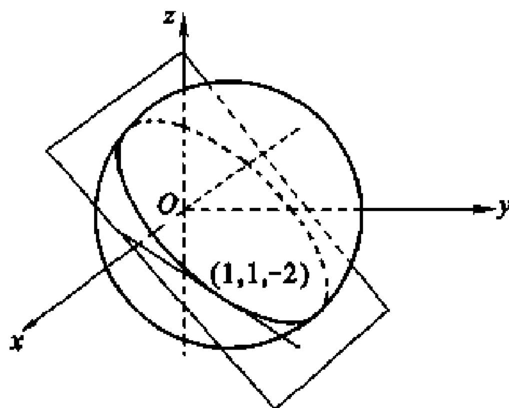


图 12.5.3

那么

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=\begin{vmatrix}2y-2 & 2z\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2(y-z-1),$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}=\begin{vmatrix}2z & 2x\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2(z-x),$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}2x & 2y-2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2(x-y+1).$$

因此

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{(1,1,-2)}=4,\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{(1,1,-2)}=-6,\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{(1,1,-2)}=2.$$

于是所求的切线方程为

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{-6}=\frac{z+2}{2},\text{即}\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+2}{1}.$$

法平面方程为

$$4(x-1)-6(y-1)+2(z+2)=0,\text{即 }2x-3y+z+3=0.$$

解法二 依照推导公式的方法来求解.

在所给的两个曲面方程两边对 x 求导得

$$\begin{cases}2x+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0,\\[2mm] 1+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0.\end{cases}$$

解这个方程得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{z-x}{y-z-1},\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{1-y+x}{y-z-1}.$$

于是

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(1,1,-2)}=-\frac{3}{2},\quad \left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{(1,1,-2)}=\frac{1}{2}.$$

因此曲线 Γ 在 $(1,1,-2)$ 处的切向量为 $\left(1,-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$，因此所求的切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-\frac{3}{2}}=\frac{z+2}{\frac{1}{2}},\text{即}\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+2}{1}.$$

法平面方程为

$$(x-1)-\frac{3}{2}(y-1)+\frac{1}{2}(z+2)=0,\text{即 }2x-3y+z+3=0.$$

曲面的切平面与法线

曲面方程一般表示为

$$F(x,y,z)=0,\quad (x,y,z)\in D,$$

这里只考虑 Jacobi 矩阵 (F_x,F_y,F_z) 在 D 上恒为满秩的情况.

设 S 为一张曲面，$P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为 S 上一点. 考察曲面 S 上过 P_0 的任意一条曲线

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$$

并设 $x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0), z_0 = z(t_0)$. 由于曲线在 S 上，因此

$$F(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0,$$

两边对 t 求导就得

$$F_x(P_0)x'(t_0) + F_y(P_0)y'(t_0) + F_z(P_0)z'(t_0) = 0.$$

这说明，曲面 S 上过 P_0 的任意一条曲线在 P_0 点的切向量 $(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ 都与向量

$$\boldsymbol{n} = (F_x(P_0), F_y(P_0), F_z(P_0))$$

垂直，因此这些切向量都在一张过 P_0 点的平面 π 上.

平面 π 称为曲面 S 在点 P_0 的**切平面**，它的法向量 $\boldsymbol{n}$ 称为 S 在 P_0 点的**法向量**(见图 12.5.4). 这样，S 在点 P_0 的切平面方程可以表示为

$$F_x(P_0)(x - x_0) + F_y(P_0)(y - y_0) + F_z(P_0)(z - z_0) = 0.$$

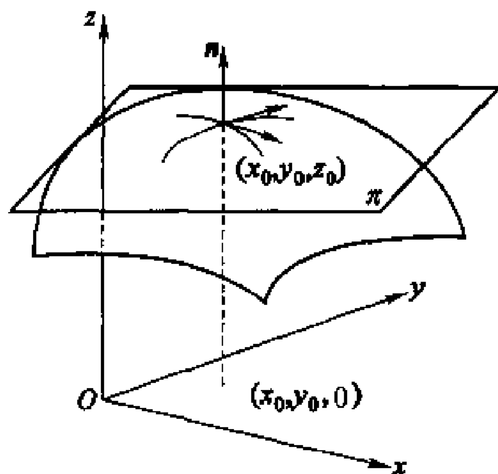


图 12.5.4

过 P_0 点且与切平面垂直的直线称为曲面 S 在 P_0 点的**法线**，它的方程显然为

$$\frac{x - x_0}{F_x(P_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(P_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(P_0)},$$

这是空间中过 P_0 点，并以向量 $\mathrm{grad}\, F(P_0)$ 为方向的直线(请读者与定理 12.5.1 比较以下).

如果一个曲面具有连续变动的切平面，也就是说 F_x, F_y, F_z 都连续，那么称该曲面为**光滑曲面**.

若曲面 S 的方程可显式表示为

$$z = f(x,y),$$

也就是

$$F(x,y,z) = f(x,y) - z = 0.$$

那么曲面 S 在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 点(其中 $z_0 = f(x_0,y_0)$) 的切平面方程即为

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

将它与

$$\begin{aligned} & f(x,y) - f(x_0,y_0) \\ = & f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0) + o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right), \end{aligned}$$

比较一下就知道:若 $z = f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点可微,则在 (x_0,y_0) 点附近可以用该点的切平面近似代替曲面,其误差是 $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ 的高阶无穷小.

相应地,它的法线方程为

$$\frac{x - x_0}{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)} = \frac{y - y_0}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

曲面方程也可以表示成参数形式:

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \quad (u,v) \in D, \\ z = z(u,v), \end{cases}$$

其中 D 是 $\mathbf{R}^2$ 中的区域,它称为曲面的**一般方程**. 以下我们假设 Jacobi 矩阵

$$J = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}$$

在 D 上恒为满秩.

设 S 为这样一张曲面,$P_0(x_0,y_0,z_0)$($x_0 = x(u_0,v_0)$, $y_0 = y(u_0,v_0)$, $z_0 = z(u_0,v_0)$) 为 S 上一点. 由于矩阵 J 是满秩的,不失一般性,假设 $\left.\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)} \neq 0$. 那么由隐函数定理(或逆映射定理),可以由 $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ 在某个邻域 $O((x_0,y_0),\rho)$ 上唯一确定逆映射 $\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$,代入 $z = z(u,v)$,就得到曲面 S 在 P_0 附近的显式表示

$$z = z(u(x,y),v(x,y)) = f(x,y),$$

且成立

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial v}\Big/\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial y}{\partial u}\Big/\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial x}{\partial v}\Big/\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial x}{\partial u}\Big/\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}.$$

由此得到

$$f_x=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\Big/\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},$$
$$f_y=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\Big/\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},$$

于是 S 在 P_0 点的切平面方程为

$$\left.\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}(x-x_0)+\left.\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}(y-y_0)$$
$$+\left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}(z-z_0)=0;$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}}.$$

例12.5.3 求曲面 $e^z-z+xy=3$ 在点$(2,1,0)$处的切平面与法线方程.

解 曲面方程即为 $F(x,y,z)=e^z-z+xy-3=0$. 由于

$$F_x=y,\quad F_y=x,\quad F_z=e^z-1,$$

因此曲面在点$(2,1,0)$处的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(F_x(2,1,0),F_y(2,1,0),F_z(2,1,0))=(1,2,0),$$

于是曲面在点$(2,1,0)$处的切平面方程为

$$1\cdot(x-2)+2\cdot(y-1)+0\cdot(z-0)=0,\text{即 } x+2y-4=0.$$

法线方程为

$$\begin{cases}\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2},\\ z=0.\end{cases}$$

例12.5.4 求曲面

$$\begin{cases}x=a\operatorname{ch}u\cos v,\\ y=b\operatorname{ch}u\sin v,\\ z=\operatorname{sh}u\end{cases}$$

在$(u,v)=\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$所对应的点处的切平面和法线方程.

解 因为

$$\frac{\partial x}{\partial u}=a\operatorname{sh}u\cos v,\qquad \frac{\partial x}{\partial v}=-a\operatorname{ch}u\sin v,$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}=b\operatorname{sh}u\sin v,\qquad \frac{\partial y}{\partial v}=b\operatorname{ch}u\cos v,$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\operatorname{ch}u,\qquad \frac{\partial z}{\partial v}=0.$$

所以在$(u,v)=\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$处,

$$\frac{\partial x}{\partial u}=0,\qquad \frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{a}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}=0,\qquad \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{b}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=1,\qquad \frac{\partial z}{\partial v}=0.$$

于是在这点

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}=-\frac{b}{\sqrt{2}},\quad \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}=-\frac{a}{\sqrt{2}},\quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=0.$$

由于$(u,v)=\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$对应于$(x,y,z)=\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}},0\right)$点,因此曲面在这点的切平面方程为

$$-\frac{b}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)-\frac{a}{\sqrt{2}}\left(y-\frac{b}{\sqrt{2}}\right)+0\cdot(z-0)=0,$$

即

$$bx+ay-\sqrt{2}ab=0.$$

法线方程为

$$\begin{cases}\dfrac{x-\dfrac{a}{\sqrt{2}}}{-\dfrac{b}{\sqrt{2}}}=\dfrac{y-\dfrac{b}{\sqrt{2}}}{-\dfrac{a}{\sqrt{2}}},\\ z=0.\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\dfrac{x-\dfrac{a}{\sqrt{2}}}{b}=\dfrac{y-\dfrac{b}{\sqrt{2}}}{a},\\ z=0.\end{cases}$$

我们现在引入夹角的概念.两条曲线在交点处的夹角,是指这两条曲线在交点处的切向量之间的夹角.两张曲面在交线上一点的夹角,是指这两张曲

面在该点的法向量之间的夹角.如果两张曲面在交线上每一点正交,即夹角为直角,就称这两张曲面正交.

例 12.5.5 证明两球面 $x^2+y^2+z^2=2ax$ 与 $x^2+y^2+z^2=2by(a,b>0)$ 是相互正交的.

证 球面 $x^2+y^2+z^2=2ax$ 在任意一点的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x-a,y,z)$;球面 $x^2+y^2+z^2=2by$ 在任意一点的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x,y-b,z)$.在两球面的任一交点 (x,y,z) 处,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2&=(x-a)\cdot x+y(y-b)+z\cdot z=x^2+y^2+z^2-ax-by\\&=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2-2ax)+\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2-2by)=0.\end{aligned}$$

因此两球面是正交的.

习　题

1. 求下列曲线在指定点处的切线与法平面方程:

(1) $\begin{cases}y=x^2,\\ z=\dfrac{x}{1+x},\end{cases}$ 在 $\left(1,1,\dfrac{1}{2}\right)$ 点;

(2) $\begin{cases}x=t-\sin t,\\ y=1-\cos t,\\ z=4\sin\dfrac{t}{2},\end{cases}$ 在 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 对应的点;

(3) $\begin{cases}x+y+z=0,\\ x^2+y^2+z^2=6,\end{cases}$ 在 $(1,-2,1)$ 点;

(4) $\begin{cases}x^2+y^2=R^2,\\ x^2+z^2=R^2,\end{cases}$ 在 $\left(\dfrac{R}{\sqrt{2}},\dfrac{R}{\sqrt{2}},\dfrac{R}{\sqrt{2}}\right)$ 点.

2. 在曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 上求一点,使曲线在这一点的切线与平面 $x+2y+z=10$ 平行.

3. 求曲线 $x=\sin^2 t,y=\sin t\cos t,z=\cos^2 t$ 在 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 所对应的点处的切线的方向余弦.

4. 证明:曲线

$$\begin{cases}x=ae^t\cos t,\\ y=ae^t\sin t,\\ z=ae^t\end{cases}$$

与锥面 $x^2+y^2=z^2$ 的各母线相交的角度相同.

5. 求下列曲面在指定点的切平面与法线方程：

(1) $z = 2x^4 + 3y^3$，在点$(2,1,35)$；

(2) $e^{\frac{x}{z}} + e^{\frac{y}{z}} = 4$，在点$(\ln 2,\ln 2,1)$；

(3) $x = u + v, y = u^2 + v^2, z = u^3 + v^3$，在点 $u = 0, v = 1$ 所对应的点.

6. 在马鞍面 $z = xy$ 上求一点，使得这一点的法线与平面 $x + 3y + z + 9 = 0$ 垂直，并写出此法线的方程.

7. 求椭球面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 498$ 的平行于平面 $x + 3y + 5z = 7$ 的切平面.

8. 求圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 与马鞍面 $bz = xy$ 的交角.

9. 已知曲面 $x^2 - y^2 - 3z = 0$，求经过点 $A(0,0,-1)$ 且与直线$\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$ 平行的切平面的方程.

10. 证明曲面$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}\,(a > 0)$上任一点的切平面在各坐标轴上的截距之和等于 a.

11. 证明曲面 $f(ax - bz, ay - cz) = 0$上的切平面都与某一定直线平行，其中函数 f 连续可微，且常数 a,b,c 不同时为零.

12. 证明曲面 $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)(x \neq 0)$在任一点处的切平面都通过原点，其中函数 f 连续可微.

13. 证明曲面 $F\left(\frac{z}{y},\frac{x}{z},\frac{y}{x}\right) = 0$的所有切平面都过某一定点，其中函数 F 具有连续偏导数.

§6　无条件极值

无条件极值

我们已经讨论了在只有一个自变量的情况下，如何解决诸如用料最省、路程最短、收益最大等问题. 但实际问题一般总受到多个因素的制约，因此有必要讨论多元函数的最值问题. 与一元函数类似，多元函数的最值与极值有着密切联系，下面先引入多元函数的极值概念.

定义 12.6.1　设 $D \in \mathbf{R}^n$ 为开区域，$f(\boldsymbol{x})$ 为定义在 D 上的函数，$\boldsymbol{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0) \in D$. 若存在 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域 $O(\boldsymbol{x}_0, r)$，使得

$$f(\boldsymbol{x}_0) \geqslant f(\boldsymbol{x})(\text{或 } f(\boldsymbol{x}_0) \leqslant f(\boldsymbol{x})),\quad \boldsymbol{x} \in O(\boldsymbol{x}_0, r),$$

则称 $\boldsymbol{x}_0$ 为 f 的**极大值点**(或**极小值点**)，统称**极值点**；$f(\boldsymbol{x}_0)$ 为相应的**极大值**(或**极小值**)，统称**极值**.

先考察一个点为极值点的必要条件,下面的结论是一元函数的 Fermat 引理在多元函数情形的推广.

定理 12.6.1(必要条件)　*若 $\boldsymbol{x}_0$ 为 f 的极值点,且 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点可偏导,则它在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的各个一阶偏导数都为零,即*

$$f_{x_1}(\boldsymbol{x}_0) = f_{x_2}(\boldsymbol{x}_0) = \cdots = f_{x_n}(\boldsymbol{x}_0) = 0.$$

证　只证明 $f_{x_1}(\boldsymbol{x}_0) = 0$,其它类似. 作一元函数

$$\varphi(x_1) = f(x_1, x_2^0, \cdots, x_n^0),$$

则 x_1^0 是 $\varphi(x_1)$ 的极值点. 由于 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点可偏导,因此 $\varphi(x_1)$ 在 x_1^0 点可导,由 Fermat 引理,即得到

$$\varphi'(x_1^0) = f_{x_1}(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0) = 0.$$

证毕

f 的各个一阶偏导数同时为零的点称为它的**驻点**.

下面给出与一元函数情况类似的两点说明. 首先,定理 12.6.1 的条件不是充分的,即驻点不一定是极值点. 如马鞍面方程 $f(x,y) = xy$ 满足

$$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0,$$

但在(0,0)的任何邻域里,总同时存在使 $f(x,y)$ 为正和为负的点. 而 $f(0,0) = 0$,因此(0,0)不是 f 的极值点(见图 12.6.1).

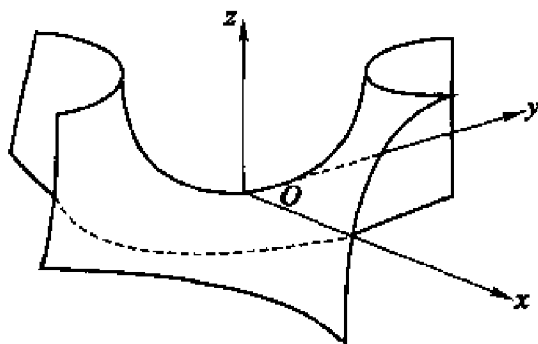


图 12.6.1

其次,偏导数不存在的点也可能是极值点. 如柱面方程 $f(x,y) = |x|$,整个 y 轴上的每一点 $(0,y)$ 都是 f 的极小值点. 但在 y 轴上的任一点 $(0,y)$ 处,f 关于 x 的偏导数都不存在(见图 12.6.2).

那么,要加上什么条件才能保证驻点是极值点呢?我们先对二元函数进行讨论.

设 $z = f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数,$P_0 = (x_0, y_0)$ 为 f 的驻点,即

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0,$$

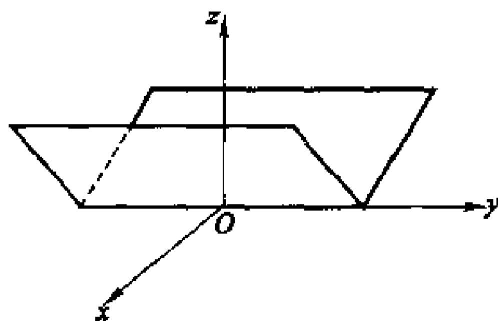


图 12.6.2

那么由 Taylor 公式得到

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$
$$=\frac{1}{2}\{f_{xx}(\widetilde{P})\Delta x^2+2f_{xy}(\widetilde{P})\Delta x\Delta y+f_{yy}(\widetilde{P})\Delta y^2\},$$

其中 $\widetilde{P}=(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y),0<\theta<1$. 由于 f 的二阶偏导数 (x_0,y_0) 在点连续，因此

$$f_{xx}(\widetilde{P})=f_{xx}(x_0,y_0)+\alpha,$$
$$f_{xy}(\widetilde{P})=f_{xy}(x_0,y_0)+\beta,$$
$$f_{yy}(\widetilde{P})=f_{yy}(x_0,y_0)+\gamma,$$

其中 α,β,γ 为当 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0$ 时的无穷小量.

于是得到

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$
$$=\frac{1}{2}\{f_{xx}(x_0,y_0)\Delta x^2+2f_{xy}(x_0,y_0)\Delta x\Delta y$$
$$+f_{yy}(x_0,y_0)\Delta y^2+\alpha\Delta x^2+2\beta\Delta x\Delta y+\gamma\Delta y^2\}$$
$$=\frac{1}{2}\rho^2\{f_{xx}(x_0,y_0)\zeta^2+2f_{xy}(x_0,y_0)\zeta\eta+f_{yy}(x_0,y_0)\eta^2+o(1)\}\quad(\rho\to 0),$$

其中 $\zeta=\dfrac{\Delta x}{\rho},\eta=\dfrac{\Delta y}{\rho}$.

由于 $\zeta^2+\eta^2=1$，因此，判断 $f(x_0,y_0)$ 是否极值的问题就转化为判断二次型

$$g(\zeta,\eta)=f_{xx}(x_0,y_0)\zeta^2+2f_{xy}(x_0,y_0)\zeta\eta+f_{yy}(x_0,y_0)\eta^2$$

在单位圆周

$$S=\{(\zeta,\eta)\in\mathbf{R}^2\mid\zeta^2+\eta^2=1\}$$

是否保号的问题.

若这个二次型是正定的,那么 g 在 S 上的最小值(这是一定存在的,请读者考虑一下为什么)满足

$$\min_{(\zeta,\eta)\in S}\{g(\zeta,\eta)\} = m > 0.$$

因此当 $\rho \neq 0$ 且 ρ 充分小时,

$$\begin{aligned}&f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\&=\frac{1}{2}\rho^2\{f_{xx}(x_0,y_0)\zeta^2+2f_{xy}(x_0,y_0)\zeta\eta+f_{yy}(x_0,y_0)\eta^2+o(1)\}\\&\geqslant\frac{1}{2}\rho^2\{m+o(1)\}>0\end{aligned}$$

即 $f(x_0,y_0)$ 为极小值.

类似地,若这个二次型为负定的,那么 $f(x_0,y_0)$ 为极大值.

若这个二次型是不定的,即既可以取正值,也可以取负值,这时候 $f(x_0,y_0)$ 既不是极大值,也不是极小值. 我们用反证法证明这个结论. 假设 $f(x_0,y_0)$ 为极值,例如为极大值. 取 ρ 适当小,那么沿任何过 P_0 点的直线段 $x = x_0 + t\Delta x, y = y_0 + t\Delta y$, $-1 < t < 1$,函数

$$\phi(t) = f(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)$$

在 $t = 0$ 也取极大值. 由一元函数取极值的充分条件,这时候必成立 $\phi''(0) \leqslant 0$(否则 ϕ 在 $t = 0$ 将取极小值). 但易计算

$$\begin{aligned}\phi'(t)&=f_x(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y)\Delta x+f_y(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y)\Delta y,\\\phi''(t)&=f_{xx}(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y)\Delta x^2\\&\quad+2f_{xy}(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y)\Delta x\Delta y\\&\quad+f_{yy}(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y)\Delta y^2.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}0\geqslant\phi''(0)&=f_{xx}(x_0,y_0)\Delta x^2+2f_{xy}(x_0,y_0)\Delta x\Delta y+f_{yy}(x_0,y_0)\Delta y^2\\&=\rho^2\{f_{xx}(x_0,y_0)\Delta\zeta^2+2f_{xy}(x_0,y_0)\Delta\zeta\Delta\eta+f_{yy}(x_0,y_0)\Delta\eta^2\}\end{aligned}$$

这说明上面所说二次型在 $\sqrt{\zeta^2+\eta^2} = 1$ 上总小于或等于零,与假设矛盾,因此 $f(x_0,y_0)$ 不是极值.

综合以上讨论并利用代数学知识,就得到

定理 12.6.2　设 (x_0,y_0) 为 f 的驻点,f 在 (x_0,y_0) 附近具有二阶连续偏导数. 记

$$A = f_{xx}(x_0,y_0),\quad B = f_{xy}(x_0,y_0),\quad C = f_{yy}(x_0,y_0),$$

并记

$$H = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2,$$

那么

(1) 若 $H>0$：$A>0$ 时 $f(x_0,y_0)$ 为极小值；$A<0$ 时 $f(x_0,y_0)$ 为极大值.

(2) 若 $H<0$：$f(x_0,y_0)$ 不是极值.

读者不难举例说明，当 $H=0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 可能是极值，也可能不是极值.

例 12.6.1　求函数 $f(x,y)=xy(a-x-y)(a\neq 0)$ 的极值.

解　先找驻点，即解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = y(a-x-y) - xy = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x(a-x-y) - xy = 0. \end{cases}$$

易得出驻点为$(0,0)$，$(a,0)$，$(0,a)$ 和$\left(\dfrac{a}{3},\dfrac{a}{3}\right)$.

再求二阶偏导数，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = a-2x-2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x.$$

于是得到计算结果

	A	B	C	H
$(0,0)$	0	a	0	$-a^2$
$(a,0)$	0	$-a$	$-2a$	$-a^2$
$(0,a)$	$-2a$	$-a$	0	$-a^2$
$\left(\frac{a}{3},\frac{a}{3}\right)$	$-\frac{2}{3}a$	$-\frac{a}{3}$	$-\frac{2}{3}a$	$\frac{1}{3}a^2$

从表中可以看出，$(0,0)$，$(a,0)$ 和 $(0,a)$ 都不是 f 的极值点. 而在$\left(\dfrac{a}{3},\dfrac{a}{3}\right)$点处，当 $a>0$ 时 $f\left(\dfrac{a}{3},\dfrac{a}{3}\right)=\dfrac{a^3}{27}$ 为极大值；当 $a<0$ 时 $f\left(\dfrac{a}{3},\dfrac{a}{3}\right)=\dfrac{a^3}{27}$ 为极小值.

例 12.6.2　讨论 $f(x,y)=x^2-2xy^2+y^4-y^5$ 的极值.

解　解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y^2 = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -4xy + 4y^3 - 5y^4 - 0. \end{cases}$$

得驻点$(0,0)$.再计算二阶偏导数,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4x + 12y^2 - 20y^3.$$

那么在$(0,0)$处$AC - B^2 = 0$.这时候无法用定理判定.

注意到$f(0,0) = 0$,以及

$$f(x,y) = (x - y^2)^2 - y^5,$$

那么在曲线$x = y^2, y > 0$上$f(x,y) < 0$;在曲线$x = y^2, y < 0$上$f(x,y) > 0$,因此$f(0,0) = 0$不是极值(见图 12.6.3).

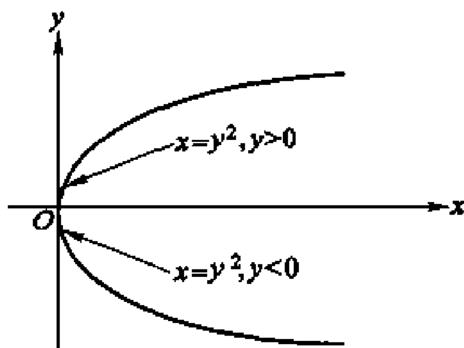


图 12.6.3

对于一般的多元函数,可同样得出

定理 12.6.3　设$f(x)$具有二阶连续偏导数,$\boldsymbol{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$为$f$的驻点.那么当二次型

$$g(\zeta) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\boldsymbol{x}_0)\zeta_i\zeta_j$$

正定时,$f(\boldsymbol{x}_0)$为极小值;当$g(\zeta)$负定时,$f(\boldsymbol{x}_0)$为极大值;当$g(\zeta)$不定时,$f(\boldsymbol{x}_0)$不是极值.

记$a_{ij} = f_{x_i x_j}(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$,并记

$$\boldsymbol{A}_k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix},$$

它称为f的k阶 **Hesse 矩阵**.由代数学知识即可得到

推论　若 $\det \boldsymbol{A}_k > 0, k = 1,2,\cdots,n$，则二次型 $g(\zeta)$ 是正定的，此时 $f(\boldsymbol{x}_0)$ 为极小值；若 $(-1)^k\det \boldsymbol{A}_k > 0, k = 1,2,\cdots n$，则二次型 $g(\zeta)$ 是负定的，此时 $f(\boldsymbol{x}_0)$ 为极大值.

例 12.6.3　设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \mathrm{e}^{-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2}$，讨论它的极值.

解　显然

$$f_{x_i}(x_1,x_2,\cdots,x_n) = -2x_i\mathrm{e}^{-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2},\quad i = 1,2,\cdots,n$$

令

$$f_{x_1} = f_{x_2} = \cdots = f_{x_n} = 0,$$

解得驻点为 $(0,0,\cdots,0)$. 再计算二阶偏导数得

$$f_{x_ix_i}(x_1,x_2,\cdots,x_n) = -2(1-2x_i^2)\mathrm{e}^{-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2},\quad i = 1,2,\cdots,n$$

及

$$f_{x_ix_j}(x_1,x_2,\cdots,x_n) = 4x_ix_j\mathrm{e}^{-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2},\quad i,j = 1,2,\cdots,n,\quad i \neq j.$$

那么

$$f_{x_ix_i}(0,0,\cdots,0) = -2,\quad i = 1,2,\cdots,n.$$

$$f_{x_ix_j}(0,0,\cdots,0) = 0,\quad i,j = 1,2,\cdots,n,\quad i \neq j.$$

因此 f 的 k 阶 Hesse 矩阵为

$$\boldsymbol{A}_k = \begin{pmatrix} -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -2 \end{pmatrix} = -2\boldsymbol{I}_k,$$

其中 $\boldsymbol{I}_k$ 为 k 阶单位矩阵. 于是 $(-1)^k\det \boldsymbol{A}_k = 2^k > 0, k = 1,2,\cdots,n$，因此 $\boldsymbol{A}_n$ 是负定的. 由推论，$f(0,0,\cdots,0) = 1$ 为极大值.

函数的最值

前面已经说过，最值问题是求函数在其定义域内的某个范围的最大值和最小值. 最值点可能在区域内部(此时必是极值点)，也可能在边界上，因此，求函数的最值时，要求出它在区域内部的所有极值以及在边界上的最值，再加以比较，从中找出 f 在整个区域上的最值.

例 12.6.4　在以 $O(0,0)$，$A(1,0)$ 和 $B(0,1)$ 为顶点的三角形所围成的闭区域上找点，使它们到三个顶点的距离的平方和最大或最小，并求出相应的最大值和最小值.

解　设 $\triangle ABO$ 上的一点为 $P(x,y)$，那么它到 O,A,B 三点的距离的平方和为

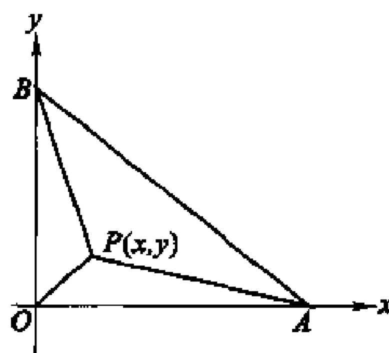


图 12.6.4

$$
\begin{aligned}
z &= x^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 + x^2 + (y-1)^2 \\
&= 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2.
\end{aligned}
$$

我们先求 z 在 $\triangle ABO$ 内部的驻点.解方程组

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial z}{\partial x} = 6x - 2 = 0, \\
\dfrac{\partial z}{\partial y} = 6y - 2 = 0.
\end{cases}
$$

得驻点$\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$.由于$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6,\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0,\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6$,因此 $H = AC - B^2 = 36 > 0, A = 6 > 0$,于是 $z\Big|_{\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)} = \dfrac{4}{3}$ 是极小值.

再讨论此函数在区域边界上的最大值与最小值.

在 OA 边上,$y = 0$,因此 $z = 3x^2 - 2x + 2, 0 \leqslant x \leqslant 1$.这个函数在区间 $[0,1]$ 的端点 $x = 1$ 处(即 A 点)达到最大值 3,在 $x = \dfrac{1}{3}$ 处达到最小值$\dfrac{5}{3}$.

在 OB 边上,$x = 0$,因此 $z = 3y^2 - 2y + 2, 0 \leqslant y \leqslant 1$.这个函数在区间 $[0,1]$ 的端点 $y = 1$ 处(即 B 点)达到最大值 3,在 $y = \dfrac{1}{3}$ 处达到最小值$\dfrac{5}{3}$.

在 AB 边上,$x + y = 1$,故有 $z = 6x^2 - 6x + 3, 0 \leqslant x \leqslant 1$.这个函数在区间$[0,1]$的端点 $x = 0$ 和 $x = 1$ 处(即 A 点和B 点)达到最大值3,在 $x = \dfrac{1}{2}$ 处达到最小值$\dfrac{3}{2}$.

综上所述,A、B 两点到 $\triangle ABO$ 的三个顶点的距离的平方和最大,且最大值为 3.而$\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$点到三个顶点的距离的平方和最小,且最小值为$\dfrac{4}{3}$.

事实上$\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$点就是这个三角形的三条中线的交点,即重心.读者可以

证明更一般的结论:三角形的重心到它的三个顶点的距离的平方和最小.

计算函数在区域的边界上的最值有时较为复杂.在实际问题中,往往可以根据问题的性质,判定函数的最值在区域内部.此时,若偏导数处处存在,只要比较函数在驻点的值就能得到最值.特别地,如果函数在区域内只有一个驻点,就可以断定,这就是函数的最值点.

例 12.6.5 有一宽为 24 cm 的长方形铁板,把它两边折起来,做成一个横截面为等腰梯形的水槽.问用怎样的折法,才能使梯形的截面积最大.

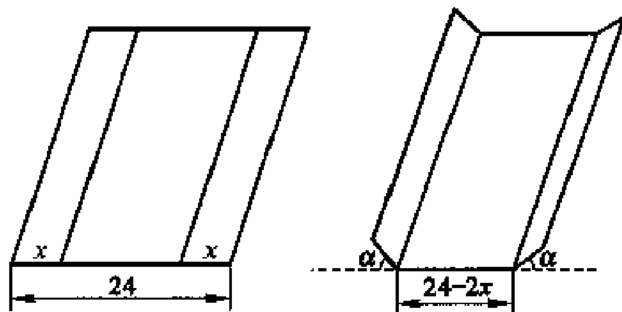


图 12.6.5

解 设折起来的边长为 x cm,折角为 α(如图 12.6.5),那么梯形的横截面的面积为

$$A(x,\alpha)=\frac{1}{2}[(24-2x)+(24-2x)+2x\cos\alpha]x\sin\alpha$$
$$=24x\sin\alpha-2x^2\sin\alpha+x^2\sin\alpha\cos\alpha.$$

依题意,其定义域为 $D=\{(x,\alpha)\mid 0\leqslant x\leqslant 12,0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}\}$.由于

$$\frac{\partial A}{\partial x}=24\sin\alpha-4x\sin\alpha+2x\sin\alpha\cos\alpha=2\sin\alpha(12-2x+x\cos\alpha),$$

$$\frac{\partial A}{\partial\alpha}=24x\cos\alpha-2x^2\cos\alpha+x^2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$$
$$=24x\cos\alpha-2x^2\cos\alpha+x^2(2\cos^2\alpha-1).$$

令 $\frac{\partial A}{\partial x}=0,\frac{\partial A}{\partial\alpha}=0$ 得方程组

$$\begin{cases}2\sin\alpha(12-2x+x\cos\alpha)=0,\\ x[24\cos\alpha-2x\cos\alpha+x(2\cos^2\alpha-1)]=0.\end{cases}$$

我们求在 D 内部的驻点.这时 $x\neq 0,\alpha\neq 0$,上面的方程就化为

$$\begin{cases}12-2x+x\cos\alpha=0,\\ 24\cos\alpha-2x\cos\alpha+x(2\cos^2\alpha-1)=0.\end{cases}$$

解此方程组得 $x - 8, \alpha = \frac{\pi}{3}$，即 A 在 D 内的驻点为 $\left(8, \frac{\pi}{3}\right)$.

由实际背景，截面面积的最大值一定存在，且不在边界达到. 现在面积函数 A 在 D 内只有一个驻点 $\left(8, \frac{\pi}{3}\right)$，因此它必为最大值点. 这样，立即得到截面面积的最大值为

$$A\left(8, \frac{\pi}{3}\right) = 48\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2.$$

例 12.6.6 证明：

$$f(x,y) = yx^y(1-x) < \mathrm{e}^{-1}, \quad 0 < x < 1, 0 < y < +\infty.$$

证 只要证明 $f(x,y)$ 在区域 $0 < x < 1, 0 < y < +\infty$ 上的最大值小于 e^{-1} 即可.

显然 $f(x,y)$ 在区域 $0 < x < 1, 0 < y < +\infty$ 的边界上恒为 0，而在区域内部满足 $f(x,y) > 0$. 由于 $\lim\limits_{y \to +\infty} f(x,y) = 0$，因此它的最大值只能在区域内部达到. 这就化为极值问题.

我们求在区域内部的驻点. 令 $f_x = f_y = 0$ 得方程组

$$\begin{cases} f_x = yx^{y-1}(y - xy - x) = 0, \\ f_y = x^y(1-x)(1 + y\ln x) = 0. \end{cases}$$

由于 $0 < x < 1$ 以及 $y < 0$，那么从以上方程组得

$$\begin{cases} y - xy - x = 0 \\ 1 + y\ln x = 0. \end{cases}$$

由于 f 在区域 $0 < x < 1, 0 < y < +\infty$ 内的最大值必是极大值，因此最大值点必满足上面的方程组. 从而这时成立

$$y(1-x) = x, \quad x^y = \mathrm{e}^{-1}.$$

在这样的点上

$$f(x,y) = yx^y(1-x) = x\mathrm{e}^{-1} < \mathrm{e}^{-1}.$$

即 $f(x,y)$ 在区域 $0 < x < 1, 0 < y < +\infty$ 上的最大值小于 e^{-1}.

最小二乘法

先看一个实际例子.

通过观察知道，红铃虫的产卵数与温度有关，下面是一组实验观察值：

表 12.6.1

温度	21	23	25	27	29	32	35
产卵数	7	11	21	24	66	105	325

将这批数据在直角坐标上描成点，就是图 12.6.6，这种图形称为散点图.

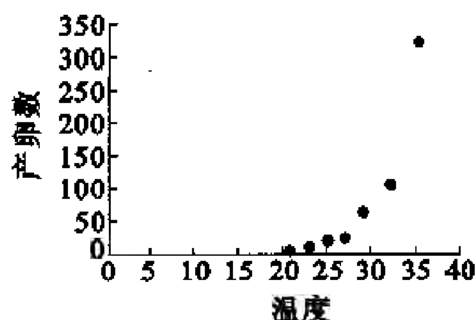


图 12.6.6

看起来两者呈指数关系,因此可设产卵数 y 与温度 x 的关系为

$$y = \beta e^{\alpha x}.$$

我们的任务是具体确定常数 α,β.

上式两边取对数,令 $z = \ln y, a = \alpha, b = \ln \beta$,则原式变成了线性关系

$$z = ax + b,$$

而原来的表格变为表 12.6.2,散点图变为图 12.6.7.

表 12.6.2

x	21	23	25	27	29	32	35
$z = \ln y$	1.945910	2.397895	3.044522	3.178053	4.189654	4.653960	5.783825

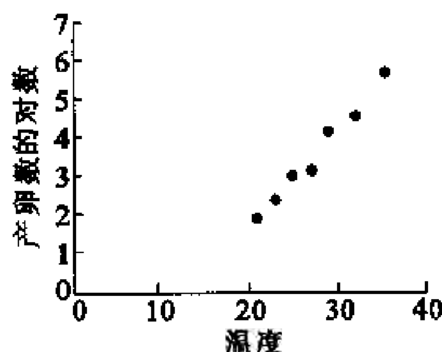


图 12.6.7

于是,问题化为找一直线 $y = ax + b$(即找 a, b),使得表 12.6.2 中的数据基本满足这个函数关系.

这个问题的一般提法是:已知一组实验数据

x	x_1	x_2	x_3	…	x_n
y	y_1	y_2	y_3	…	y_n

大致满足线性关系,确定直线 $y = ax + b$,使得所有观测值 y_i 与函数值 $ax_i +$

b 之偏差的平方和

$$Q = \sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2$$

最小.这种方法叫做**最小二乘法**,$y = ax + b$ 视为变量 y 与 x 之间的近似函数关系,称为这组数据在最小二乘意义下的**拟合曲线**(实践中常称为经验公式).

确定常数 a, b 用的就是二元函数求极值的方法.显然 Q 是 a, b 的函数,令

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)x_i = 2a\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i + 2b\sum_{i=1}^{n}x_i = 0,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b) = 2a\sum_{i=1}^{n}x_i - 2\sum_{i=1}^{n}y_i + 2nb = 0,$$

就得到线性方程组

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{n}x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_i & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n}y_i \end{pmatrix}.$$

解这个方程组,得到

$$a = \frac{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i - \sum\limits_{i=1}^{n}x_i\sum\limits_{i=1}^{n}y_i}{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2},$$

$$b = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\sum\limits_{i=1}^{n}y_i - \sum\limits_{i=1}^{n}x_i\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i}{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2}$$

现在解决本段开始提出的问题.从表 12.6.1 可得下表:

i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	21	23	25	27	29	32	35
y_i	1.945 910	2.397 895	3.044 522	3.178 053	4.189 654	4.653 960	5.783 825

经计算得:

$\sum\limits_{i=1}^{7}x_i$	$\sum\limits_{i=1}^{7}x_i^2$	$\sum\limits_{i=1}^{7}x_iy_i$	$\sum\limits_{i=1}^{7}y_i$	a	b	e^b
192	5 414	730.796 8	25.193 82	0.269 210	-3.784 948	0.022 710

于是,表 12.6.2 的拟合直线方程为

$$y = 0.269\,21x - 3.784\,948,$$

红铃虫的产卵数与温度的关系为

$$z = 0.022\,71\mathrm{e}^{0.269\,21x},$$

相应的拟合曲线见图 12.6.8 和图 12.6.9.

最小二乘法广泛用于实际生活中,物理学、化学、生物学、医学、经济学、商业统计等方面都要用到它来计算经验公式.在数学上,数理统计中的回归分析方法就要用到这个工具.熟悉计算机的读者会发现,许多计算机软件也是用这种方法来作出拟合曲线的.

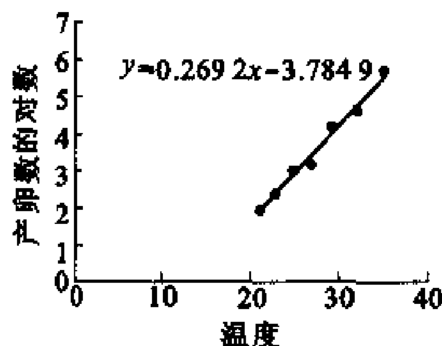


图 12.6.8

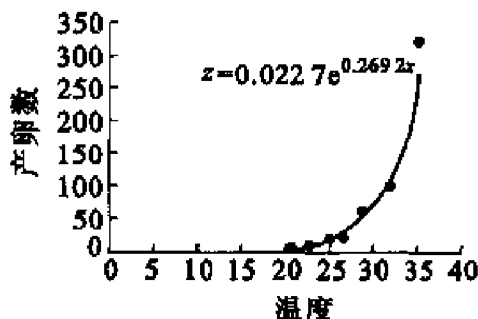


图 12.6.9

习　　题

1. 讨论下列函数的极值:

(1) $f(x,y) = x^4 + 2y^4 - 2x^2 - 12y^2 + 6$;

(2) $f(x,y) = xy + \dfrac{a^3}{x} + \dfrac{b^3}{y}$,其中常数 $a > 0, b > 0$;

(3) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$;

(4) $f(x,y) = (y - x^2)(y - x^4)$.

2. 设 $f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 2xy + 2xz$,证明函数 f 的最小值为 0.

3. 证明函数 $f(x,y) = (1+\mathrm{e}^y)\cos x - y\mathrm{e}^y$ 有无穷多个极大值点,但无极小值点.

4. 求函数 $f(x,y) = \sin x + \sin y - \sin(x+y)$ 在闭区域

$$D = \{(x,y) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \leqslant 2\pi\}$$

上的最大值与最小值.

5. 在[0,1]上用怎样的直线 $\zeta = ax + b$ 来代替曲线 $y = x^2$,才能使它在平方误差的积分

$$J(a,b) = \int_0^1 (y - \zeta)^2 \mathrm{d}\,x$$

为极小意义下的最佳近似.

6. 在半径为 R 的圆上，求内接三角形的面积最大者.

7. 要做一圆柱形帐幕，并给它加一个圆锥形的顶. 问：在体积为定值时，圆柱的半径 R，高 H，及圆锥的高 h 满足什么关系时，所用的布料最省？

8. 证明当 $x \geqslant 1, y \geqslant 0$ 时，不等式

$$xy \leqslant x\ln x - x + e^y$$

成立.

计算实习题

（在教师的指导下，编制程序在电子计算机上实际计算）

1. 某种机器零件的加工需经两道工序，x 表示零件在第一道工序中出现的疵点数（疵点指气泡、砂眼、裂痕等），y 表示在第二道工序中出现的疵点数. 某日测得 8 个零件的 x 与 y 如下：

x	0	1	3	6	8	5	4	2
y	1	2	2	4	4	3	3	2

画出这些数据的散点图，找出它们之间关系的经验公式 $y = ax + b$，并画出拟合曲线.

2. 某品种大豆的脂肪含量 x(%) 与蛋白质含量 y(%) 的测定结果如下表所示：

x	16.5	17.5	18.5	19.5	20.5	21.5	22.5	23.5	24.5
y	43.5	42.6	41.8	40.6	40.3	38.7	37.2	36.0	34.0

画出这些数据的散点图，找出它们之间关系的经验公式，并画出拟合曲线.

3. 某种产品加工前的含水率(%) 与加工后含水率(%) 的测试结果如下表：

测试编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
加工前的含水率 x_i	16.7	18.2	18.0	17.9	17.4	16.6	17.2	17.7	15.7	17.1
加工后的含水率 y_i	17.5	18.7	18.6	18.5	18.2	17.5	18.0	18.2	16.9	17.8

试确定加工后的含水率 y 与加工前含水率 x 的关系.

4. 盛钢水的钢包，在使用过程中由于钢水对耐火材料的浸蚀，容积会不断增大. 在生产过程中，积累了使用次数与钢包容积增大之间的以下 16 组数据. 画出这些数据的散点图，找出使用次数 x 与钢包容积增大 y 之间的关系，并画出拟合曲线.

x	2	3	4	5	6	7	8	9
y	6.42	8.20	9.58	9.50	9.70	10.00	9.93	9.99
x	10	11	12	13	14	15	16	17
y	10.50	10.59	10.60	10.63	10.60	10.90	10.76	10.80

(提示:假设 $y = ax^2 + bx + c$.)

5. 在研究化学反应速度时,得到下列数据. 找出实验开始后的时间 t 与反应物的量 m 之间的关系,并画出拟合曲线.

t	3	6	9	12	15	18	21	24
m	57.6	41.5	31.2	22.9	15.4	12.1	8.9	6.4

(提示:m 与 t 的关系为 $m = ae^{bt}$.)

§7 条件极值问题与 Lagrange 乘数法

Lagrange 乘数法

在考虑函数的极值或最值问题时,经常需要对函数的自变量附加一定的条件. 例如,求原点到直线

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x + 2y + 3z = 6 \end{cases}$$

的距离,就是在限制条件 $x + y + z = 1$ 和 $x + 2y + 3z = 6$ 下,计算函数 $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 的最小值. 这就是所谓的**条件极值**问题.

以三元函数为例,条件极值问题的提法是:求**目标函数**

$$f(x,y,z)$$

在约束条件

$$\begin{cases} G(x,y,z) = 0, \\ H(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

下的极值.

在本节中假定 Jacobi 矩阵

$$J = \begin{pmatrix} G_x & G_y & G_z \\ H_x & H_y & H_z \end{pmatrix}$$

是满秩的,即 rank $J = 2$.

先考虑取到条件极值的必要条件. 上述约束条件实际上是空间曲线的方程. 设曲线上一点 (x_0,y_0,z_0) 为条件极值点,由于 rank $J = 2$,不妨假设在 (x_0,y_0,z_0) 点 $\dfrac{\partial(G,H)}{\partial(y,z)} \neq 0$,则由隐函数存在定理,在 (x_0,y_0,z_0) 附近由该

方程可以唯一确定

$$y = y(x),\quad z = z(x),\quad x \in O(x_0,\rho)\quad (y_0 = y(x_0), z_0 = z(x_0)).$$

它是这个曲线方程的参数形式.

将它们代入目标函数,原问题就转化为函数

$$\Phi(x) = f(x, y(x), z(x)),\quad x \in O(x_0,\rho)$$

的无条件极值问题,x_0 是函数 $\Phi(x)$ 的极值点,因此 $\Phi'(x_0) = 0$,即

$$f_x(x_0,y_0,z_0) + f_y(x_0,y_0,z_0)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + f_z(x_0,y_0,z_0)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0.$$

这说明向量

$$\operatorname{grad} f(x_0,y_0,z_0) = f_x(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{i} + f_y(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{j} + f_z(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{k}$$

与向量 $\boldsymbol{\tau} = \left(1, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)$,即曲线在 (x_0,y_0,z_0) 点的切向量正交,因此 $\operatorname{grad} f(x_0,y_0,z_0)$ 是曲线在 (x_0,y_0,z_0) 点处的法平面上的向量. 由定理 12.5.1,这个法平面是由 $\operatorname{grad} G(x_0,y_0,z_0)$ 与 $\operatorname{grad} H(x_0,y_0,z_0)$ 张成的,因此 $\operatorname{grad} f(x_0,y_0,z_0)$ 可以由 $\operatorname{grad} G(x_0,y_0,z_0)$ 和 $\operatorname{grad} H(x_0,y_0,z_0)$ 线性表出,或者说,存在常数 λ_0, μ_0 使得

$$\operatorname{grad} f(x_0,y_0,z_0) = \lambda_0 \operatorname{grad} G(x_0,y_0,z_0) + \mu_0 \operatorname{grad} H(x_0,y_0,z_0),$$

这就是点 (x_0,y_0,z_0) 为条件极值点的必要条件.

将这个方程按分量写开就是

$$\begin{cases} f_x(x_0,y_0,z_0) - \lambda_0 G_x(x_0,y_0,z_0) - \mu_0 H_x(x_0,y_0,z_0) = 0, \\ f_y(x_0,y_0,z_0) - \lambda_0 G_y(x_0,y_0,z_0) - \mu_0 H_y(x_0,y_0,z_0) = 0, \\ f_z(x_0,y_0,z_0) - \lambda_0 G_z(x_0,y_0,z_0) - \mu_0 H_z(x_0,y_0,z_0) = 0. \end{cases}$$

那么,如果我们构造 **Lagrange 函数**

$$L(x,y,z) = f(x,y,z) - \lambda G(x,y,z) - \mu H(x,y,z)$$

(λ, μ 称为 **Lagrange 乘数**),则条件极值点就在方程组

$$\begin{cases} L_x = f_x - \lambda G_x - \mu H_x = 0, \\ L_y = f_y - \lambda G_y - \mu H_y = 0, \\ L_z = f_z - \lambda G_z - \mu H_z = 0, \\ G = 0, \\ H = 0 \end{cases}$$

的所有解 $(x_0,y_0,z_0,\lambda_0,\mu_0)$ 所对应的 (x_0,y_0,z_0) 中. 用这种方法来求可能的条件极值点的方法,称为 **Lagrange 乘数法**.

作为一个例子,现在用 Lagrange 乘数法来解决本节开始提出的问题,即函数

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

在约束条件

$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ x+2y+3z=6 \end{cases}$$

下的最小值(最小值的平方根就是距离).为此,作 Lagrange 函数

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2-\lambda(x+y+z-1) \\ -\mu(x+2y+3z-6),$$

从方程组

$$\begin{cases} L_x=2x-\lambda-\mu=0, \\ L_y=2y-\lambda-2\mu=0, \\ L_z=2z-\lambda-3\mu=0, \\ x+y+z-1=0, \\ x+2y+3z-6=0. \end{cases}$$

把第一、第二和第三式相加,再利用第四式得

$$3\lambda+6\mu=2.$$

把第一、第二式的两倍和第三式的三倍相加,再利用第五式得

$$6\lambda+14\mu=12.$$

从以上两个方程解得

$$\lambda=-\frac{22}{3},\mu=4,$$

此时可得唯一的可能极值点 $x=-\frac{5}{3},y=\frac{1}{3},z=\frac{7}{3}$.

由于点到直线的距离,即这个问题的最小值必存在,因此这个唯一的可能极值点 $\left(-\frac{5}{3},\frac{1}{3},\frac{7}{3}\right)$ 必是最小值点,也就是说,原点到直线 $\begin{cases} x+y+z=1, \\ x+2y+3z=6 \end{cases}$ 的距离为 $\sqrt{F\left(-\frac{5}{3},\frac{1}{3},\frac{10}{3}\right)}=\sqrt{\frac{25}{3}}=\frac{5}{\sqrt{3}}$.

一般地,考虑目标函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在 m 个约束条件

$$g_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0,\quad i=1,2,\cdots,m;m<n$$

下的极值,这里 $f,g_i,i=1,2,\cdots,m$ 具有连续偏导数,且 Jacobi 矩阵

$$J=\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

为满秩的，即 rank $J = m$. 那么我们有类似的下述结论：

定理 12.7.1（条件极值的必要条件） *若点 $\boldsymbol{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ 为函数 $f(\boldsymbol{x}_0)$ 满足约束条件的极值点，则必存在 m 个常数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$，使得在 $\boldsymbol{x}_0$ 点成立*

$$\mathrm{grad} f = \lambda_1 \mathrm{grad} g_1 + \lambda_2 \mathrm{grad} g_2 + \cdots + \lambda_m \mathrm{grad} g_m.$$

于是可以将 Lagrange 乘数法推广过去. 同样地构造 Lagrange 函数

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

那么条件极值点就在方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_k} = \dfrac{\partial f}{\partial x_k} - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_k} = 0, \\ g_l = 0, \end{cases} \quad k = 1, 2, \cdots, n; l = 1, 2, \cdots, m$$

的所有解 $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m)$ 所对应的点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 中.

判断如上所得的点是否极值点需要一些特殊的方法. 但在实际问题中往往遇到的是求最值问题，这时可以根据问题本身的性质判定最值的存在性. 这样，只要把如上所得的点的函数值加以比较，最大的（最小的）就是所考虑问题的最大值（最小值）.

例 12.7.1 要制造一个容积为 a m³ 的无盖长方形水箱，问这个水箱的长、宽、高为多少米时，用料最省？

解 设水箱的长为 x、宽为 y、高为 z（单位：m），那么问题实际上要求的是，在水箱容积

$$xyz = a$$

的约束条件下，求水箱表面积

$$S(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$$

的最小值.

作 Lagrange 函数

$$L(x, y, z, \lambda) = xy + 2xz + 2yz - \lambda(xyz - a),$$

从方程组

$$\begin{cases} L_x = y + 2z - \lambda yz = 0, \\ L_y = x + 2z - \lambda xz = 0, \\ L_z = 2x + 2y - \lambda xy = 0, \\ xyz - a = 0 \end{cases}$$

得到唯一解

$$x=\sqrt[3]{2a},\quad y=\sqrt[3]{2a},\quad z=\frac{\sqrt[3]{2a}}{2}.$$

由于问题的最小值必定存在，因此它就是最小值点. 也就是说，水箱的底为边长为$\sqrt[3]{2a}$ m 的正方形，高为$\sqrt[3]{2a}/2$ m 时，用料最省.

例 12.7.2　求平面

$$x+y+z=0$$

与椭球面

$$x^2+y^2+4z^2=1$$

相交成的椭圆的面积.

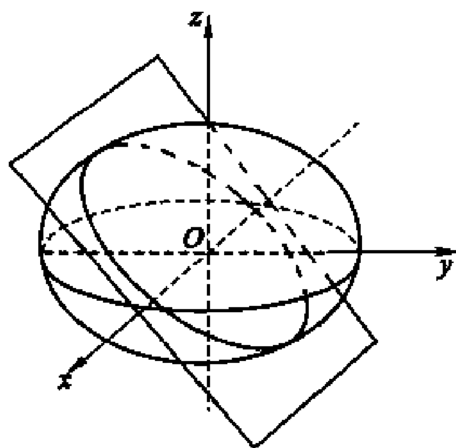


图 12.7.1

解　椭圆的面积为 πab，其中 a,b 分别为椭圆的两个半轴. 因为椭圆的中心在原点，所以 a,b 分别是椭圆上的点到原点的最大距离与最小距离.

于是，可以将问题表述为，求

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$

在约束条件

$$\begin{cases}x+y+z=0,\\ x^2+y^2+4z^2=1\end{cases}$$

下的最大值与最小值.

作 Lagrange 函数

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2-\lambda(x+y+z)-\mu(x^2+y^2+4z^2-1),$$

得到相应的方程组

$$\begin{cases} L_x = 2(1-\mu)x - \lambda = 0, \\ L_y = 2(1-\mu)y - \lambda = 0, \\ L_z = 2(1-4\mu)z - \lambda = 0, \\ x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + 4z^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

解法一 将方程 $L_x = 0$ 乘以 $1-4\mu$、方程 $L_y = 0$ 乘以 $1-4\mu$、方程 $L_z = 0$ 乘以 $1-\mu$ 后相加,得

$$3\lambda(1-3\mu) = 0.$$

因此 $\lambda = 0$ 或 $1 - 3\mu = 0$.

分两种情况讨论:

(1) 当 $\lambda = 0$ 时,将以上方程组的前三个式子相加得

$$6\mu z = 0.$$

但此时 $\mu \neq 0$(否则从 $\lambda = 0, \mu = 0$ 得到 $x = y = z = 0$,这不是椭圆上的点),因此 $z = 0$. 代入方程组 $x + y + z = 0, x^2 + y^2 + 4z^2 - 1 = 0$ 就得 (x,y,z) 的两组解

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) 与 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right),$$

f 在这两个点的值都是 1.

(2) 当 $1 - 3\mu = 0$ 时,从方程组的前三个式子得

$$x = \frac{3}{4}\lambda, \quad y = \frac{3}{4}\lambda, \quad z = -\frac{3}{2}\lambda.$$

代入 $L_x = x^2 + y^2 + 4z^2 - 1 = 0$ 得 $\lambda = \pm\frac{2\sqrt{2}}{9}$. 它对应 (x,y,z) 的两组解为

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{\sqrt{2}}{3}\right) 和 \left(-\frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right).$$

f 在这两个点的值都是 $\frac{1}{3}$.

由于椭圆的长轴与短轴必存在,因此 f 在椭圆 $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + 4z^2 = 1 \end{cases}$ 上的最大值与最小值必存在,于是立即得到该椭圆的半长轴为 1,半短轴为 $\frac{1}{\sqrt{3}}$,面积为 $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

解法二 将方程 $L_x = 0$ 乘以 x、方程 $L_y = 0$ 乘以 y、方程 $L_z = 0$ 乘以 z 后相加,再利用 $x + y + z = 0$ 和 $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$ 得

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = \mu.$$

这说明椭圆的长、短轴的平方包含在方程组关于 μ 的解中,所以问题转化为求 μ 的值.

如解法一得到 $3\lambda(1-3\mu)=0$,也分两种情况:

(1) 当 $1-3\mu=0$ 时,得 $\mu=\frac{1}{3}$.

(2) 当 $\lambda=0$ 时,原方程组就是

$$\begin{cases}(1-\mu)x=0,\\(1-\mu)y=0,\\(1-4\mu)z=0,\\x+y+z=0,\\x^2+y^2+4z^2-1=0.\end{cases}$$

此时 $\mu=1$(否则从以上方程组的第一、第二和第四个方程得到 $x=y=z=0$,这不是椭圆上的点).

于是同样得到,该椭圆的半长轴为 1,半短轴为$\frac{1}{\sqrt{3}}$,面积为$\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

许多实际问题并不需要完全解出方程组来求得最值,解法二是一种常用的方法,可以使解决问题的方法与计算简单化.

例 12.7.3 求函数 $f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$ 在闭区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$ 上的最大值和最小值.这里假定 $b^2-ac<0;a,b,c>0$.

解 首先考察函数 f 在 D 的内部 $\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$ 中的极值点,这是无条件极值问题.为此解线性方程组

$$\begin{cases}f_x=2ax+2by=0,\\f_y=2bx+2cy=0.\end{cases}$$

由假设 $b^2-ac<0$ 知方程组的系数行列式不等于零,因此只有零解 $x=0,y=0$,即$(0,0)$点是驻点.易计算在$(0,0)$点

$$f_{xx}=2a,\quad f_{xy}=2b,\quad f_{yy}=2c,$$

因此 $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=4(ac-b^2)>0$.而 $f_{xx}>0$,所以$(0,0)$点是函数 f 的极小值点,极小值为 $f(0,0)=0$.

再考察函数 f 在 D 的边界 $\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$ 上的极值.这是条件极值问题,为此作 Lagrange 函数

$$L(x,y,\lambda)=ax^2+2bxy+cy^2-\lambda(x^2+y^2-1),$$

并得方程组

$$\begin{cases}(a-\lambda)x+by=0,\\bx+(c-\lambda)y=0,\\x^2+y^2-1=0.\end{cases}$$

将第一式乘以 x、第二式乘 y 以后相加,再用第三式代入就得到

$$f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2=\lambda(x^2+y^2)=\lambda.$$

下面来求 λ 的值.由联立方程组中的 $x^2+y^2-1=0$ 可以知道,二元一次方程组 $\begin{cases}(a-\lambda)x+by=0,\\ bx+(c-\lambda)y=0\end{cases}$ 有非零解,因此系数行列式等于零,即

$$\lambda^2-(a+c)\lambda+ac-b^2=0.$$

解这个关于 λ 的方程得

$$\lambda=\frac{1}{2}\left[(a+c)\pm\sqrt{(a+c)^2-4(ac-b^2)}\right].$$

(注意根号中 $(a+c)^2-4(ac-b^2)=(a-c)^2+4b^2>0$.)

由于连续函数 f 在紧集 $\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$ 上必可取到最大值与最小值,因此 f 在 D 的边界上的最大值为

$$\lambda_1=\frac{1}{2}\left[(a+c)+\sqrt{(a+c)^2-4(ac-b^2)}\right];$$

最小值为

$$\lambda_2=\frac{1}{2}\left[(a+c)-\sqrt{(a+c)^2-4(ac-b^2)}\right].$$

与 f 在 D 的内部的极值 $f(0,0)=0$ 比较,就得到 f 在 D 上的最大值为

$$\max\{\lambda_1,0\}=\frac{1}{2}\left[(a+c)+\sqrt{(a+c)^2-4(ac-b^2)}\right];$$

最小值为

$$\min\{\lambda_2,0\}=0.$$

例 12.7.4 设 $a>0,a_i>0,i=1,2,\cdots,n$.求 n 元函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}$$

在约束条件 $x_1+x_2+\cdots+x_n=a(x_i>0,i=1,2,\cdots,n)$ 下的极值.

解 作辅助函数

$$\begin{aligned}g(x_1,x_2,\cdots,x_n)&=\ln f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\&=a_1\ln x_1+a_2\ln x_2+\cdots+a_n\ln x_n,\end{aligned}$$

因为函数 $\ln u$ 严格单调,所以只要考虑函数 g 的极值就可以得到 f 的极值.

作 Lagrange 函数

$$L=a_1\ln x_1+a_2\ln x_2+\cdots+a_n\ln x_n-\lambda(x_1+x_2+\cdots+x_n-a).$$

由极值的必要条件得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x_i}=\dfrac{a_i}{x_i}-\lambda=0,i=1,2,\cdots,n,\\ x_1+x_2+\cdots+x_n=a.\end{cases}$$

由前 n 个方程得 $x_i = \frac{a_i}{\lambda}, i = 1,2,\cdots,n$. 再代入最后一个方程得

$$\lambda = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{a},$$

于是

$$x_i = \frac{aa_i}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}, \quad i = 1,2,\cdots,n.$$

这是函数 f 唯一的可能极值点. 由问题本身可知 f 有极大值, 因此 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 必为 f 的极大值点, 即最大值点, 最大值为

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{aa_i}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}\right)^{a_i} = a_1^{a_1}a_2^{a_2}\cdots a_n^{a_n}\left(\frac{a}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}\right)^{a_1+a_2+\cdots+a_n}.$$

特别地当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$ 及 $a = 1$ 时, f 的最大值为 $\left(\frac{1}{n}\right)^n$, 即当 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$ 及 $x_i > 0, i = 1,2,\cdots,n$ 时成立

$$x_1x_2\cdots x_n \leqslant \left(\frac{1}{n}\right)^n.$$

对于任意正数 $y_1, y_2, \cdots, y_n$, 只要令

$$x_i = \frac{y_i}{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}, \quad i = 1,2,\cdots,n,$$

就得到

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{y_i}{y_1 + y_2 + \cdots + y_n} \leqslant \left(\frac{1}{n}\right)^n,$$

即

$$\sqrt[n]{y_1y_2\cdots y_n} \leqslant \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}.$$

这是熟知的平均值不等式.

一个最优价格模型

在生产和销售商品的过程中, 显然, 销售价格上涨将使厂家在单位商品上获得的利润增加, 但同时也使消费者的购买欲望下降, 造成销售量下降, 导致厂家削减产量. 但在规模生产中, 单位商品的生产成本是随着产量的增加而降低的, 因此销售量、成本与售价是相互影响的. 厂家要选择合理的销售价格才能获得最大利润, 这个价格称为**最优价格**.

例如, 一家电视机厂在对某种型号电视机的销售价格决策时面对如下数据:

(1) 根据市场调查, 当地对该种电视机的年需求量为 100 万台.

(2) 去年该厂共售出 10 万台, 每台售价为 4 000 元.

(3) 仅生产 1 台电视机的成本为 4 000 元,但在批量生产后,生产 1 万台时成本降低为每台 3 000 元.

问:在生产方式不变的情况下,今年的最优销售价格是多少.

下面来建立一个一般的数学模型.设这种电视机的总销售量为 x,每台生产成本为 c,销售价格为 v,那么厂家的利润为

$$u(c,v,x)=(v-c)x.$$

根据市场预测,销售量与销售价格之间有下面的关系:

$$x=Me^{-\alpha v},\quad M>0,\alpha>0,$$

这里 M 为市场的最大需求量,α 是价格系数(这个公式也反映出,售价越高,销售量越少).同时,生产部门对每台电视机的成本有如下测算:

$$c=c_0-k\ln x,\quad c_0,k,x>0,$$

这里 c_0 是只生产 1 台电视机时的成本,k 是规模系数(这也反映出,产量越大即销售量越大,成本越低).

于是,问题化为求利润函数

$$u(c,v,x)=(v-c)x$$

在约束条件

$$\begin{cases}x=Me^{-\alpha v},\\ c=c_0-k\ln x\end{cases}$$

下的极值问题.

作 Lagrange 函数

$$L(c,v,x,\lambda,\mu)=(v-c)x-\lambda(x-Me^{-\alpha v})-\mu(c-c_0+k\ln x),$$

就得到最优化条件

$$\begin{cases}L_c=-x-\mu=0,\\ L_v=x-\lambda M\alpha e^{-\alpha v}=0,\\ L_x=v-c-\lambda-\mu\dfrac{k}{x}=0,\\ x-Me^{-\alpha v}=0,\\ c-c_0+k\ln x=0.\end{cases}$$

由第二和第四个方程得

$$\lambda\alpha=1,\text{即 }\lambda=\frac{1}{\alpha}.$$

将第四个方程代入第五个方程得

$$c=c_0-k(\ln M-\alpha v),$$

再由第一个方程知

$$\mu=-x,$$

将所得的这三个式子代入 $L_x = 0$ 得

$$v - (c_0 - k(\ln M - \alpha v)) - \frac{1}{\alpha} + k = 0,$$

由此解得最优价格为

$$v^* = \frac{c_0 - k\ln M + \frac{1}{\alpha} - k}{1 - \alpha k}.$$

只要确定了规模系数 k 与价格系数 α,问题就迎刃而解了.

现在利用这个模型解决本段开始提出的问题.此时 $M = 1\,000\,000, c_0 = 4\,000$.由于去年该厂共售出10万台,每台售价为4 000元,因此得

$$\alpha = \frac{\ln M - \ln x}{v} = \frac{\ln 1\,000\,000 - \ln 100\,000}{4\,000} = 0.000\,58;$$

又由于生产1万台时成本就降低为每台3 000元,因此得

$$k = \frac{c_0 - c}{\ln x} = \frac{4\,000 - 3\,000}{\ln 10\,000} = 108.57.$$

将这些数据代入 v^* 的表达式,得到今年的最优价格应为

$$v^* = \frac{4\,000 - 108.57\ln 1\,000\,000 + \frac{1}{0.000\,58} - 108.57}{1 - 0.000\,58 \times 108.57} \approx 4\,392(\text{元}/\text{台}).$$

习　　题

1.求下列函数的条件极值:

(1) $f(x,y) = xy$,约束条件为 $x + y = 1$;

(2) $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$,约束条件为 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

(3) $f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$,约束条件为 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ Ax + By + Cz = 0. \end{cases}$ 其中 $a > b > c > 0, A^2 + B^2 + C^2 = 1$.

2.在周长为 $2p$ 的一切三角形中,找出面积最大的三角形.

3.要做一个容积为1 m^3 的有盖铝圆桶,什么样的尺寸才能使用料最省?

4.抛物面 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $x + y + z = 1$ 截成一椭圆,求原点到这个椭圆的最长距离与最短距离.

5.求椭圆 $x^2 + 3y^2 = 12$ 的内接等腰三角形,其底边平行于椭圆的长轴,面使面积最大.

6.求空间一点 (a,b,c) 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离.

7.当 $x > 0, y > 0, z > 0$ 时,求函数

$$f(x,y,z) = \ln x + 2\ln y + 3\ln z$$

在球面 $x^2+y^2+z^2=6R^2$ 上的极大值. 并由此证明:当 a,b,c 为正实数时,成立不等式

$$ab^2c^3\leqslant 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6.$$

8. (1) 求函数 $f(x,y,z)=x^ay^bz^c$ 在约束条件 $x^k+y^k+z^k=1$ 下的极大值,其中 k,a,b,c 均为正常数.

(2) 利用(1) 的结果证明:对于任何正数 u,v,w,成立不等式

$$\left(\frac{u}{a}\right)^a\left(\frac{v}{b}\right)^b\left(\frac{w}{c}\right)^c\leqslant\left(\frac{u+v+w}{a+b+c}\right)^{a+b+c}.$$

9. 求 a,b 之值,使得椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 包含圆 $(x-1)^2+y^2=1$,且面积最小.

10. 求二次型 $\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\ (a_{ij}=a_{ji})$ 在 n 维单位球面 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$ 上的最大值与最小值.

第十三章　重　积　分

§1　有界闭区域上的重积分

面积

在一元定积分中已经学过计算曲边梯形等平面图形的面积，但是，并不能将其简单照搬到一般的平面点集上，因为一般点集是否存在面积还是一个问题. 为此，先引入面积的定义.

设 D 为 $\mathbf{R}^2$ 上的有界子集. 设 $U=[a,b]\times[c,d]$ 为包含 D 的一个闭矩形. 在$[a,b]$中插入分点

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b;$$

在$[c,d]$中插入分点

$$c=y_0<y_1<\cdots<y_m=d;$$

过这些分点作平行于坐标轴的直线，将 U 分成许多小矩形

$$U_{i,j}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j],\quad i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m,$$

这称为 U 的一个分划(见图 13.1.1).

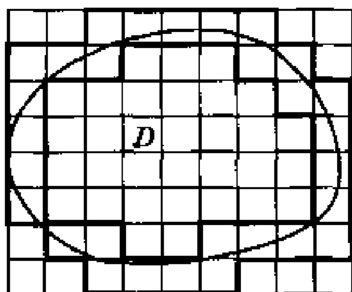


图 13.1.1

记完全包含于 D 内的那些小矩形的面积之和为 mA，与 D 的交集非空的那些小矩形的面积之和为 mB，则显然它们与 U 的分划有关，且有 $mA\leqslant mB$.

利用与讨论一元函数定积分的 Darboux 和类似的方法容易证明：若在原有分划的基础上，在$[a,b]$和$[c,d]$中再增加有限个分点(所得的新分划称为原来分划的加细)，则 mB 不增，mA 不减；且任意一种分划所得到的 mA 不大于任意一种分划所得到的 mB.

这样，这些 mA 有一个上确界 mD_*，mB 有一个下确界 mD^*，并且

$$mD_* \leqslant mD^*.$$

若 $mD_* = mD^*$，则称这个值为 D 的面积，记为 mD，此时称 D 是**可求面积**的.

显然 D 的面积与 U 的选取无关.

可以同样考虑 D 的边界 ∂D 的面积. 这时只需考虑与 ∂D 的交集非空的小矩形面积之和 $mB_{\partial D}$. 若 $m\partial D^* = 0$，则称 ∂D 的面积为零. 边界的面积为零的有界闭区域称为**零边界区域**.

利用上确界与下确界的定义，通过取加细的方法可以证明 D 是可求面积的充分必要条件是：对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 U 的一个分划，使得

$$mB - mA(= mB_{\partial D}) < \varepsilon.$$

所以有

定理 13.1.1　*有界点集 D 是可求面积的充分必要条件是它的边界 ∂D 的面积为 0，即它是零边界区域.*

请注意，一条平面曲线的面积并不一定是零. Peano 发现，存在将实轴上的闭区间映满平面上的一个二维区域(如正方形)的连续函数. 也就是说，这条曲线通过该二维区域的每个点，它被称为 **Peano 曲线**.

面积具有可加性，就是说，如果有界点集 D 由点集 D_1 和 D_2 组成，D_1 和 D_2 可求面积，且 $D_1^\circ \cap D_2^\circ = \varnothing$，那么 D 可求面积，并满足

$$mD = mD_1 + mD_2.$$

这从直观上来说是显然的.

例 13.1.1　设 $y = f(x)(a \leqslant x \leqslant b)$ 为非负连续函数. 则它与直线 $x = a, x = b$ 和 $y = 0$ 所围的区域 D 是可求面积的.

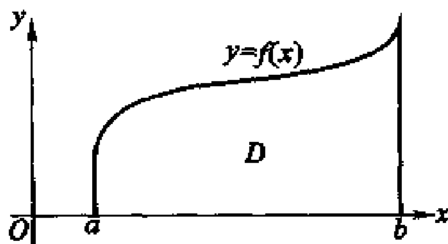


图 13.1.2

证　由于 $y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，那么它在 $[a,b]$ 上可积(在定积分意义下). 在 $[a,b]$ 上插入分点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 将 $[a,b]$ n 等分. 记 $M = \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\}$，那么矩形 $U = [a,b]\times[0,M]$ 就包含了区域 D. 设 m_i 和 M_i 分别为 $f(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的最大值与最小值($i = 1,2,\cdots,n$). 再在

$[0,M]$ 上插入分点 $m_i, M_i(i = 1,2,\cdots,n)$，就得到 U 的一个分划. 容易看出，包含于 D 内的那些小矩形的面积之和为 $mA_n = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$（这是 f 的一个 Darboux 小和）；与 D 的交集非空的那些小矩形的面积之和为 $mB_n = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$（这是 f 的一个 Darboux 大和）. 由于

$$mA_n \leqslant mD_* \leqslant mD^* \leqslant mB_n,$$

令 $n \to \infty$，由 f 在 $[a,b]$ 上的可积性及极限的夹逼性得

$$mD_* = mD^* = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

因此 D 是可求面积的，且面积为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. 这与以前学过的知识相吻合.

在上例中，记曲线 $y = f(x)(a \leqslant x \leqslant b)$ 为 L，那么小矩形 $[x_{i-1}, x_i; m_i, M_i]$，$i = 1,2,\cdots,n$ 的全体包含 L，其面积为

$$\sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}),$$

当 $n \to \infty$ 时，它的极限是零. 所以 L 的面积为 0.

可以用同样方法进一步证明：光滑曲线段的面积为 0. 因此，若一个有界闭区域的边界是分段光滑曲线，那么它是可求面积的.

二重积分的概念

考察一个**曲顶柱体**：它的底是 xy 平面上的具有零边界的有界闭区域 D，顶是非负连续函数 $z = f(x,y)$，$(x,y) \in D$ 所对应的曲面，侧面是以 D 的边界曲线为准线，而母线平行于 z 轴的柱面.

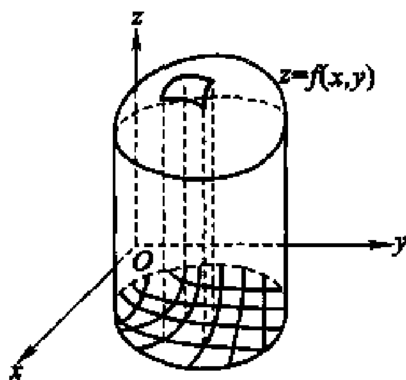


图 13.1.3

为了求出它的体积 V，我们先用一个由面积为零的曲线段组成的曲线网

将区域 D 分成 n 个小区域 $\Delta D_1, \Delta D_2, \cdots, \Delta D_n$. 由前面的讨论,每个 ΔD_i 都是可求面积的($i = 1,2,\cdots,n$). 再分别以这些小区域的边界为准线,作母线平行于轴的柱面,这些柱面将原曲顶柱体分成 n 个细的曲顶柱体. 在每个 ΔD_i 上任取一点 (ξ_i, η_i),那么以 ΔD_i 为底的小曲顶柱体的体积近似地等于

$$f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i,$$

这里 $\Delta\sigma_i$ 表示 ΔD_i 的面积. 于是,原曲顶柱体的体积近似地等于

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

当所有的小区域 ΔD_i 的最大直径(记为 λ) 趋于零时,这个近似值趋于原曲顶柱体的体积,即

$$V = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

这就是二重积分的概念.(以下讨论积分存在性时,总假定区域的边界以及用来分割区域的曲线段的面积为 0,这就保证了所涉及的一切区域的面积都存在.)

定义 13.1.1　设 D 为 $\mathbf{R}^2$ 上的零边界区域,函数 $z = f(x,y)$ 在 D 上有界. 将 D 用曲线网分成 n 个小区域 $\Delta D_1, \Delta D_2, \cdots, \Delta D_n$①(它称为 D 的一个分划),并记所有的小区域 ΔD_i 的最大直径为 λ,即

$$\lambda = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\operatorname{diam}\Delta D_i\}.$$

在每个 ΔD_i 上任取一点 (ξ_i, η_i),记 $\Delta\sigma_i$ 为 ΔD_i 的面积,若 λ 趋于零时,和式

$$I = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

的极限存在且与区域的分法和点 (ξ_i, η_i) 的取法无关,则称 $f(x,y)$ 在 D 上可积,并称此极限为 $f(x,y)$ 在 D 上的**二重积分**,记为

$$I = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \quad \left(= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i\right).$$

$f(x,y)$ 称为**被积函数**,D 称为**积分区域**,x 和 y 称为**积分变量**,$\mathrm{d}\sigma$ 称为**面积元素**,I 称为**积分值**.

前面提到的曲顶柱体的体积即为

$$V = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

与一元的情况类似,设 M_i 和 m_i 分别为 $f(x,y)$ 在 ΔD_i 上的上确界与下确界,定义 Darboux 大和为

① 用面积为零的曲线网对 $\mathbf{R}^2$ 上的有界闭区域 D 分割时,可能会将它分成无穷块小区域,这时需要将它们归并成有限块. 因此这里所说的小区域可能不是连通的,而是一些连通的小区域的并集.

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\sigma_i;$$

Darboux 小和为

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\sigma_i.$$

则有以下性质:

性质 1 若在已有的分划上添加有限条曲线作进一步分划,则 Darboux 大和不增,Darboux 小和不减.

性质 2 任何一个 Darboux 小和都不大于任何一个 Darboux 大和. 因此,若记 $I^* = \inf\{S\}$, $I_* = \sup\{s\}$(这里上、下确界是对所有分划来取的),则有

$$s \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S.$$

性质3 $f(x,y)$ 在 D 上可积的充分必要条件是

$$\lim_{\lambda\to 0}(S - s) = 0,$$

即

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta\sigma_i = 0.$$

这里 $\omega_i = M_i - m_i$ 是 $f(x,y)$ 在 ΔD_i 上的振幅. 此时成立

$$\lim_{\lambda\to 0} s = \lim_{\lambda\to 0} S = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

利用这个性质就可得到:

定理13.1.2 若 $f(x,y)$ 在零边界的有界闭区域 D 上连续,那么它 D 在上可积.

证 记 σ 为 D 的面积. 因为 $f(x,y)$ 在紧集 D 上连续,所以它在 D 上一致连续,于是对任意 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta > 0$,使得当 $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta$ 时,成立

$$|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| < \frac{\varepsilon}{\sigma}.$$

因此对 D 的任一分划 $\Delta D_1, \Delta D_2, \cdots, \Delta D_n$,当所有 ΔD_i 的最大直径 $\lambda < \delta$ 时,$f(x,y)$ 在每个 ΔD_i 上的振幅 ω_i 就小于 $\frac{\varepsilon}{\sigma}$,这就成立

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta\sigma_i < \frac{\varepsilon}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}\Delta\sigma_i = \frac{\varepsilon}{\sigma}\cdot\sigma = \varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta\sigma_i = 0$,即 $f(x,y)$ 在 D 上可积.

证毕

通过稍微复杂一点的证明,还可将定理中函数的条件放宽到 $f(x,y)$ 有界,但至多在有限条面积为零的曲线上不连续.

多重积分

同 $\mathbf{R}^2$ 中定义面积一样,可以在 $\mathbf{R}^n(n\geqslant 3)$ 中引入体积的概念.若定义 $\mathbf{R}^n$ 中的 n 维闭矩形 $[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ 的体积为 $(b_1-a_1)(b_2-a_2)\cdots(b_n-a_n)$,那么就可以将 $\mathbf{R}^2$ 上定义面积的叙述完全平移到 $\mathbf{R}^n(n\geqslant 3)$ 上来定义体积,并同样称边界体积为零的有界闭区域为零边界区域,而且可以证明光滑曲面片的体积为零,这里就不一一详述了.设 Ω 是 $\mathbf{R}^n(n\geqslant 3)$ 上的有界闭区域,其边界是一张或数张无重点的封闭曲面(本章总是如此假定),那么同样可得:Ω 是可求体积的充分必要条件为其边界的体积为零,即它是零边界区域.

同 $\mathbf{R}^2$ 中的原理一样,我们引入 n 重积分的概念:

定义 13.1.2 设 Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 上的零边界区域,函数 $u=f(\boldsymbol{x})$ 在 Ω 上有界.将 Ω 用曲面网分成 n 个小区域 $\Delta\Omega_1,\Delta\Omega_2,\cdots,\Delta\Omega_n$[①](称为 Ω 的一个分划),记 ΔV_i 为 $\Delta\Omega_i$ 的体积,并记所有的小区域 $\Delta\Omega_i$ 的最大直径为 λ.在每个 $\Delta\Omega_i$ 上任取一点 $\boldsymbol{x}_i$,若 λ 趋于零时,和式

$$I=\sum_{i=1}^{n}f(\boldsymbol{x}_i)\Delta V_i$$

的极限存在且与区域的分法和点 $\boldsymbol{x}_i$ 的取法无关,则称 $f(\boldsymbol{x})$ 在 Ω 上可积,并称此极限为 $f(\boldsymbol{x})$ 在有界闭区域 Ω 上的 ***n* 重积分**,记为

$$I=\int_{\Omega}f\mathrm{d}V\quad\left(=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(P_i)\Delta V_i\right).$$

$f(\boldsymbol{x})$ 称为**被积函数**,Ω 称为**积分区域**,$\boldsymbol{x}$ 称为**积分变量**,$\mathrm{d}V$ 称为体积元素,I 称为**积分值**.

类似于二维情形可知,若 $f(\boldsymbol{x})$ 在零边界的有界闭区域 Ω 上连续,那么它在 Ω 上可积.

注意到 $n=2$ 与 $n>2$ 的重积分定义并没有本质的区别,今后我们经常把它们一起讨论.为明确起见,通常采用如下记法:

在 $\mathbf{R}^2$ 中,$f(x,y)$ 在 D 上的二重积分记为

$$\iint_{\Omega}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$$

在 $\mathbf{R}^3$ 中,$f(x,y,z)$ 在 Ω 上的三重积分记为

① 这里对小区域的理解同在二重积分定义中一样.

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \text{ 或 } \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V;$$

而在 $\mathbf{R}^n$ 中，$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在 Ω 上的 n 重积分记为

$$\int_{\Omega} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \text{ 或 } \int\cdots_{\Omega}\int f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n.$$

例13.1.2　设 $\Omega\subset\mathbf{R}^3$ 为具有分片光滑表面的物体，$f(x,y,z)$ 是 Ω 在 (x,y,z) 处的密度. 将 Ω 用分片光滑曲面分成充分小的块 $\Delta\Omega_1,\Delta\Omega_2,\cdots,\Delta\Omega_n$，那么 $f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i$ 就近似地为 $\Delta\Omega_i$ 的质量，这里 ΔV_i 为 $\Delta\Omega_i$ 的体积，(ξ_i,η_i,ζ_i) 为 $\Delta\Omega_i$ 上任一点. 于是，$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i$ 就近似地表示 Ω 的质量. 以 λ 表示所有 $\Delta\Omega_i$ 的最大直径，则

$$\Omega \text{ 的质量} = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i = \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

现在来计算此物体的重心 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$.

如果空间上有 n 个质点，它们的质量分别为 $m_1,m_2,\cdots,m_n$，且相应地位于点

$$(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2),\cdots,(x_n,y_n,z_n),$$

那么这个质点系的重心坐标为

$$\bar{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i},\quad \bar{y} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i},\quad \bar{z} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}.$$

当 λ 充分小时，如果将 $\Delta\Omega_i$ 看成质点，$f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i$ 就近似地为 $\Delta\Omega_i$ 的质量，其中 (ξ_i,η_i,ζ_i) 为 $\Delta\Omega_i$ 上任一点. 那么其重心坐标

$$\bar{x} \approx \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i},\quad \bar{y} \approx \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \eta_i f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i},$$

$$\bar{z} \approx \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \zeta_i f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i},$$

因此当 λ 趋于零就得到

$$\bar{x} = \frac{\iiint\limits_{\Omega} x f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z},$$

$$\bar{y} = \frac{\iiint\limits_{\Omega} yf(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z},$$

$$\bar{z} = \frac{\iiint\limits_{\Omega} zf(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}.$$

注意上式的分母就是 Ω 的质量.

习　　题

1. 设有一平面薄板(不计其厚度),它在 xy 平面上的表示是由光滑的简单闭曲线围成的闭区域 D. 如果该薄板分布有面密度为 $\mu(x,y)$ 的电荷,且 $\mu(x,y)$ 在 D 上连续,试用二重积分表示该薄板上的全部电荷.
2. 设函数 $f(x,y)$ 在矩形 $D=[0,\pi]\times[0,1]$ 上有界,而且除了曲线段 $y=\sin x, 0\leqslant x\leqslant\pi$ 外,$f(x,y)$ 在 D 上其它点连续. 证明 f 在 D 上可积.
3. 按定义计算二重积分 $\iint\limits_{\Omega} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D=[0,1]\times[0,1]$.

   提示:计算时可将 $D=[0,1]\times[0,1]$ 用直线均匀划分.
4. 设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 上具有零边界的有界闭区域,二元函数 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 在 D 上可积. 证明

   $$H(x,y)=\max\{f(x,y),g(x,y)\}$$

   和

   $$h(x,y)=\min\{f(x,y),g(x,y)\}$$

   也 D 在上可积.

§2　重积分的性质与计算

重积分的性质

定义重积分的思想方法与定义定积分是一致的,因此它们的性质也是类似的,以下性质请读者参照一元的情况自行加以证明.

除非特别声明,本节中总假定考虑的区域是 $\mathbf{R}^n(n\geqslant 2)$ 中的零边界有界闭区域.

性质1(线性性)　如果 f 和 g 都在区域 Ω 上可积,那么 C_1f+C_2g 也在 Ω 上可积,这里 C_1、C_2 为任意常数,并且

$$\int_{\Omega}(C_1 f + C_2 g)\mathrm{d}V = C_1\int_{\Omega} f\mathrm{d}V + C_2\int_{\Omega} g\mathrm{d}V.$$

性质2(区域可加性) 若区域 Ω 被分成内点不相交的两个区域 Ω_1 和 Ω_2,如果 f 在 Ω 上可积,则 f 在 Ω_1 和 Ω_2 上都可积;反之,如果 f 在 Ω_1 和 Ω_2 上可积,则 f 在 Ω 上也可积.此时成立

$$\int_{\Omega} f\mathrm{d}V = \int_{\Omega_1} f\mathrm{d}V + \int_{\Omega_2} f\mathrm{d}V.$$

性质3 设被积函数 $f \equiv 1$. 当 $n = 2$ 时

$$\iint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Omega} 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \Omega \text{ 的面积};$$

当 $x \geqslant 3$ 时

$$\int_{\Omega}\mathrm{d}V = \int_{\Omega} 1\mathrm{d}V = \Omega \text{ 的体积}.$$

性质4(保序性) 若 f 和 g 都在区域 Ω 上可积,且满足 $f \leqslant g$,则成立不等式

$$\int_{\Omega} f\mathrm{d}V \leqslant \int_{\Omega} g\mathrm{d}V.$$

推论 若 f 在区域 Ω 上可积,M 与 m 分别为 f 在 Ω 上的上确界和下确界,则成立不等式

$$mV \leqslant \int_{\Omega} f\mathrm{d}V \leqslant MV.$$

其中 V 当 $n = 2$ 时为 Ω 的面积,当 $n > 2$ 时为 Ω 的体积.

性质5(绝对可积性) 若 f 在区域 Ω 上可积,则 $|f|$ 也在 Ω 上可积,且成立不等式

$$\left|\int_{\Omega} f\mathrm{d}V\right| \leqslant \int_{\Omega} |f|\mathrm{d}V.$$

性质6(乘积可积性) 如果 f 和 g 都在区域 Ω 上可积,那么 $f \cdot g$ 也在 Ω 上可积.

性质7(积分中值定理) 若 f 和 g 都在区域 Ω 上可积,且 g 在 Ω 上不变号.设 M 与 m 分别为 f 在 Ω 上的上确界和下确界,则存在常数 $\mu \in [m, M]$,使得

$$\int_{\Omega} f \cdot g\mathrm{d}V = \mu\int_{\Omega} g\mathrm{d}V.$$

特别地,如果 f 在 Ω 上连续,则存在 $\xi \in \Omega$,使得

$$\int_{\Omega} f \cdot g\mathrm{d}V = f(\xi)\int_{\Omega} g\mathrm{d}V.$$

矩形区域上的重积分计算

设 $D=[a,b]\times[c,d]$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的闭矩形，$z=f(x,y)$ 是 D 上的非负连续函数，则以 D 为底、曲面 $z=f(x,y)$ 为顶的曲顶柱体的体积 V 正是二重积分

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

但若换一个角度来看，这块柱体被过 $(x,0,0)(a\leqslant x\leqslant b)$ 点，且与 yz 平面平行的平面所截的截面是曲边梯形(见图 13.2.1)，其面积为

$$A(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y.$$

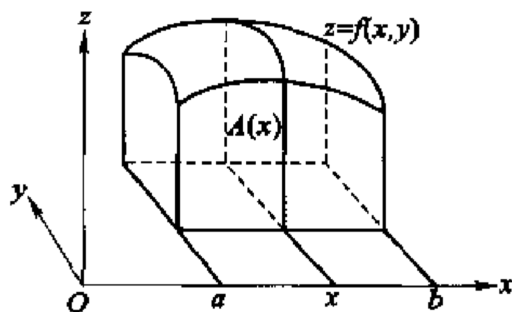


图 13.2.1

利用一元函数定积分的结论，即知此曲顶柱体的体积为

$$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

这里，$\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$ 称为 $f(x,y)$ 先对 y，再对 x 的**累次积分**，习惯上写成 $\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$，因此有等式

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y.$$

这个几何方法提示我们：重积分可以通过累次积分来计算，这一结论可以如下严格叙述和证明.

定理 13.2.1 设二元函数 $f(x,y)$ 在闭矩形 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上可积. 若积分

$$h(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$$

对于每个 $x\in[a,b]$ 存在，则 $h(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，并有等式

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b h(x)\mathrm{d}x = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$
$$= \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y.$$

证 在$[a,b]$中插入分点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

并记$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}(i = 1,2,\cdots,n)$.显然,要得到定理的结论,只要证明

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n h(\xi_i)\Delta x_i = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

这里ξ_i为$[x_{i-1},x_i]$中任意一点,λ为所有Δx_i的最大长度.

再在$[c,d]$中插入分点

$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d,$$

并记$\Delta y_j = y_j - y_{j-1}(j = 1,2,\cdots,m)$.过$[a,b]$和$[c,d]$上的这些分点分别作平行于坐标轴的直线将$D$分成许多小矩形

$$D_{i,j} = [x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j],\quad i = 1,2,\cdots,n;j = 1,2,\cdots,m.$$

记

$$m_{i,j} = \inf_{D_{i,j}}\{f(x,y)\},\quad M_{i,j} = \sup_{D_{i,j}}\{f(x,y)\}.$$

由于$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$,所以

$$\sum_{j=1}^m m_{i,j}\Delta y_j \leqslant h(\xi_i) = \sum_{j=1}^m\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i,y)\mathrm{d}y \leqslant \sum_{j=1}^m M_{i,j}\Delta y_j,\quad i = 1,2,\cdots,n.$$

将这些不等式分别乘以Δx_i,再把它们逐个加起来就得

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m m_{i,j}\Delta x_i\Delta y_j \leqslant \sum_{i=1}^n h(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m M_{i,j}\Delta x_i\Delta y_j.$$

注意到这个不等式两端正是$f(x,y)$在所作分划上的 Darboux 和,由于$f(x,y)$在D上可积,当所有$\Delta x_i,\Delta y_j$都趋于零时,这个不等式两端都趋于

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由极限的夹逼性即得定理结论.

证毕

可以同样推出,若$f(x,y)$在$[a,b]\times[c,d]$上可积,且对所有$y\in[c,d]$,积分$\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$都存在,则$f(x,y)$先对$x$,再对$y$的累次积分$\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$也存在,且成立

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x.$$

例13.2.1 计算柱面 $x^2 + z^2 = R^2$ 与平面 $y = 0$ 和 $y = a(a > 0)$ 所围立体的体积.

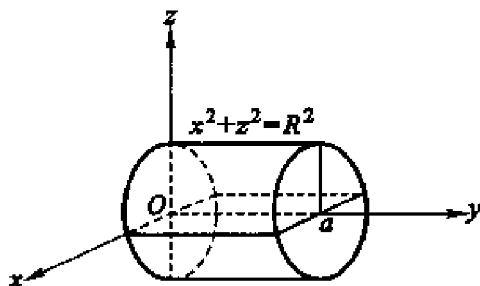


图 13.2.2

解 由对称性,所求立体的体积 V 是它在第一卦限部分的体积的 4 倍. 而它在第一卦限的的部分是以曲面 $z = \sqrt{R^2 - x^2}$ 为顶,以 xy 平面上区域 $D = [0,R] \times [0,a]$ 为底的曲顶柱体. 因此

$$\begin{aligned} V &= 4 \iint_{\Omega} \sqrt{R^2 - x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= 4 \int_0^R \mathrm{d}x \int_0^a \sqrt{R^2 - x^2}\mathrm{d}y = 4a \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\mathrm{d}x = a\pi R^2. \end{aligned}$$

注意并不是所有重积分都能化为累次积分来计算. 例如,设 $D = [0,1] \times [0,1]$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{p_x} + \dfrac{1}{p_y}, & x = \dfrac{q_x}{p_x}、y = \dfrac{q_y}{p_y} \text{ 均为既约分数}, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

易证明 $f(x,y)$ 在 D 上可积,且

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

但它的两个累次积分都不存在. 请读者自己把细节补上.

下面的定理是定理 13.2.1 在 $\mathbf{R}^n$ 上的直接推广,其证明方法也类似.

定理 13.2.2 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在 n 维闭矩形 $\Omega = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times \cdots \times [a_n,b_n]$ 上可积. 记 $\Omega_* = [a_2,b_2] \times \cdots \times [a_n,b_n]$. 若积分

$$h(x_1) = \int_{\Omega_*} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

对于每个 $x_1 \in [a_1,b_1]$ 存在，则 $h(x_1)$ 在 $[a_1,b_1]$ 上可积，并有等式

$$\int_\Omega f(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n = \int_{a_1}^{b_1} h(x_1)\mathrm{d}x_1$$

$$= \int_{a_1}^{b_1}\mathrm{d}x_1\int_{\Omega_*} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n.$$

证明留给读者.

特别，当 $n=2$ 时，这就是定理 13.2.1；当 $n=3$ 时，记 $\Omega=[a,b]\times[c,d]\times[e,f]$，$\Omega_*=[c,d]\times[e,f]$，那么上式成为

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^b \mathrm{d}x\iint_{\Omega_*} f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

从定理 13.2.2 直接得到：

推论 13.2.1 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在 n 维闭矩形 $\Omega=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ 上连续，则有

$$\int_\Omega f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$= \int_{a_1}^{b_1}\mathrm{d}x_1\int_{a_2}^{b_2}\mathrm{d}x_2\cdots\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}}\mathrm{d}x_{n-1}\int_{a_n}^{b_n} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_n.$$

正像二重积分在一定条件下可以化为两种不同的累次积分一样，在 $n>2$ 时，n 重积分也可以化为先对某个变量作定积分，再对其余 $n-1$ 个变量作重积分的累次积分. 例如，沿用上面的记号，如果 $f(x,y,z)$ 在 Ω 可积，并且对于每个 $(y,z)\in\Omega_*$，$\int_a^b f(x,y,z)\mathrm{d}x$ 都存在，那么

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{\Omega_*}\left(\int_a^b f(x,y,z)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iint_{\Omega_*}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\int_a^b f(x,y,z)\mathrm{d}x.$$

其中右边的式子是中间式子的记号.

一般区域上的重积分计算

现在考虑 $f(x,y)$ 在一般区域上的二重积分. 设 $f(x,y)$ 在

$$D=\{(x,y)\mid y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x), a\leqslant x\leqslant b\}$$

上连续，其中 $y_1(x)$，$y_2(x)$ 为 $[a,b]$ 上的一元连续函数.

令 $c=\min\limits_{a\leqslant x\leqslant b} y_1(x)$，$d=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} y_2(x)$，作闭矩形(图 13.2.3)

$$\widetilde{D}=[a,b]\times[c,d]\supset D,$$

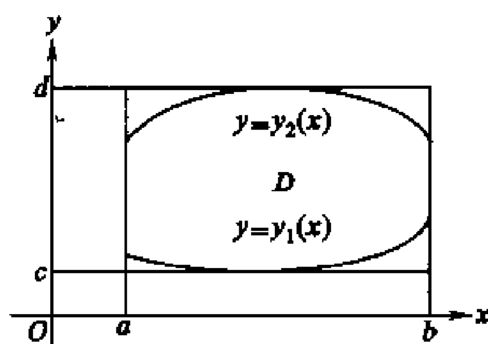


图 13.2.3

令

$$\tilde{f}(x,y)=\begin{cases}f(x,y) & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\in\tilde{D}\setminus D,\end{cases}$$

易证明 $\tilde{f}(x,y)$ 在 $\tilde{D}$ 上也可积. 注意到 $\tilde{f}(x,y)$ 在 D 外为零,就得到

$$\begin{aligned}&\int_c^d\tilde{f}(x,y)\mathrm{d}y\\ &=\int_c^{y_1(x)}\tilde{f}(x,y)\mathrm{d}y+\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\tilde{f}(x,y)\mathrm{d}y+\int_{y_2(x)}^d\tilde{f}(x,y)\mathrm{d}y,\\ &=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\tilde{f}(x,y)\mathrm{d}y=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

由于 f 在 D 上连续,以上积分对每个 $x\in[a,b]$ 总存在. 因此

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint_{\Omega}\tilde{f}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d\tilde{f}(x,y)\mathrm{d}y\\ &=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

类似地,如果 $f(x,y)$ 在 $D=\{(x,y)\mid x_1(y)\leqslant x\leqslant x_2(y),c\leqslant y\leqslant d\}$ 上连续,其中 $x_1(y),x_2(y)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则有

$$\iint_{\Omega}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

同样,在三维情形,若 $f(x,y,z)$ 在

$$\begin{aligned}\Omega=\{(x,y,z)\mid z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y),\\ y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),a\leqslant x\leqslant b\}\end{aligned}$$

上连续,且 $z_1(x,y),z_2(x,y),y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 都连续,则有

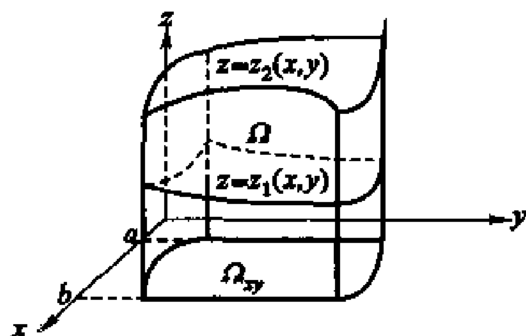


图 13.2.4

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y)\mathrm{d}z$$

$$= \int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y)\mathrm{d}z,$$

其中 $\Omega_{xy} = \{(x,y) \mid y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x), a \leqslant x \leqslant b\}$ 为区域 Ω 在 xy 平面的投影.

利用类似的思想方法还可得到:设 Ω 为限制在平面 $z = e$ 和 $z = f$ 之间的一个具有分片光滑边界的区域,过 $z(e \leqslant z \leqslant f)$ 且与 xy 平面平行的平面截 Ω 成一个图形,记这个图形在 xy 平面的投影区域为 Ω_z. 若 $f(x,y,z)$ 是 Ω 上的连续函数,则成立以下公式

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_e^f \mathrm{d}z\iint\limits_{\Omega_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

对于不同类型的区域,也可视方便按不同顺序对变量 x,y,z 进行逐个积分,这里不一一叙述了.

例 13.2.2 计算 $\iint\limits_{\Omega} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D 为抛物线 $y^2 = x$ 和直线 $y = x - 2$ 所围的闭区域.

解法一 化为先对 y 后对 x 的累次积分. 这时,区域边界的下部是由两段不同的曲线组成的,因此用直线 $x = 1$ 将 D 分为 $D_1 = \{(x,y) \mid -\sqrt{x} \leqslant y \leqslant \sqrt{x}, 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ 和 $D_2 = \{(x,y) \mid x - 2 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}, 1 \leqslant x \leqslant 4\}$ 两部分. 那么

$$\iint\limits_{D} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_1} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_2} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xy\mathrm{d}y + \int_1^4 \mathrm{d}x\int_{x-2}^{\sqrt{x}} xy\mathrm{d}y$$

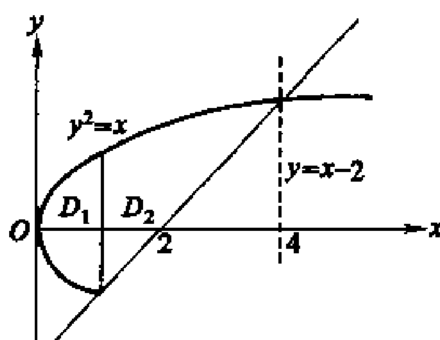


图 13.2.5

$$= 0 + \frac{1}{2}\int_1^4 x[x-(x-2)^2]\mathrm{d}x = \frac{45}{8}.$$

解法二　化为先对 x 后对 y 的累次积分来计算，这时 D 可统一表示为 $\{(x,y)\mid y^2\leqslant x\leqslant y+2,\ -1\leqslant y\leqslant 2\}$. 因此

$$\iint\limits_{D} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{2}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y+2} xy\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{2} y[(y+2)^2 - y^4]\mathrm{d}y = \frac{45}{8}.$$

显然，第二种解法较为简单.

例 13.2.3　计算 $\iint\limits_{D}\sin x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 为 $y=0$，$x=\sqrt{\pi/2}$ 和 $y=x$ 所围成的闭区域.

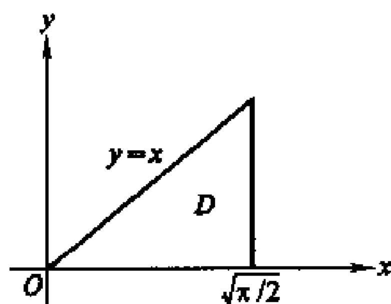


图 13.2.6

解　若将此积分化为先对 x 后对 y 的累次积分

$$\iint\limits_{D}\sin x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\sqrt{\pi/2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{\pi/2}}\sin x^2\mathrm{d}x,$$

但这个积分是积不出来的. 但若化为先对 y 后对 x 的累次积分就得

$$\iint\limits_{D}\sin x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\sqrt{\pi/2}}\mathrm{d}x\int_0^{x}\sin x^2\mathrm{d}y = \int_0^{\sqrt{\pi/2}} x\sin x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

由此可见,适当选取累次积分次序非常重要.

例 13.2.4 求抛物面 $2y^2 = x$,平面 $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1$ 和 $z=0$ 所围立体的体积.

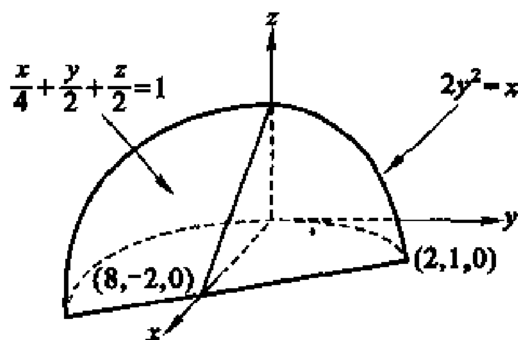


图 13.2.7

解 这个立体的顶的方程为 $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1$,即 $z=2-y-\frac{x}{2}$,底为 xy 平面上由直线 $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$ 和抛物线 $2y^2=x$ 所围成的区域 D,因此它的体积为

$$V=\iint_{\Omega}\left(2-y-\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-2}^{1}\mathrm{d}y\int_{2y^2}^{4-2y}\left(2-y-\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-2}^{1}(4-4y-3y^2+2y^3+y^4)\mathrm{d}y=\frac{81}{10}.$$

例13.2.5 一非均匀金属块在空间的表示是由双曲抛物面 $z=xy$,平面 $x+y=1$ 和 $z=0$ 所围成的区域 Ω,其密度函数为 $\rho(x,y,z)=xy$.求它的质量.

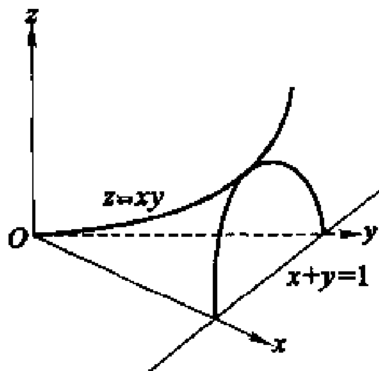


图 13.2.8

解 如图所示，Ω 可表为

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid 0\leqslant z\leqslant xy,0\leqslant y\leqslant 1-x,0\leqslant x\leqslant 1\},$$

因此金属块的质量为

$$M=\iiint_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{xy}xy\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}x^2y^2\mathrm{d}y=\frac{1}{3}\int_0^1x^2(1-x)^3\mathrm{d}x=\frac{1}{180}.$$

例 13.2.6 计算 $I=\iiint_{\Omega}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由锥面 $z^2=\frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)$ 与平面 $z=h$ 所围成的区域.

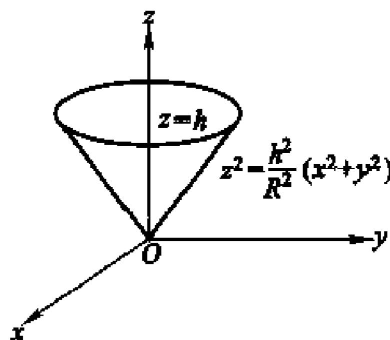


图 13.2.9

解 这时 Ω 可表为

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\mid 0\leqslant z\leqslant h,\frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)\leqslant z^2\right\},$$

因此

$$I=\iiint_{\Omega}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^h\mathrm{d}z\iint_{\Omega_z}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^hz^2\mathrm{d}z\iint_{\Omega_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

这里对每个 z，Ω_z 为平面 $z=z$ 截 Ω 所得图形在 xy 平面的投影，它为区域 $\left\{(x,y)\mid \frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)\leqslant z^2\right\}$，其面积为 $\pi\frac{R^2}{h^2}z^2$，即 $\iint_{\Omega_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\frac{R^2}{h^2}z^2$. 因此

$$I=\int_0^h\pi\frac{R^2}{h^2}z^4\mathrm{d}z=\frac{\pi R^2h^3}{5}.$$

例13.2.7 求 $\mathbf{R}^n$ 中几何体

$$T_n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,\cdots,x_n\geqslant 0,$$
$$x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant h\}$$

（它称为 n 维单纯形）的体积.

解 当 $n=2$ 时,T_2 的体积为

$$\iint\limits_{T_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^h\mathrm{d}x\int_0^{h-x}\mathrm{d}y=\int_0^h(h-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}h^2.$$

当 $n=3$ 时,T_3 的体积为

$$\iiint\limits_{T_3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^h\mathrm{d}x\iint\limits_{y+z\leqslant h-x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^h\frac{(h-x)^2}{2}\mathrm{d}x=\frac{h^3}{3!}.$$

设 T_{n-1} 的体积为

$$\int\limits_{T_{n-1}}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{n-1}=\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}.$$

则利用上式得 T_n 的体积为

$$\begin{aligned}\int\limits_{T_n}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n&=\int_0^h\mathrm{d}x_1\int\limits_{\substack{x_2\geqslant0,x_3\geqslant0,\cdots,x_n\geqslant0\\x_2+x_3+\cdots+x_n\leqslant h-x_1}}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\cdots\mathrm{d}x_n\\&=\int_0^h\frac{(h-x_1)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}x_1=\frac{h^n}{n!}.\end{aligned}$$

习 题

1. 证明重积分性质 7(积分中值定理).

2. 根据二重积分的性质,比较下列积分的大小:

(1) $\iint\limits_D(x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 与 $\iint\limits_D(x+y)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,$D$ 为 x 轴、y 轴与直线 $x+y=1$ 所围区域;

(2) $\iint\limits_D\ln(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 与 $\iint\limits_D[\ln(x+y)]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,$D$ 为闭矩形 $[3,5]\times[0,1]$.

3. 利用重积分的性质估计下列重积分的值:

(1) $\iint\limits_D xy(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,$D$ 为闭矩形 $[0,1]\times[0,1]$;

(2) $\iint\limits_D\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{100+\cos^2x+\cos^2y}$,$D$ 为区域 $\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant10\}$;

(3) $\iiint\limits_\Omega\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}x\mathrm{d}z}{1+x^2+y^2+z^2}$,$\Omega$ 为单位球 $\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant1\}$.

4. 计算下列重积分:

(1) $\iint\limits_D (x^3+3x^2y+y^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D 为闭矩形$[0,1]\times[0,1]$;

(2) $\iint\limits_D xy\mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D 为闭矩形$[a,b]\times[c,d]$;

(3) $\iiint\limits_\Omega \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x+y+z)^3}$, Ω 为长方体$[1,2]\times[1,2]\times[1,2]$.

5. 在下列积分中改变累次积分的次序:

(1) $\int_a^b \mathrm{d}x\int_a^x f(x,y)\mathrm{d}y\ (a<b)$;

(2) $\int_0^{2a}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\mathrm{d}y\ (a>0)$;

(3) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x} f(x,y)\mathrm{d}y$;

(4) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{2y} f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^3\mathrm{d}y\int_0^{3-y} f(x,y)\mathrm{d}x$;

(5) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{x+y} f(x,y,z)\mathrm{d}z$;

(6) $\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,y,z)\mathrm{d}z$.

6. 计算下列重积分:

(1) $\iint\limits_D xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D 为抛物线 $y^2=2px$ 和直线 $x=\dfrac{p}{2}(p>0)$ 所围的区域;

(2) $\iint\limits_D \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{2a-x}}\ (a>0)$, D 为圆心在(a,a),半径为 a 并且和坐标轴相切的圆周上较短的一段弧和坐标轴所围区域;

(3) $\iint\limits_D \mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D 为区域$\{(x,y)\mid |x|+|y|\}\leqslant 1$;

(4) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D 为直线$y=x, y=x+a, y=a$ 和$y=3a(a>0)$ 所围区域;

(5) $\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D 为摆线的一拱 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 与 x 轴所围区域;

(6) $\iiint\limits_\Omega xy^3z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, Ω 为曲面$z=xy$,平面 $y=x, x=1$ 和 $z=0$ 所围区域;

(7) $\iiint\limits_{\Omega} \dfrac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$，$\Omega$ 为平面 $x=0, y=0, z=0$ 和 $x+y+z=1$ 所围成的四面体；

(8) $\iiint\limits_{\Omega} z dxdydz$，$\Omega$ 为抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=h(h>0)$ 所围成的区域；

(9) $\iiint\limits_{\Omega} z^2 dxdydz$，$\Omega$ 为球体：$x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$ 和 $x^2+y^2+z^2 \leqslant 2Rz (R>0)$ 的公共部分.

7. 设平面薄片所占的区域是由直线 $x+y=2, y=x$ 和 x 轴所围成，它的面密度为 $\rho(x,y)=x^2+y^2$，求这个薄片的质量.

8. 求抛物线 $y^2=2px+p^2$ 与 $y^2=-2qx+q^2 (p, q>0)$ 所围图形的面积.

9. 求四张平面 $x=0, y=0, x=1, y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 和 $2x+3y+z=6$ 所截的立体的体积.

10. 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2$，三个坐标平面及平面 $x+y=1$ 所围有界区域的体积.

11. 设 $f(x)$ 在 R 上连续，证明

(1) $\int_a^b dx \int_a^x f(y)dy = \int_a^b f(y)(b-y)dy$；

(2) $\int_0^a dy \int_0^y e^{a-x} f(x)dx = \int_0^a (a-x)e^{a-x} f(x)dx$.

12. 设 D 是由 xy 平面上的分段光滑简单闭曲线所围成的区域，D 在 x 轴和 y 轴上的投影长度分别为 l_x 和 l_y，(α, β) 是 D 内任意一点. 证明

(1) $\left| \iint\limits_{D} (x-\alpha)(y-\beta)dxdy \right| \leqslant l_x l_y mD$；

(2) $\left| \iint\limits_{D} (x-\alpha)(y-\beta)dxdy \right| \leqslant \dfrac{l_x^2 l_y^2}{4}$.

13. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明

$$\iint\limits_{[a,b]\times[a,b]} e^{f(x)-f(y)} dxdy \geqslant (b-a)^2.$$

14. 设 $\Omega = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | 0 \leqslant x_i \leqslant 1, i=1,2,\cdots,n\}$，计算下列 n 重积分：

(1) $\int\limits_{\Omega} (x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$.

(2) $\int\limits_{\Omega} (x_1+x_2+\cdots+x_n)^2 dx_1 dx_2 \cdots dx_n$.

§3 重积分的变量代换

曲线坐标

设 U 为 uv 平面上的开集，V 是 xy 平面上的开集，映射

$$T: x = x(u,v), y = y(u,v)$$

是 U 到 V 的一个一一对应，它的逆变换记为 $T^{-1}: u = u(x,y), v = v(x,y)$.

在 U 中取直线 $u = u_0$，就相应得到 xy 平面上的一条曲线

$$x = x(u_0,v), y = y(u_0,v)$$

我们称之为 v- 曲线；同样，取直线 $v = v_0$，就相应得到 xy 平面上的 u- 曲线，

$$x = x(u,v_0), y = y(u,v_0)$$

由于映射 T 是一一对应的，因此 V 上的任意一点 P 既可以用 (x,y) 表示，也可以唯一地用 (u,v) 表示. 我们称 u - 曲线和 v - 曲线构成了**曲线坐标网**，称 (u,v) 为 P 的**曲线坐标**，而称 T 为**坐标变换**(参见图 13.3.1).

例如，在映射 $T: x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 下，θ - 曲线是一族以原点为圆心的同心圆，r - 曲线是一族从原点出发的半射线，它们构成平面上的极坐标网. (r,θ) 为点 $P(x,y)$ 的极坐标，T 即为极坐标变换.

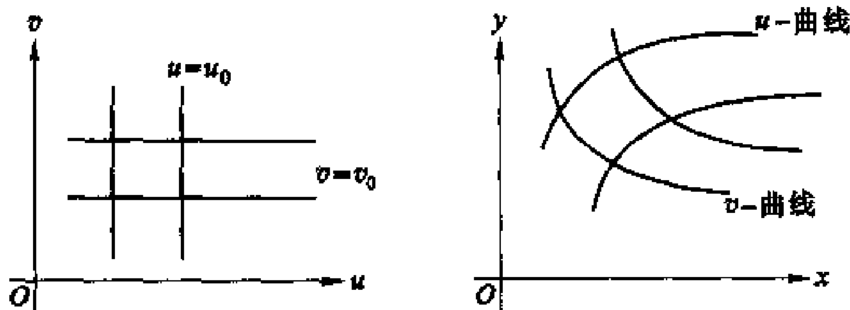


图 13.3.1

二重积分的变量代换

现在，进一步假设 $x = x(u,v), y = y(u,v)$ 具有连续偏导数，且有 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$，则由连续性可知 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ 在 U 上不变号. 因此，对于 U 中任意具有分段光滑边界的有界闭区域 D，记它的像为 $E = T(D) \subset V$，则 D 的内点和边界分别被映为 E 的内点和边界，同时，由于连通集的象也连通，所以 $E = T(D)$ 也是具有分段光滑边界的有界闭区域. 在这样的假设下，有如下的二重积分的变量代换公式.

定理13.3.1(二重积分变量代换公式)　映射T和区域D如上假设.如果二元函数$f(x,y)$在$T(D)$上连续,则

$$\iint\limits_{T(D)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

显然,当$f(x,y)\equiv 1$时,

$$\iint\limits_{D}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v = mT(D)(\text{即 } T(D) \text{ 的面积}).$$

定理的证明放到下一段,现在先来看一看Jacobi行列式的几何意义和应用.

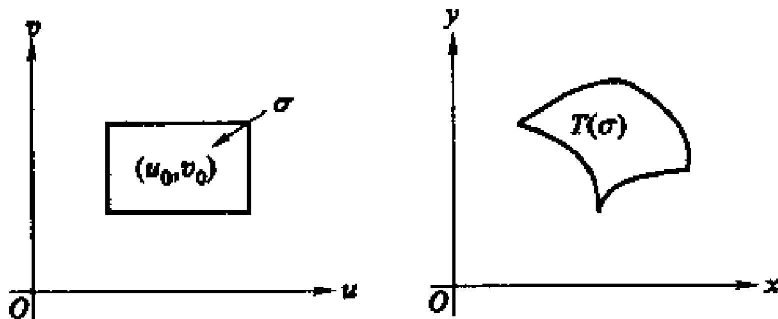


图 13.3.2

设T,D满足本节开始时的假定,(u_0,v_0)是区域D中的一点,σ是包含此点的具有分段光滑边界的小区域,并记$d(\sigma)$为σ的直径(见图13.3.2),那么由定理13.3.1和重积分的中值定理,得

$$\begin{aligned} mT(\sigma) &= \iint\limits_{\sigma}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(r,s)}\cdot m\sigma \\ &= \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}\cdot m\sigma + o(1)\cdot m\sigma, \end{aligned}$$

其中(r,s)为σ中一点,$o(1)$为当$d(\sigma)\to 0$时(即σ收缩到(u_0,v_0))的无穷小量.因此

$$\lim_{d(\sigma)\to 0}\frac{mT(\sigma)}{m\sigma} = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)},$$

或等价地

$$mT(\sigma)\sim\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}\cdot m\sigma.$$

这说明Jacobi行列式$\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$的几何意义为面积的比例系数.

例13.3.1　计算曲线$(x-y)^2+x^2=a^2(a>0)$所围区域D的面积.

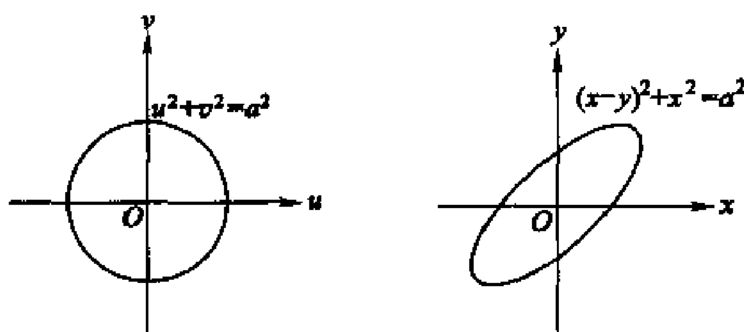


图 13.3.3

解 作变换 $x = u, x - y = v$,则曲线方程对应于 $u^2 + v^2 = a^2$.显然这个变换将左边的圆盘 $u^2 + v^2 \leqslant a^2$ 一一对应地映为右边的椭圆区域 D.由于

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1,$$

因此

$$S = \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{u^2+v^2\leqslant a^2} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint\limits_{u^2+v^2\leqslant a^2} \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \pi a^2.$$

例 13.3.2 求双曲线 $xy = p, xy = q$ 与直线 $y = ax, y = bx$ 在第一象限所围图形的面积,其中 $q > p > 0, b > a > 0$.

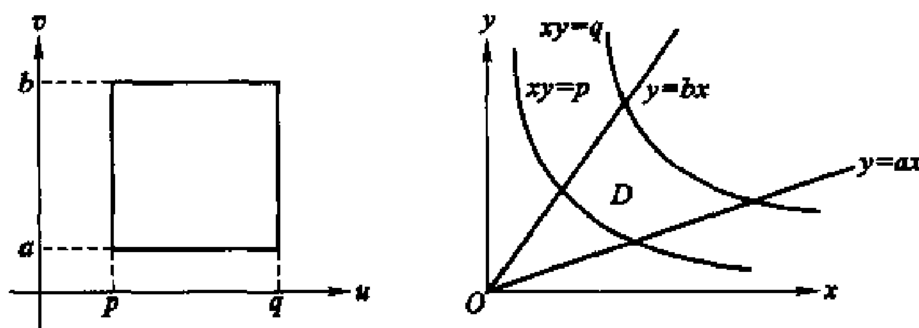


图 13.3.4

解 在变换 $xy = u, \dfrac{y}{x} = v$ 下,区域 D 被一一对应地映为

$$D_1 = \{(u,v) \mid p \leqslant u \leqslant q, a \leqslant v \leqslant b\},$$

这时有 $x = \sqrt{\dfrac{u}{v}}, y = \sqrt{uv}$,于是

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v^3}}\\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}}\end{vmatrix}=\frac{1}{2v}.$$

因此,所求面积为

$$\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_1}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint_{D_1}\frac{1}{2v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{2}\int_p^q\mathrm{d}u\int_a^b\frac{1}{v}\mathrm{d}v=\frac{1}{2}(q-p)\ln\frac{b}{a}.$$

极坐标变换

$$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant r<+\infty$$

是我们十分熟悉的.除原点与正实轴外,它是一一对应的,这时

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r.$$

例13.3.3 计算 $\iint\limits_D\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$.

解 引入极坐标变换 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$,那么 D 对应于区域 $\hat{D}=\{(r,\theta)\mid 0\leqslant r\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$.因此

$$\iint_D\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\hat{D}}(\sin\pi r)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$=\iint_{\hat{D}}(\sin\pi r)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sin(\pi r)r\mathrm{d}r=2.$$

严格说来,由于极坐标变换在原点与正实轴上不是一对一的.在应用变量代换公式时,应该去掉原点与正实轴,也就是说,应该用以下方法来计算(积分区域如图 13.3.5):

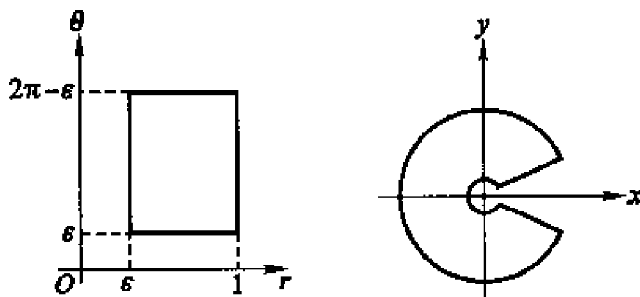


图 13.3.5

$$\iint\limits_{D}\sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{\varepsilon\to0}\iint\limits_{\substack{\varepsilon\leqslant x^2+y^2\leqslant1\\ \varepsilon\leqslant\theta\leqslant2\pi-\varepsilon}}\sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\iint\limits_{\substack{\varepsilon\leqslant r\leqslant1\\ \varepsilon\leqslant\theta\leqslant2\pi-\varepsilon}}\sin(\pi r)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon}\mathrm{d}\theta\int_{\varepsilon}^{1}\sin(\pi r)r\mathrm{d}r$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}(2\pi-2\varepsilon)\left[-\frac{r}{\pi}\cos\pi r+\frac{\sin\pi r}{\pi^2}\right]_{\varepsilon}^{1}=2.$$

这种方法的实质就是，在原积分区域 D 上适当挖掉一个(或几个)包含非一一对应点集的小区域，从而得到一个区域 $\tilde{D}$，再将被积函数在 D 上的积分看作在 $\tilde{D}$ 上的积分当 $\tilde{D}$ 趋于 D 时的极限. 但在了解这种原理之后，就不必每次都照此办理，直接仿照第一种方法直接计算.

例 13.3.4 求抛物面 $x^2+y^2=az$ 和锥面 $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ $(a>0)$ 所围成立体的体积.

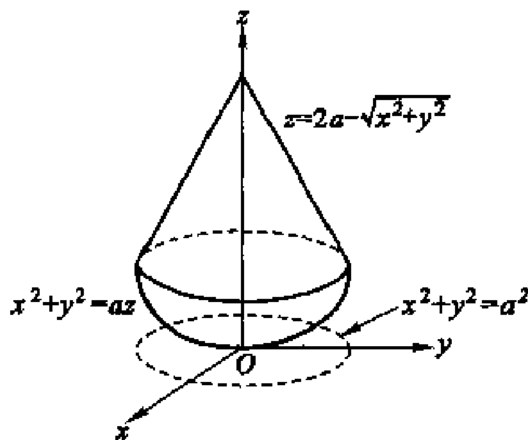


图 13.3.6

解 易求得两曲面的交线在 xy 平面的投影的方程为 $x^2+y^2=a^2$. 设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant a^2\}$，于是利用极坐标变换得所求立体的体积为

$$\iint\limits_{D}\left[2a-\sqrt{x^2+y^2}-\left(\frac{x^2+y^2}{a}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\substack{0\leqslant r\leqslant a\\ 0\leqslant\theta\leqslant2\pi}}\left(2a-r-\frac{r^2}{a}\right)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\left(2a-r-\frac{r^2}{a}\right)r\mathrm{d}r=2\pi\int_0^a\left(2a-r-\frac{r^2}{a}\right)r\mathrm{d}r=\frac{5}{6}\pi a^3.$$

例13.3.5 求曲线$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{xy}{c^2}(a,b,c>0)$所围图形的面积.

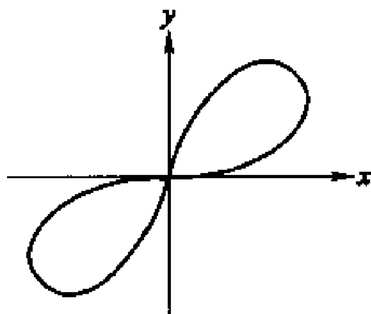


图 13.3.7

解 设曲线在第一象限所围区域为D.这个方程中有$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$项,因此引入广义极坐标

$$x=ar\cos\theta,\quad y=br\sin\theta.$$

这个变换的 Jacobi 行列式为

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix}=abr.$$

在 $r\theta$ 平面上这条曲线的象的方程是

$$r^2=\frac{ab}{c^2}\sin\theta\cos\theta,$$

而且D所对应的区域为$D_1=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,0\leqslant r\leqslant\sqrt{\frac{ab}{c^2}\sin\theta\cos\theta},0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$,由对称性,所求面积是$D$的面积的两倍,因此它为

$$2\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1} abr\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{\frac{ab}{c^2}\sin\theta\cos\theta}} abr\mathrm{d}r$$

$$=\frac{a^2b^2}{c^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta=\frac{a^2b^2}{2c^2}.$$

变量代换公式的证明

设开集U与映射T满足前面的假设,D是U中的具有分段光滑边界的有界闭区域,显然D可以包含在一个矩形$[a,b]\times[c,d]$中.分别将区间$[a,b]$和$[c,d]$作2^n等分,并以这些分点作平行于坐标轴的直线,就得到了此矩形和D的分划.包含于D的那些小矩形全体构成了一个D中的多边形A_n,而与D的交非空的那些小矩形全体构成了一个包含D的多边形B_n.容易看出(见

图 13.3.8)

$$A_n \subset A_{n+1} \subset B_{n+1} \subset B_n.$$

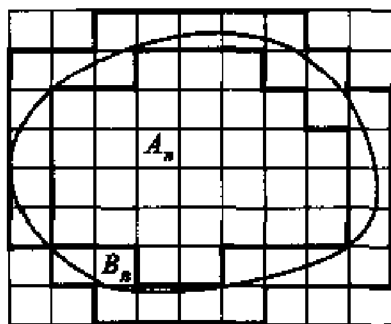


图 13.3.8

记 $C_n = B_n \setminus A^\circ_n$,则 C_n 也是由小矩形拼成的,而且它包含了 D 的边界 ∂D. 由于 D 是可求面积的,易知

$$\lim_{n\to\infty} mA_n = \lim_{n\to\infty} mB_n = mD, \quad \lim_{n\to\infty} mC_n = 0.$$

先对如下定义的本原映射 T 来证明定理 13.3.1.

定义 13.3.1 形如

$$T_x: x = x(u,v) = u, y = y(u,v)$$

或

$$T_y: x = x(u,v), y = y(u,v) = v$$

的映射称为本原映射.

取充分大的 n,使得 $B_n \subset U$,那么下面的结果成立.

引理 13.3.1 设 T 为本原映射,则对于每个属于 B_n 的小矩形 R,等式

$$mT(R) = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(\tilde{u},\tilde{v})} mR$$

成立,这里 $(\tilde{u},\tilde{v})$ 为 R 上某一点.

证 仅对本原映射 T_x 证明,对 T_y 是类似的.

因为 $x = x(u,v), y = y(u,v)$ 具有连续偏导数,且 Jacobi 行列式 $J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ 在 U 上不为零,那么这个 D 的分划的象也是 $E = T(D)$ 的一个分划(因为直线段是光滑的),而且它所分成的小区域的内点被映为其象的内点.

设在 U 上 $J > 0$. 由于这时成立

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial y}{\partial v} > 0,$$

所以在每个包含于 B_n 中的小矩形(图 13.3.9)

$$R = [e,f] \times [g,h]$$

上，对于固定的 u，$y(u,v)$ 是 v 的单调增加函数，因此 R 被一一对应地映到

$$T(R) = \{(x,y) \mid e \leqslant x \leqslant f, y(x,g) \leqslant y \leqslant y(x,h)\}.$$

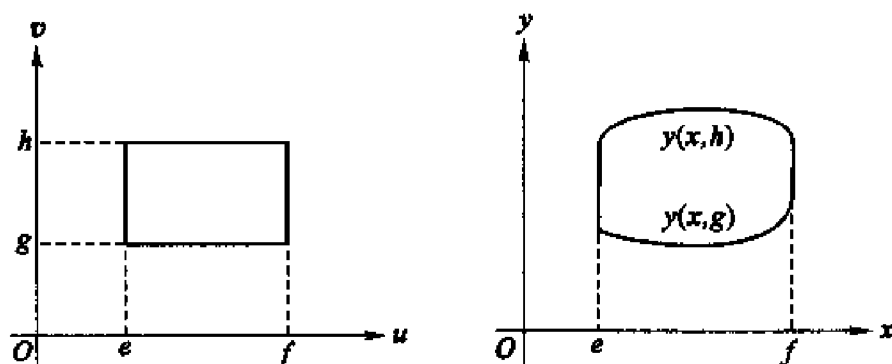


图 13.3.9

所以 $T(R)$ 的面积为

$$mT(R) = \iint\limits_{T(R)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_e^f \mathrm{d}x \int_{y(x,g)}^{y(x,h)} \mathrm{d}y$$

$$= \int_e^f [y(x,h) - y(x,g)]\mathrm{d}x = (y(\tilde{u},h) - y(\tilde{u},g))(f-e),$$

其中 $e \leqslant \tilde{u} \leqslant f$. 最后一步是利用了积分中值定理. 再用一次微分中值定理得

$$mT(R) = \frac{\partial y}{\partial v}(\tilde{u},\tilde{v})(h-g)(f-e) = \frac{\partial y}{\partial v}(\tilde{u},\tilde{v})mR$$

$$= \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)_{(\tilde{u},\tilde{v})} mR,$$

其中 $g < \tilde{v} < h$.

如果 T 的 Jacobi 行列式为负的，以上讨论中关于 y 的不等式反向，重复以上证明可同样得到

$$mT(R) = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(\tilde{u},\tilde{v})} mR.$$

证毕

注意到$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$在 U 上的连续性，我们可找到一个与 n 无关的正数 $K > 0$，使得当 n 充分大时

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u,v)} \leqslant K, (u,v) \in B_n$$

总成立.由于 C_n 是由 B_n 中的一些小矩形拼成的,于是由以上引理得到

$$mT(C_n) \leqslant KmC_n.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} mT(C_n) = 0.$$

下面证明变量代换公式对于本原映射成立.

引理 13.3.2 设 T 为本原映射,二元函数 $f(x,y)$ 在 $T(D)$ 上连续,则

$$\iint\limits_{T(D)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

证 记 $H = \max\limits_{(x,y)\in T(D)}\{|f(x,y)|\}$.

由于所作的那些平行于坐标轴的直线将 D 分划成一个个小区域,将它们排列为 $D_1, D_2, \cdots, D_M$.对于每个 $D_i \subset A_n$,它当然是属于 B_n 的小矩形,因此由引理 13.3.1,在这样的 D_i 上成立

$$mT(D_i) = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(\tilde{u}_i,\tilde{v}_i)} mD_i,$$

这里$(\tilde{u}_i,\tilde{v}_i)$ 为 D_i 中某一点.设 $\tilde{x}_i = x(\tilde{u}_i,\tilde{v}_i)$,$\tilde{y}_i = y(\tilde{u}_i,\tilde{v}_i)$,则从上式得

$$\begin{aligned}&\sum_i{}^* f(\tilde{x}_i,\tilde{y}_i)mT(D_i)\\ =& \sum_i{}^* f(x(\tilde{u}_i,\tilde{v}_i),y(\tilde{u}_i,\tilde{v}_i))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(\tilde{u}_i,\tilde{v}_i)} mD_i,\end{aligned}$$

这里$\sum\limits_i{}^*$ 表示对所有满足$D_i\subset A_n$的i求和.若$\sum\limits_i{}^{**}$ 表示对所有满足 $D_i \subset D\setminus A_n^\circ$ 的 i 求和,在这样的 D_i 中取一点$(\tilde{u}_i,\tilde{v}_i)$,并设 $\tilde{x}_i = x(\tilde{u}_i,\tilde{v}_i)$,$\tilde{y}_i = y(\tilde{u}_i,\tilde{v}_i)$,那么

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{M} f(\tilde{x}_i,\tilde{y}_i)mT(D_i) = \sum_i{}^* f(\tilde{x}_i,\tilde{y}_i)mT(D_i) + \sum_i{}^{**} f(\tilde{x}_i,\tilde{y}_i)mT(D_i)\\
=& \sum_i{}^* f(x(\tilde{u}_i,\tilde{v}_i),y(\tilde{u}_i,\tilde{v}_i))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(\tilde{u}_i,\tilde{v}_i)} mD_i\\
&+ \sum_i{}^{**} f(x(\tilde{u}_i,\tilde{v}_i),y(\tilde{u}_i,\tilde{v}_i))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(\tilde{u}_i,\tilde{v}_i)} mD_i\\
&+ \left(\sum_i{}^{**} f(\tilde{x}_i,\tilde{y}_i)mT(D_i) - \sum_i{}^{**} f(x(\tilde{u}_i,\tilde{v}_i),y(\tilde{u}_i,\tilde{v}_i))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(\tilde{u}_i,\tilde{v}_i)} mD_i\right)\\
=& \sum_{i=1}^{M} f(x(\tilde{u}_i,\tilde{v}_i),y(\tilde{u}_i,\tilde{v}_i))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(\tilde{u}_i,\tilde{v}_i)} mD_i\\
&+ \left(\sum_i{}^{**} f(\tilde{x}_i,\tilde{y}_i)mT(D_i) - \sum_i{}^{**} f(x(\tilde{u}_i,\tilde{v}_i),y(\tilde{u}_i,\tilde{v}_i))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(\tilde{u}_i,\tilde{v}_i)} mD_i\right).\end{aligned}$$

由于 $D\setminus A_n^\circ \subset C_n$,所以

$$\left|\sum_i{}^{**} f(\tilde{x}_i,\tilde{y}_i)mT(D_i)\right|$$

$$\leqslant H\cdot\sum_i{}^{**} mT(D_i)\leqslant H\cdot mT(C_n)\leqslant HKmC_n;$$

$$\left|\sum_i{}^{**} f(x(\tilde{u}_i,\tilde{v}_i),y(\tilde{u}_i,\tilde{v}_i))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(\tilde{u}_i,\tilde{v}_i)}mD_i\right|$$

$$\leqslant HK\sum_i{}^{**} mD_i\leqslant HKmC_n.$$

因此当 n 趋于无穷大时,这两项趋于零,所以由二重积分的定义得

$$\iint\limits_{T(D)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

证毕

为了完全证明定理 13.3.1,还需要以下的结果:

引理 13.3.3　若 T 满足定理 13.3.1 的假设,则对于任意 $Q_0=(u_0,v_0)\in U$,T 在 Q_0 附近可以表成两个具有连续偏导数的、一对一的本原映射的复合.

证　设 $x_0=x(u_0,v_0)$,$y_0=y(u_0,v_0)$,$P_0=(x_0,y_0)$.

由于 $\left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}\neq 0$,行列式中必有元素不为零.不妨设 $\left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_{(u_0,v_0)}\neq 0$,于是,本原映射

$$T_1:\begin{cases}\xi=x(u,v),\\ \eta=v\end{cases}$$

的 Jacobi 行列式 $\left.\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}=\left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_{(u_0,v_0)}\neq 0$,由隐函数存在定理(或逆映射定理),局部地可得逆映射 $\begin{cases}u=g(\xi,\eta),\\ v=\eta,\end{cases}$ 且 $g(\xi,\eta)$ 在 $T_1(u_0,v_0)$ 的一个邻域具有连续偏导数.注意这时成立 $g(x(u,v),v)=u$.

作

$$T_2:\begin{cases}x=\xi,\\ y=y(g(\xi,\eta),\eta),\end{cases}$$

则有

$$x=\xi=x(u,v),$$
$$y=y(g(\xi,\eta),\eta)=y(g(x(u,v),v),v)=y(u,v).$$

即 $T_2\circ T_1=T$.从 $T=T_2\circ T_1$ 就推出 T_1 和 T_2 在局部的一一性.

证毕

定理 13.3.1 的证明:

根据引理 13.3.3,对于每点 $Q=(u,v)\in D$,存在它的一个邻域

$U_\delta(Q)$,在这个邻域中 T 可以表为两个一对一的本原映射的复合. 由于 $\{U_{\delta/2}(Q)\mid Q\in D\}$ 覆盖了 D,由 Heine-Borel 定理,存在有限多个邻域

$$U_{\delta_1/2}(Q_1),U_{\delta_2/2}(Q_2),\cdots,U_{\delta_s/2}(Q_s),$$

它们覆盖了 D.设 $\delta_*=\min\left\{\frac{\delta_1}{2},\frac{\delta_2}{2},\cdots,\frac{\delta_s}{2}\right\}$.

取 n 充分大,使得所有$[a,b]\times[c,d]$中的小矩形的对角线长度都小于 δ_*,那么每个与D°的交非空的小矩形,必包含在某个 $U_{\delta_j}(Q)$ 中($1\leqslant j\leqslant s$). 仍设 D 的分划如引理 13.3.2.注意每个 $D_i(i=1,2,\cdots,M)$ 都包含在某个与 D° 的交非空的小矩形中,因此也必包含在某个 $U_{\delta_j}(Q)$ 中($1\leqslant j\leqslant s$). 于是在每个 $D_i(i=1,2,\cdots,M)$ 上成立 $T=T_2\circ T_1$(为简便起见去掉标记 i,注意对不同的 D_i,可能有不同 T_1 和 T_2),这里 T_1 和 T_2 是本原映射.设

$$T_1:\begin{cases}\xi=\xi(u,v),\\ \eta=\eta(u,v),\end{cases}\qquad T_2:\begin{cases}x=x(\xi,\eta),\\ y=y(\xi,\eta),\end{cases}$$

那么

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}\cdot\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(u,v)}.$$

由于 T_1 和$_2$ 是本原映射,因此由引理 13.3.2 得

$$\begin{aligned}\iint\limits_{T(D_i)}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint\limits_{T_1(D_i)}f(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}\right|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\\&=\iint\limits_{D_i}f(x(\xi(u,v),\eta(u,v)),y(\xi(u,v),\\&\qquad\eta(u,v)))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}\right|\left|\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\iint\limits_{D_i}f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\iint\limits_{T(D)}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\sum_{i=1}^{M}\iint\limits_{T(D_i)}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\sum_{i=1}^{M}\iint\limits_{D_i}f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\iint\limits_{D}f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

证毕

n 重积分的变量代换

设 U 为 $\mathbf{R}^n(n>2)$ 上的开集，映射

$$T: y_1 = y_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,y_n = y_n(x_1,\cdots,x_n)$$

将 U 一一对应地映到 $V\subset\mathbf{R}^n$ 上，因此它有逆变换 T^{-1}. 进一步假设 $y_1 = y_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,y_n = y_n(x_1,\cdots,x_n)$ 都具有连续偏导数，而且这个映射的 Jacobi 行列式不等于零.

设 Ω 为 U 中具有分片光滑边界的有界闭区域，则有与二维情形类似的结论：

定理 13.3.3　映射 T 和区域 Ω 如上假设. 如果 $f(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 是 $T(\Omega)$ 上的连续函数，那么变量代换公式

$$\int\limits_{T(\Omega)} f(y_1,\cdots,y_n)\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_n$$

$$=\int\limits_{\Omega} f(y_1(\boldsymbol{x}),\cdots,y_n(\boldsymbol{x}))\left|\frac{\partial(y_1,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}\right|\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$

成立，其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$.

这个定理的证明思想与定理 13.3.1 类似，只是过程复杂得多，在此从略.

三维空间中有两种非常重要的变换，一种是柱面坐标变换（见图 13.3.10）

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z. \end{cases}$$

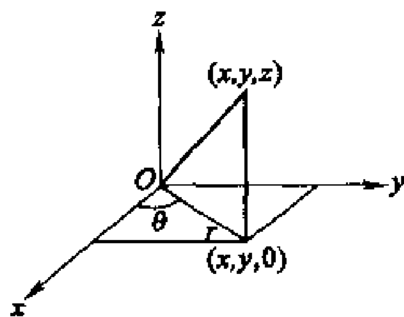


图 13.3.10

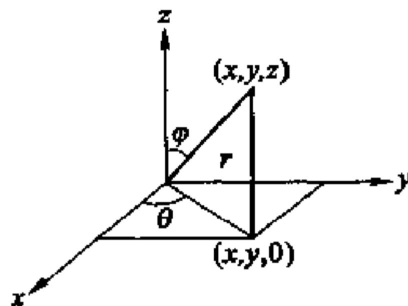


图 13.3.11

它将 $0\leqslant r<+\infty, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, -\infty<z<+\infty$ 映为整个 xyz 空间，变换的 Jacobi 行列式为

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r.$$

另一种是球面坐标变换（见图 13.3.11）

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\varphi. \end{cases}$$

它将 $0\leqslant r<+\infty, 0\leqslant\varphi\leqslant\pi, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 映为整个 xyz 空间,变换的 Jacobi 行列式为

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)} = r^2\sin\varphi.$$

例13.3.6 计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 Ω 为抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=h$ 所围的区域.

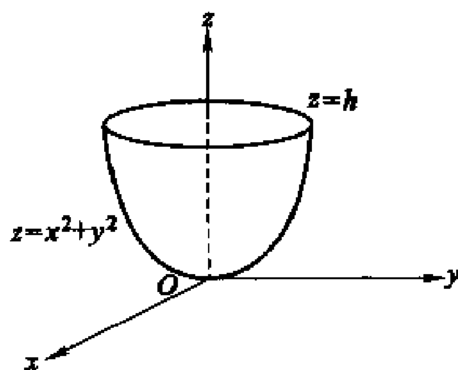


图 13.3.12

解 引入柱面坐标变换 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=z$. 在此变换下 Ω 对应于 $r\theta z$ 空间的区域 $\Omega_1=\{(r,\theta,z)\mid r^2\leqslant z\leqslant h, 0\leqslant r\leqslant\sqrt{h}, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$,因此

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega_1} r^2 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{h}} r^3\mathrm{d}r\int_{r^2}^{h}\mathrm{d}z = \frac{\pi}{6}h^3.$$

例13.3.7 求抛物面 $z=1-x^2-y^2$ 与平面 $z=0$ 所围立体 Ω 的重心. 设此立体具有均匀密度 $\rho=1$.

解 引入柱面坐标变换 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=z$. 在此变换下 Ω 对应于 $r\theta z$ 空间的区域 $\Omega_1=\{(r,\theta,z)\mid 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant r\leqslant 1, 0\leqslant z\leqslant 1-r^2\}$. 因此 Ω 的质量为

$$\begin{aligned} M &= \iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega_1} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^{1-r^2}\mathrm{d}z = 2\pi\int_0^1 r(1-r^2)\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

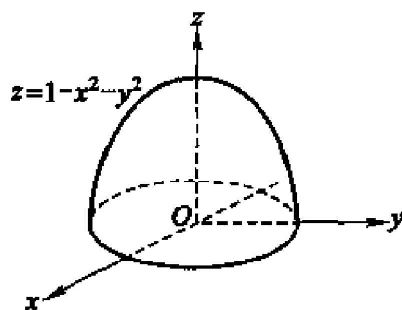


图 13.3.13

由对称性可知 $\bar{x}=\bar{y}=0$. 而

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{1}{M}\iiint_{\Omega_1}rz\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{M}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^{1-r^2}z\mathrm{d}z=\frac{\pi}{M}\int_0^1 r(1-r^2)^2\mathrm{d}r=\frac{1}{3}.$$

因此重心为$\left(0,0,\frac{1}{3}\right)$.

例 13.3.8 计算 $\iiint_{\Omega}z\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 Ω 为球体$x^2+y^2+z^2\leqslant 1$ 在 $z\geqslant 0$ 上的部分.

解 引入球面坐标变换 $x=r\sin\varphi\cos\theta, y=r\sin\varphi\sin\theta, z=r\cos\varphi$. 在此变换下 Ω 对应于区域$\Omega_1=\{(r,\varphi,\theta)\mid 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant r\leqslant 1, 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\}$. 因此

$$\iiint_{\Omega}z\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega_1}r^3\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

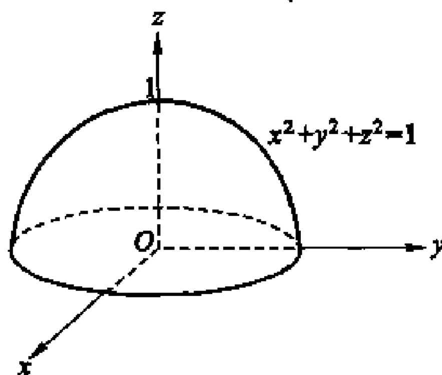


图 13.3.14

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 r^3 \mathrm{e}^{-r^2} \mathrm{d}r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi \mathrm{d}\varphi = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{e}\right).$$

例13.3.9　求椭球体 $\Omega = \left\{(x,y,z) \middle| \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1\right\}$ 的体积.

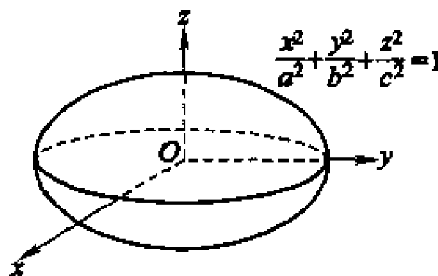


图 13.3.15

解　引入广义球面坐标变换 $x = ar\sin\varphi\cos\theta, y = br\sin\varphi\sin\theta, z = cr\cos\varphi$，于是 Ω 对应于区域 $\Omega_1 = \{(r,\varphi,\theta) \mid 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi\}$. 此变换的 Jacobi 行列式为

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)} = abcr^2\sin\varphi.$$

因此椭球的体积为

$$\iiint_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega_1} abcr^2 \sin\varphi \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$= abc \int_0^1 r^2 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi \mathrm{d}\theta = \frac{4\pi}{3} abc.$$

事实上，在 $\mathbf{R}^n (n \geqslant 3)$ 上都可以引入球面坐标变换

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\varphi_1, \\ x_2 = r\sin\varphi_1\cos\varphi_2, \\ x_3 = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3, \\ \cdots\cdots \\ x_{n-1} = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}, \\ x_n = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}, \end{cases}$$

其中

$$0 \leqslant r < +\infty, 0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \pi, \cdots, 0 \leqslant \varphi_{n-2} \leqslant \pi, 0 \leqslant \varphi_{n-1} \leqslant 2\pi.$$

易计算，这个变换的 Jacobi 行列式为.

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial(r, \varphi_1, \cdots, \varphi_{n-1})} = r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}.$$

例13.3.10 求维球体 $B_n: x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant R^2$ 的体积 V.

解 在球面坐标变换下,B_n 就对应于区域

$$E_n = \{(r, \varphi_1, \cdots, \varphi_{n-2}, \varphi_{n-1}) \mid 0 \leqslant r \leqslant R,$$
$$0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \pi, \cdots, 0 \leqslant \varphi_{n-2} \leqslant \pi, 0 \leqslant \varphi_{n-1} \leqslant 2\pi\},$$

因此利用球面坐标变换得

$$\begin{aligned} V &= \int_{B_n} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n \\ &= \int_{E_n} r^{n-1} \sin^{n-2}\varphi_1 \sin^{n-3}\varphi_2 \cdots \sin^2\varphi_{n-3} \sin\varphi_{n-2} \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi_1 \cdots \mathrm{d}\varphi_{n-2} \mathrm{d}\varphi_{n-1} \\ &= \int_0^R r^{n-1} \mathrm{d}r \int_0^\pi \sin^{n-2}\varphi_1 \mathrm{d}\varphi_1 \cdots \int_0^\pi \sin^2\varphi_{n-3} \mathrm{d}\varphi_{n-3} \int_0^\pi \sin\varphi_{n-2} \mathrm{d}\varphi_{n-2} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi_{n-1}. \end{aligned}$$

由于当 k 为正整数时,

$$\int_0^\pi \sin^{k-1}\varphi \mathrm{d}\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{k-1}\varphi \mathrm{d}\varphi.$$

从公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\varphi \mathrm{d}\varphi = \begin{cases} \dfrac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \dfrac{\pi}{2}, & n = 2m, \\ \dfrac{(2m)!!}{(2m+1)!!}, & n = 2m+1 \end{cases}$$

即得

$$V = \begin{cases} \dfrac{R^{2m}}{m!}\pi^m, & n = 2m, \\ \dfrac{2R^{2m+1}}{(2m+1)!!}(2\pi)^m, & n = 2m+1. \end{cases}$$

均匀球体的引力场模型

设有一个半径为 a 的均匀球体(密度为常数 ρ),我们要计算它所产生的引力场,即求出它对于单位质量的质点的引力.

以球心为原点建立直角坐标系,则球体即 $\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2\}$. 由对称性,只需考虑球体对在 z 轴上的具有单位质量的质点的引力. 设单位质点 P_0 的位置为$(0,0,s)$,显然,球体对质点 P_0 的引力在 x 与 y 方向的分量 $F_x = F_y = 0$.

用微元法求该引力在 z 方向的分量 F_z. 考虑球体上任一点 $P(x,y,z)$,则包含 P 的体积微元 $\mathrm{d}V$ 的质量为 $\rho\mathrm{d}V$. 它对单位质点 P_0 所产生的引力的方向与 $\overrightarrow{P_0P} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + (z-s)\boldsymbol{k}$ 的方向相同,因此引力方向的单位向量为

$$\boldsymbol{e}(x,y,z) = \frac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + (z-s)\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-s)^2}}.$$

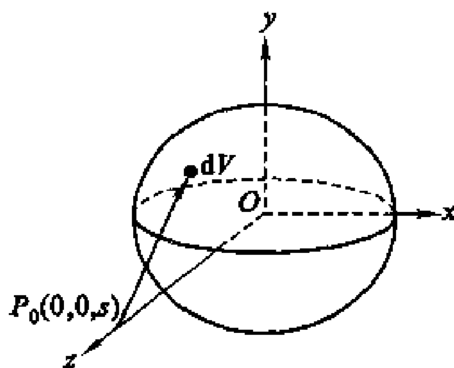


图 13.3.16

由万有引力定律,两质点之间的引力大小与这两个质点的质量的乘积成正比,与它们之间的距离的平方成反比,于是体积微元 $\mathrm{d}V$ 对单位质点 P_0 的引力在 z 轴方向的分量为

$$\mathrm{d}F_z = G\frac{z-s}{(x^2+y^2+(z-s)^2)^{3/2}}\rho\mathrm{d}V.$$

其中 G 为引力常数.因此,整个球体对单位质点 P_0 的引力在 z 轴方向的分量为

$$\begin{aligned}F_z &= G\rho\iiint_{\Omega}\frac{z-s}{(x^2+y^2+(z-s)^2)^{3/2}}\mathrm{d}V\\ &= G\rho\iiint_{\Omega}\frac{z-s}{(x^2+y^2+(z-s)^2)^{3/2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

作球面坐标变换 $x = r\sin\varphi\cos\theta, y = r\sin\varphi\sin\theta, z = r\cos\varphi$ 就得

$$\begin{aligned}F_z &= G\rho\iiint_{\Omega}\frac{(r\cos\varphi - s)}{(r^2+s^2-2rs\cos\varphi)^{3/2}}r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\\ &= G\rho\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^2\mathrm{d}r\int_0^{\pi}\frac{(r\cos\varphi-s)\sin\varphi}{(r^2+s^2-2rs\cos\varphi)^{3/2}}\mathrm{d}\varphi.\end{aligned}$$

在积分

$$I = \int_0^{\pi}\frac{(r\cos\varphi-s)\sin\varphi}{(r^2+s^2-2rs\cos\varphi)^{3/2}}\mathrm{d}\varphi$$

中,令 $\xi^2 = r^2+s^2-2rs\cos\varphi$,那么

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{2s^2r}\int_{|r-s|}^{r+s}\left(\frac{r^2-s^2}{\xi^2}-1\right)\mathrm{d}\xi\\ &= -\frac{1}{2s^2r}\left(2r - \frac{r^2-s^2}{|r-s|} - |r-s|\right)\end{aligned}$$

$$= \begin{cases} 0, & r > s, \\ -\dfrac{2}{s^2}, & r < s. \end{cases}$$

即

$$F_z = \begin{cases} G\rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^a r^2 \mathrm{d}r \left(-\dfrac{2}{s^2}\right) \\ G\rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^s r^2 \mathrm{d}r \left(-\dfrac{2}{s^2}\right) \end{cases} = \begin{cases} -G\rho \dfrac{4\pi a^3}{3s^2}, & s \geqslant a, \\ -G\rho \dfrac{4\pi s}{3}, & s < a. \end{cases}$$

上式的物理意义是：

(1) 当 $s \geqslant a$ 时，即质点在球体外或球面上，球体对质点的引力等效于将整个球体的质量 $\rho \dfrac{4\pi a^3}{3}$ 全部集中在球心时，球心对该质点的引力. 这在天体力学中有很重要的应用，在考虑星球之间的引力时，常常将星球的质量看作是集中于球心来处理.

(2) 当 $s < a$ 时，即质点在球体内部时，球体对质点的引力等效于一个球心与原球相同，面半径为 s 的球体对该质点的引力. 即，等效于将半径为 s 的球体的质量 $\rho \dfrac{4\pi s^3}{3}$ 全部集中在球心时，球心对该质点的引力.

习 题

1. 利用极坐标计算下列二重积分：

(1) $\iint\limits_D \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由圆周 $x^2 + y^2 = R^2 (R > 0)$ 所围区域；

(2) $\iint\limits_D (x + y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由圆周 $x^2 + y^2 = x + y$ 所围区域；

(3) $\iint\limits_D \sqrt{\dfrac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 及坐标轴所围成的在第一象限上的区域.

2. 求下列图形的面积：

(1) $(a_1x + b_1y + c_1)^2 + (a_2x + b_2y + c_2)^2 = 1 (\delta = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0)$ 所围的区域；

(2) 由抛物线 $y^2 = mx, y^2 = nx (0 < m < n)$，直线 $y = \alpha x, y = \beta x (0 < \alpha < \beta)$ 所围的区域；

(3) 三叶玫瑰线 $(x^2 + y^2)^2 = a(x^3 - 3xy^2) (a > 0)$ 所围图形；

(4) 曲线 $\left(\frac{x}{h}+\frac{y}{k}\right)^4=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}(h,k>0;a,b>0)$ 所围图形在 $x>0,y>0$ 的部分.

3. 求极限

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\rho^2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $f(x,y)$ 在原点附近连续.

4. 选取适当的坐标变换计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_D(\sqrt{x}+\sqrt{y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是由坐标轴及抛物线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ 所围区域;

(2) $\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是由椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围区域;

(3) $\iint\limits_D\mathrm{e}^{\frac{x-y}{x+y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是由直线 $x+y=2$,$x=0$ 及 $y=0$ 所围区域.

5. 选取适当的坐标变换计算下列三重积分:

(1) $\iiint\limits_\Omega(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 Ω 为球 $\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$;

(2) $\iiint\limits_\Omega\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 Ω 为椭球 $\left\{(x,y,z)\,\middle|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1\right\}$;

(3) $\iiint\limits_\Omega z\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,$\Omega$ 为柱面 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 及平面 $z=0$,$z=a(a>0)$ 和 $y=0$ 所围区域;

(4) $\iiint\limits_\Omega\frac{z\ln(1+x^2+y^2+z^2)}{1+x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 Ω 为球 $\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$;

(5) $\iiint\limits_\Omega(x+y+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,$\Omega$ 是抛物面 $x^2+y^2=2az$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=3a^2$ 所围的区域.

6. 求球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 和圆柱面 $x^2+y^2=Rx(R>0)$ 所围立体的体积.

7. 求抛物面 $z=6-x^2-y^2$ 与锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围立体的体积.

8. 在一个形状为旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 的容器内,已经盛有 $8\pi\ \mathrm{cm}^3$ 的水,现又倒入 $120\pi\ \mathrm{cm}^3$ 的水,问水面比原来升高多少厘米.

9. 已知球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz$,在其上任一点的密度在数量上等于该点到原点距离的平方,求球体的质量与重心.

10. 求均匀薄片 $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant a^2 \\ z=0 \end{cases}$ 对 z 轴上 $(0,0,c)(c>0)$ 点处的单位质量的质点的引力.

11. 求下列曲面所围区域的体积:

(1) $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2 = ax(a,b,c>0)$;

(2) $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)^2+\left(\dfrac{z}{c}\right)^2 = 1(a,b,c>0)$.

12. 计算下列 n 重积分:

(1) $\int\limits_{\Omega}\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_n}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$,其中 $\Omega = \{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant 1, x_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,n\}$;

(2) $\int\limits_{\Omega}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$,$\Omega$ 为 n 维球体 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant 1$.

§4　反常重积分

无界区域上的反常重积分

设 D 为平面 $\mathbf{R}^2$ 上的无界区域,它的边界是由有限条光滑曲线组成的. D 上的函数 $f(x,y)$ 具有下述性质:它在 D 中任意有界的、可求面积的子区域上可积. 设 Γ 为一条面积为零的曲线,它将 D 割出一个有界子区域,记为 D_Γ(本段总是如此假设),并记 $d(\Gamma)=\inf\{\sqrt{x^2+y^2}\mid(x,y)\in\Gamma\}$ 为 Γ 到原点的距离.

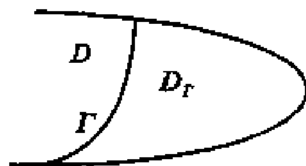


图 13.4.1

定义 13.4.1　*若当 $d(\Gamma)$ 趋于无穷大,即 D_Γ 趋于 D 时,$\iint\limits_{D_\Gamma} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的极限存在,且极限值与 Γ 的取法无关,就称 $f(x,y)$ 在 D 上***可积**,*并记*

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{d(\Gamma)\to+\infty}\iint_{D_\Gamma} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

这个极限值称为 $f(x,y)$ 在无界区域 D 上的**反常二重积分**,这时也称反常二重积分 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ **收敛**. 如果右端的极限不存在,就称这一反常二重积分**发散**.

与一元的情形一样,为了容易入手,我们先考虑函数是非负的情况. 后面将看到,非负函数的反常二重积分的收敛问题具有特殊的意义.

引理 13.4.1 设 $f(x,y)$ 为无界区域 D 上的非负函数. 如果 $\{\Gamma_n\}$ 是一列分段光滑曲线,它们割出的 D 的有界子区域 $\{D_n\}$ 满足

$$D_1 \subset D_2 \subset \cdots \subset D_n \subset \cdots, \text{及} \lim_{n\to\infty} d(\Gamma_n) = +\infty.$$

那么 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 在 D 上收敛的充分必要条件是数列 $\left\{\iint_{D_n} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\}$ 收敛. 在收敛时成立等式

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证 由定义,必要性是显然的,下面证明充分性.

如果 $\left\{\iint_{D_n} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\}$ 收敛,记 $\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = I$. 我们现在证明

$$\lim_{d(\Gamma)\to+\infty}\iint_{D_\Gamma} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = I.$$

对于曲线 Γ,令 $\rho(\Gamma) = \sup\{\sqrt{x^2+y^2} \mid (x,y)\in\Gamma\}$. 由假设 $\lim_{n\to\infty} d(\Gamma_n) = +\infty$ 得知当 n 充分大时, 总成立 $d(\Gamma_n) > \rho(\Gamma)$, 因此由数列 $\left\{\iint_{D_n} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\}$ 的单调增加性得

$$\iint_{D_\Gamma} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \iint_{D_n} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant I.$$

另一方面,由数列 $\left\{\iint_{D_n} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\}$ 收敛于 I 得到,对于任意给定的正数 ε,存在正整数 N,使得

$$\iint_{D_N} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y > I - \varepsilon.$$

因此当 $d(\Gamma) > \rho(\Gamma_N)$ 时就有

$$I \geqslant \iint_{D_\Gamma} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant \iint_{D_N} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y > I - \varepsilon.$$

这就是说

$$\lim_{d(\Gamma)\to+\infty}\iint_{D_\Gamma} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = I.$$

证毕

例 13.4.1 设 $D = \{(x,y) \mid a^2 \leqslant x^2+y^2 < +\infty\}(a>0)$. 记 $r = \sqrt{x^2+y^2}$,

$$f(x,y) = \frac{1}{r^p}(p>0)$$

为定义在 D 上的函数. 证明积分 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 当 $p>2$ 时收敛;当 $p\leqslant 2$ 时发散.

证 取 $\Gamma_\rho = \{(x,y) \mid x^2+y^2 = \rho^2\}(\rho > a)$,它割出的 D 的有界部分为

$$D_\rho = \{(x,y) \mid a^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant \rho^2\}.$$

因此利用极坐标变换得

$$\iint_{D_\rho} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_a^\rho r^{1-p}\mathrm{d}r = 2\pi\int_a^\rho r^{1-p}\mathrm{d}r.$$

当 ρ 趋于正无穷大时,最后一个积分当 $p>2$ 时收敛,当 $p\leqslant 2$ 时发散. 故由 ρ 的任意性,从以上引理就得知所需的结论.

从以上推导可以看出,当 D 为扇形区域

$$\{a\leqslant r<+\infty, \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta \quad (\alpha,\beta\in[0,2\pi])\}$$

时,上述结论也成立.

读者不难参照一元函数的情况导出比较判别法.

定理 13.4.1(比较判别法) 设 D 为 $\mathbf{R}^2$ 上具有分段光滑边界的无界区域,在 D 上成立 $0\leqslant f(x,y)\leqslant g(x,y)$. 那么

(1) 当 $\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 收敛时, $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 也收敛;

(2) 当 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 发散时, $\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 也发散.

证明从略.

无界区域上的反常二重积分有一个重要特点:可积与绝对可积的概念是等价的.

定理 13.4.2 设 D 为 $\mathbf{R}^2$ 上具有分段光滑边界的无界区域,则 $f(x,y)$ 在 D 上可积的充分必要条件是 $|f(x,y)|$ 在 D 上可积.

证 记

$$f^{+}(x,y)=\begin{cases}f(x,y), & 当 f(x,y)\geqslant 0,\\ 0, & 当 f(x,y)<0;\end{cases}$$

及

$$f^{-}(x,y)=\begin{cases}0, & 当 f(x,y)>0,\\ f(x,y), & 当 f(x,y)\leqslant 0.\end{cases}$$

显然,这两个函数都是非负的,且不大于$|f(x,y)|$.

因此,由比较判别法,若$|f(x,y)|$在D上可积,则$f^{+}(x,y)$和$f^{-}(x,y)$均在D上可积,于是

$$f(x,y)=f^{+}(x,y)-f^{-}(x,y)$$

也在D上可积.充分性得证.

下面证明必要性,用反证法.设$f(x,y)$在D上可积,但$|f(x,y)|$在D上不可积.由于

$$|f(x,y)|=f^{+}(x,y)+f^{-}(x,y),$$

那么非负函数$f^{+}(x,y)$和$f^{-}(x,y)$中至少有一个在D上不可积.不妨假设$f^{+}(x,y)$在D上不可积.由引理13.4.1知,对于任意大的正数K,存在一条曲线Γ,使得在它割出的D的有界子区域D_{Γ}上成立

$$\iint_{D_{\Gamma}}f^{+}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y>K.$$

因此用归纳法可知,存在一族曲线$\{\Gamma_n\}$,它们割出的D的有界子区域$\{D_n\}$满足

$$D_1\subset D_2\subset\cdots\subset D_n\subset\cdots,及\lim_{n\to\infty}d(D_n)=+\infty,$$

且

$$\iint_{D_{n+1}}f^{+}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y>2\iint_{D_n}|f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y+n\quad(n=1,2,\cdots).$$

因此

$$\iint_{D_{n+1}-D_n}f^{+}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y>\iint_{D_n}|f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y+n\quad(n=1,2,\cdots).$$

由于$f(x,y)$在$D_{n+1}-D_n$上可积,所以$f^{+}(x,y)$在$D_{n+1}-D_n$上可积(见本章 §1 习题4),其Darboux小和收敛于它在$D_{n+1}-D_n$上的积分.所以充分细分$D_{n+1}-D_n$后,$f^{+}(x,y)$的Darboux小和

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{s_n}m_n^i\Delta\sigma_n^i&>\iint_{D_{n+1}-D_n}f^{+}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-1\\&>\iint_{D_n}|f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y+n-1\quad(n=1,2,\cdots),\end{aligned}$$

其中 $\Delta\sigma_n^i$ 为细分 $D_{n+1}-D_n$ 后所得小区域 σ_n^i 的面积($i=1,2,\cdots,s_n$)，m_n^i 为 $f^+(x,y)$ 在小区域 σ_n^i 上的下确界．由上式知，存在许多 $D_{n+1}-D_n$ 上的小区域，在它们上面成立 $m_n^i>0$，记 P_n 为所有这样的小区域的并集．于是

$$\begin{aligned}\iint\limits_{P_n} f^+(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &\geqslant \sum_{i=1}^{s_n} m_n^i\Delta\sigma_n^i\\ &> \iint\limits_{D_n}|f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y+n-1\quad(n=1,2,\cdots).\end{aligned}$$

记 $E_n=D_n\cup P_n$，就有

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{E_n} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\iint\limits_{D_n} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{P_n} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\iint\limits_{D_n} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{P_n} f^+(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &\geqslant-\iint\limits_{D_n}|f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{P_n} f^+(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y>n-1\quad(n=1,2,\cdots).\end{aligned}$$

问题是 $E_n=D_n\cup P_n$ 不一定连通，这时我们可以用一些狭小的“走廊”将其连通后得到区域 Σ_n，而且这些“走廊”的总面积能充分的小，使得

$$\iint\limits_{\Sigma_n} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y>n-2\quad(n=1,2,\cdots).$$

这说明 $f(x,y)$ 在 D 上不可积，与假设矛盾．

证毕

至于如何计算，我们同样可以采用化累次积分和变量代换的方法．如果一个反常二重积分化为累次积分后，其累次积分是收敛与绝对收敛的，就可以继续计算下去，这就是下面的定理：

定理 13.4.3　设 $f(x,y)$ 在 $D=[a,+\infty)\times[c,+\infty)$ 上连续，且 $\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_c^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$ 和 $\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_c^{+\infty}|f(x,y)|\mathrm{d}y$ 存在，则 $f(x,y)$ 在 D 上可积，而且

$$\iint\limits_{[a,+\infty]\times[c,+\infty]} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_c^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

至于反常二重积分的变量代换，我们有与常义二重积分同样的公式，就是：

定理 13.4.4　变量代换公式

$$\iint\limits_{T(D)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

依然成立，并且等式某一边的积分收敛可以推出另一个积分收敛.

在高维情形，只要将“曲线”换为“曲面”，即可类似定义反常积分，并得到与定理 13.4.1 ~ 定理 13.4.4 相同的结论，这里不再展开了(注意：例 13.4.1 中的“$p>2$”和“$p\leqslant 2$”要分别换为“$p>n$”和“$p\leqslant n$”).

例 13.4.2　计算 $\displaystyle\iint\limits_{0\leqslant x\leqslant y} \mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

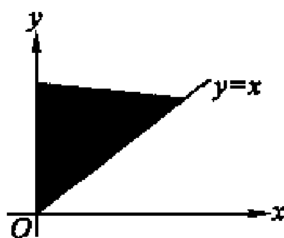


图 13.4.2

解　由于被积函数是正的，因此

$$\iint\limits_{0\leqslant x\leqslant y} \mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{R\to+\infty}\iint\limits_{0\leqslant x\leqslant y\leqslant R} \mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{R\to+\infty}\int_0^R \mathrm{d}x\int_x^R \mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}y$$

$$= \lim_{R\to+\infty} -\int_0^R \mathrm{e}^{-x}[\mathrm{e}^{-y}]_x^R\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty}\int_0^R(\mathrm{e}^{-2x}-\mathrm{e}^{-x-R})\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{R\to+\infty}\left(\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-2R})+\mathrm{e}^{-2R}-\mathrm{e}^{-R}\right) = \frac{1}{2}.$$

事实上，我们已经指出可以直接用化累次积分方法来计算，因此

$$\iint\limits_{0\leqslant x\leqslant y} \mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}y$$

$$= -\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}[\mathrm{e}^{-y}]_x^{+\infty}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

以后我们都采用这种方法，面省略极限过程.

例 13.4.3　计算 $\displaystyle\iint\limits_{\mathbf{R}^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，并求 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

解　利用极坐标变换 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，$\mathbf{R}^2$ 就变换为

$$D = \{(r,\theta)\mid 0\leqslant r<+\infty, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}.$$

因此利用变量代换法得

$$\iint\limits_{\mathbf{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \iint\limits_{D} e^{-r^2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr$$

$$= 2\pi \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr = \pi.$$

又由于 $\mathbf{R}^2 = (-\infty, +\infty) \times (-\infty, +\infty)$,所以化累次积分得

$$\pi = \iint\limits_{\mathbf{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2.$$

因此

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

所以

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

最后一个积分叫 **Poisson** 积分,在概率统计中有着重要应用.

无界函数的反常重积分

设 D 为 $\mathbf{R}^2$ 上的有界区域,点 $P_0 \in D$,$f(x,y)$ 在 $D \setminus \{P_0\}$ 上有定义,但在点 P_0 附近无界(P_0 称为 f 的**奇点**).

设 γ 为内部含有P_0 的、分段光滑的闭曲线,记 σ 为它所包围的区域.设二重积分

$$\iint\limits_{D\setminus\sigma} f(x,y)dxdy$$

总是存在.

定义 13.4.2 设 $\rho(\gamma) = \sup\{|P - P_0| \mid P \in \gamma\}$. 若 $\rho(\gamma)$ 趋于零时 $\iint\limits_{D\setminus\sigma} f(x,y)dxdy$ 的极限存在,且极限值与 γ 的取法无关,就称 $f(x,y)$ 在 D 上可积,并记

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \lim_{\rho(\gamma)\to 0} \iint\limits_{D\setminus\sigma} f(x,y)dxdy,$$

这个极限值称为无界函数 $f(x,y)$ 在 D 上的**反常二重积分**,这时也称无界函数的反常二重积分 $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$ **收敛**. 如果右端的极限不存在,就称这一反常二重积分**发散**.

如果函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上有**奇线**Γ_0,即 $f(x)$ 在曲线 Γ_0 附近无界(但

它在 $D\setminus\Gamma_0$ 上有定义)，同定义 13.4.2 一样可以定义 $f(x,y)$ 在 D 上的反常二重积分. 请读者自行将定义补上.

例 13.4.4 设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant a^2\}(a>0)$. 记 $r=\sqrt{x^2+y^2}$,

$$f(x,y)=\frac{1}{r^p},r\neq 0(p>0)$$

为定义在 $D\setminus\{(0,0)\}$ 上的函数. 证明 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 当 $p<2$ 时收敛；当 $p\geqslant 2$ 时发散.

证 取 $\gamma_\rho=\{(x,y)\mid x^2+y^2=\rho^2\}(0<\rho\leqslant a)$，它所围的区域为

$$D_\rho=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant\rho^2\}.$$

因此利用极坐标变换得

$$\iint\limits_{D\setminus D_\rho} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_\rho^a r^{1-p}\mathrm{d}r=2\pi\int_\rho^a r^{1-p}\mathrm{d}r.$$

当 ρ 趋于零时，最后一个积分当 $p<2$ 时收敛，当 $p\geqslant 2$ 时发散. 故由 ρ 的任意性及 $f(x,y)$ 的非负性，就得知所需的结论.

同无界区域上的反常重积分情形一样，比较判别法也对无界函数的反常重积分成立；此时可积与绝对可积的概念也是等价的；它的计算也可以用化累次积分和变量代换的方法来进行.

无界函数的反常积分的概念也可以推广到高维空间去，这里不详述了.

例 13.4.5 计算 $\iint\limits_D \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant x\}$.

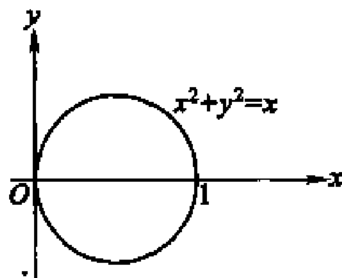


图 13.4.3

解 利用极坐标变换，D 就对应于 $D_1=\{(r,\theta)\mid -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant r\leqslant\cos\theta\}$，因此

$$\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \iint\limits_{D_1} \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\cos\theta} \mathrm{d}r = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \mathrm{d}\theta = 2.$$

注意这里的反常积分通过变量代换变成了常义积分.

例 13.4.6 计算 $\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$,其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$.

解

$$\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \left(1-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\mathrm{d}x = 2-\sqrt{2}.$$

例13.4.7 计算 $\iiint\limits_\Omega \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$,其中 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$.

解 利用球面坐标变换 $x=r\sin\varphi\cos\theta, y=r\sin\varphi\sin\theta, z=r\cos\varphi$,这时 Ω 对应于 $\Omega_1=\{(r,\varphi,\theta)\mid 0\leqslant r\leqslant 1, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant\pi\}$,因此

$$\iiint\limits_\Omega \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}} = \iiint\limits_{\Omega_1} \frac{r^2\sin\varphi}{\sqrt{1-r^2}}\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \int_0^\pi \sin\varphi\mathrm{d}\varphi \int_0^1 \frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}}\mathrm{d}r = \pi^2.$$

注意这时奇线在边界上.

还可用另一种方法计算这个反常积分,并且可以推广到高维,如下所示:当 $n\geqslant 2$ 时,

$$I = \int\limits_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant 1} \frac{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2}}$$

$$= \int\limits_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2\leqslant 1} \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{n-1} \int_{-\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_{n-1}^2}}^{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_{n-1}^2}} \frac{\mathrm{d}x_n}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2}}$$

$$= \pi \int\limits_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2\leqslant 1} \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{n-1} = \begin{cases} \frac{1}{m!}\pi^{m+1}, & n=2m+1, \\ \frac{1}{(2m-1)!!}(2\pi)^m, & n=2m. \end{cases}$$

这里利用了 $\int_{-a}^a \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2-u^2}}=\pi$ 和上节例 13.3.10 的结果.

习 题

1. 讨论下列反常积分的敛散性：

(1) $\iint\limits_{\mathbf{R}^2} \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}$;

(2) $\iint\limits_{D} \dfrac{\varphi(x,y)}{(1+x^2+y^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 1\}$，而且 $0<m\leqslant|\varphi(x,y)|\leqslant M$（$m,M$ 为常数）；

(3) $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \dfrac{\varphi(x,y)}{(1-x^2-y^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $\varphi(x,y)$ 满足与上题同样的条件；

(4) $\iint\limits_{[0,a]\times[0,a]} \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|x-y|^p}$;

(5) $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x^2+y^2+z^2)^p}$.

2. 计算下列反常积分：

(1) $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant x} \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

(2) $\iint\limits_{D} \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p y^q}$，其中 $D=\{(x,y)\mid xy\geqslant 1, x\geqslant 1\}$，且 $p>q>1$；

(3) $\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\geqslant 1} \mathrm{e}^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

(4) $\iiint\limits_{\mathbf{R}^3} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

3. 设 D 是由第一象限内的抛物线 $y=x^2$，圆周 $x^2+y^2=1$ 以及 x 轴所围的平面区域，证明 $\iint\limits_{D}\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ 收敛.

4. 计算积分 $\int\limits_{\mathbf{R}^n} \mathrm{e}^{-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$.

§5 微分形式

有向面积与向量的外积

先来看一个例子.

前面导出二重积分变量代换公式

$$\iint_{T(D)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D} f(x(u,v),y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

时已经指出,加了绝对值号的Jacobi行列式$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right|$的几何意义是 xy 平面上的面积元 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 与 uv 平面上的面积元 $\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ 之间的比例系数. 那么,不加绝对值号的Jacobi行列式$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$的几何意义又是什么呢?一个顺理成章的回答应该是,它代表带符号的面积元之间的比例系数.

带符号的面积称为**有向面积**. 现在我们从最简单的平行四边形出发,给出有向面积的定义.

设 $\boldsymbol{a} = (a_1,a_2)$,$\boldsymbol{b} = (b_1,b_2)$ 为平面 $\mathbf{R}^2$ 上两个线性无关的向量,Π 为 $\mathbf{R}^2$ 上由向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 所张成的平行四边形,我们规定:如果从向量 $\boldsymbol{a}$ 出发在 Π 中旋转到 $\boldsymbol{b}$ 是逆时针方向(见图 13.5.1),这个平行四边形的面积为正,否则为负.

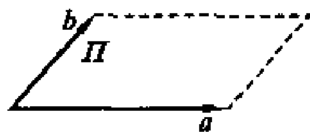


图 13.5.1

容易看出,二阶行列式$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$是由 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 所张成的平行四边形 Π 的有向面积:由解析几何知道,它的绝对值就是 Π 在普通意义下的面积. 将这两个向量用极坐标表示为

$$a = (r_1\cos\theta_1, r_1\sin\theta_1),\quad b = (r_2\cos\theta_2, r_2\sin\theta_2),$$

若从 $\boldsymbol{a}$ 出发在 Π 中旋转到 $\boldsymbol{b}$ 是逆时针方向的,则有 $\theta_1 < \theta_2 < \theta_1 + \pi$,因此

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} &= r_1 r_2(\cos\theta_1\sin\theta_2 - \sin\theta_1\cos\theta_2) \\ &= r_1 r_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) > 0. \end{aligned}$$

与 Π 的有向面积的符号规定一致. 此外,若交换 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的位置,即从 $\boldsymbol{a}$ 出发在 Π 中旋转到 $\boldsymbol{b}$ 是顺时针方向的,则结果反号.

我们将这个行列式称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**外积**,记为 $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$,即

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

易验证外积运算具有以下性质:

(1) 反称性

$$a \wedge b = - b \wedge a, \quad a, b \in \mathbf{R}^2,$$

因此立即得出

$$a \wedge a = 0, \quad a \in \mathbf{R}^2.$$

(2) 双线性(分配律)

$$\left.\begin{aligned} &a \wedge (b + c) = a \wedge b + a \wedge c, \\ &(a + b) \wedge c = a \wedge c + b \wedge c, \\ &(\lambda a) \wedge b = a \wedge (\lambda b) = \lambda(a \wedge b), \end{aligned}\right. \qquad a, b, c \in \mathbf{R}^2, \lambda \in \mathbf{R}.$$

这两个性质的几何意义都非常明显.

例 13.5.1 设 e_1, e_2 为 $\mathbf{R}^2$ 上的一组基(不一定要求正交),

$$a_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2,$$

$$a_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2$$

是 $\mathbf{R}^2$ 中的任意两个向量,那么由外积的性质,

$$\begin{aligned} a_1 \wedge a_2 &= (a_{11}e_1 + a_{12}e_2) \wedge (a_{21}e_1 + a_{22}e_2) \\ &= a_{11}a_{21}e_1 \wedge e_1 + a_{11}a_{22}e_1 \wedge e_2 + a_{12}a_{21}e_2 \wedge e_1 + a_{12}a_{22}e_2 \wedge e_2 \\ &= a_{11}a_{22}e_1 \wedge e_2 + a_{12}a_{21}e_2 \wedge e_1 \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})e_1 \wedge e_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} e_1 \wedge e_2. \end{aligned}$$

上式两端的 $a_1 \wedge a_2$ 和 $e_1 \wedge e_2$ 分别表示由 a_1、a_2 和 e_1、e_2 所张成的平行四边形的有向面积,而行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 就是这两个有向面积之间的比例系数.若行列式大于零,说明这两个有向面积的符号相同,即从 e_1 到 e_2 的旋转方向与从 a_1 到 a_2 的旋转方向相同;若行列式小于零,说明这两个有向面积的符号相反,即从 e_1 到 e_2 的旋转方向与从 a_1 到 a_2 的旋转方向相反.

平面上的向量的外积的讨论可以推广到 $\mathbf{R}^n$ 上去.设

$$a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}), \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

定义它们的外积为

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

它是由 $a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n$ 所张成的平行 $2n$ 面体的有向体积.而且这种外积也满足反称性和分配律.

例如当 $n = 3$ 时,如果 $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}), i = 1, 2, 3$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的三个线性

无关的向量,那么

$$a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

从几何上看就是以 a_1, a_2, a_3 为棱边的平行六面体的有向体积:当 a_1, a_2, a_3 构成右手系时,体积为正;当 a_1, a_2, a_3 构成左手系时,体积为负.

微分形式

从例 13.5.1 得到启发,若能将重积分变量代换公式中的微元关系写成形式

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v,$$

就无须顾忌变量代换的 Jacobi 行列式的符号等问题了.但是,这里的 $\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$(或 $\mathrm{d}u$、$\mathrm{d}v$) 并非向量,因此需要引入微分形式和外积的概念.

我们已经学过,一个可微函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的全微分为

$$\mathrm{d}f = \sum_{n=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i.$$

它是函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 对应于自变量的增量 $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \cdots, \mathrm{d}x_n$ 而产生的相应增量的一阶近似,而且它是 $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \cdots, \mathrm{d}x_n$ 的线性组合.因此,如果将 $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \cdots, \mathrm{d}x_n$ 看作一个线性空间的基,是有其合理性的.我们如下构造这样的线性空间.

设 U 为 $\mathbf{R}^n$ 上的区域,记 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$,$C^1(U)$ 为 U 上连续可微的函数全体.将 $\{\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \cdots, \mathrm{d}x_n\}$ 看作一组基,其线性组合

$a_1(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1 + a_2(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_2 + \cdots + a_n(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_n, a_i(\boldsymbol{x}) \in C^1(U)(i = 1,2,\cdots,n)$

称为**一次微分形式**,简称 **1 - 形式**.1 - 形式的全体记为 Λ^1(严格说应是 $\Lambda^1(U)$).

对于任意 $\omega, \eta \in \Lambda^1$:

$$\omega = a_1(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1 + a_2(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_2 + \cdots + a_n(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_n,$$

$$\eta = b_1(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1 + b_2(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_2 + \cdots + b_n(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_n,$$

我们定义 $\omega + \eta$ 和 $\lambda\omega(\lambda \in C^1(U))$ 为

$$\omega + \eta = (a_1(\boldsymbol{x}) + b_1(\boldsymbol{x}))\mathrm{d}x_1 + (a_2(\boldsymbol{x}) + b_2(\boldsymbol{x}))\mathrm{d}x_2 + \cdots + (a_n(\boldsymbol{x}) + b_n(\boldsymbol{x}))\mathrm{d}x_n,$$

$$\lambda\omega = (\lambda(\boldsymbol{x})a_1(\boldsymbol{x}))\mathrm{d}x_1 + (\lambda(\boldsymbol{x})a_2(\boldsymbol{x}))\mathrm{d}x_2 + \cdots + (\lambda(\boldsymbol{x})a_n(\boldsymbol{x}))\mathrm{d}x_n.$$

这显然满足交换律、结合律以及对 $C^1(U)$ 的乘法分配律.若定义 Λ^1 中的"零元"为

$$0 = 0\mathrm{d}x_1 + 0\mathrm{d}x_2 + \cdots + 0\mathrm{d}x_n,$$

而且定义 $-\omega$ 为

$$-\omega = (-a_1(\boldsymbol{x}))\mathrm{d}x_1 + (-a_2(\boldsymbol{x}))\mathrm{d}x_2 + \cdots + (-a_n(\boldsymbol{x}))\mathrm{d}x_n,$$

那么 Λ^1 成为一个 $C^1(U)$ 上的线性空间.

进一步,在 $\{\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2,\cdots,\mathrm{d}x_n\}$ 中任取2个组成有序元,记为 $\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j(i, j = 1,2,\cdots,n)$,称为 $\mathrm{d}x_i$ 与 $\mathrm{d}x_j$ 的外积(暂时先将它看作一种记号).

仿照向量的外积,规定

$$\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = -\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i, \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_i = 0(i,j = 1,2,\cdots,n).$$

因此共有 C_n^2 个有序元

$$\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n.$$

同 Λ^1 的构造类似,以这些有序元为基就可以构造一个线性空间 Λ^2. Λ^2 的元素称为**二次微分形式**,简称 2 – 形式. 于是 Λ^2 的元素就可表为

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} g_{ij}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j.$$

这称为 2 – 形式的标准形式.

例 13.5.2　在 $\mathbf{R}^3$ 上,Λ^2 的基为 $\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2, \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3$ 和 $\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$,而 $\mathbf{R}^3$ 上的 2 – 形式为

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3} g_{ij}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j.$$

一般地,在 $\{\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2,\cdots,\mathrm{d}x_n\}$ 中任意选取 k 个组成有序元,记为

$$\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k},$$

这里 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 是从集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中选取的任意 k 个整数(同样地,我们也把 $\wedge$ 称为外积). 规定

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_r} \wedge \mathrm{d}x_{i_{r+1}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} \\ &= -\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_{r+1}} \wedge \mathrm{d}x_{i_r} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}, \quad 1 \leqslant r \leqslant k-1,\end{aligned}$$

而且如果 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 中有两个是相同的,则 $\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} = 0$. 因此共有 C_n^k 个有序元

$$\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}, \quad 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n.$$

以这些有序元为基构造一个线性空间 Λ^k. Λ^k 的元素称为 **k 次微分形式**,简称 k – 形式. 于是一般 k – 形式就可表示为

$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n} g_{i_1,i_2,\cdots,i_k}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}.$$

这称为 k – 形式的标准形式.

特别地,Λ^n 是 $C^1(U)$ 上的 $\mathrm{C}_n^n = 1$ 维的线性空间,它的基为 $\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge$

$\cdots \wedge \mathrm{d}x_n$,因此一般 n - 形式为

$$g\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n, \quad g \in C^1(U).$$

注意当 $k > n$ 时,总有 $\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} = 0$,因此 $\Lambda^k = 0$.

U 上的连续可微函数称为 0 - 形式,它们的全体记为 Λ^0,它也是一个线性空间,函数 $g \equiv 1$ 是它的一个基.

例 13.5.3 在 $\mathbf{R}^3$ 上,

$$\begin{aligned}\omega = & x_1\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_1 - x_2\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_2 + x_3\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + \\ & \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + x_1^2\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3\end{aligned}$$

的标准形式为

$$\omega = (1 - x_1)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + x_1^2\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 + (x_2 + x_3)\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3.$$

微分形式的外积

现在把 $\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j$ 中的 $\wedge$ 理解为一种运算.先考虑任意 $\omega, \eta \in \Lambda^1$:

$$\omega = a_1(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1 + a_2(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_2 + \cdots + a_n(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_n,$$

$$\eta = b_1(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1 + b_2(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_2 + \cdots + b_n(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_n,$$

定义 ω 与 η 的外积为

$$\begin{aligned}\omega \wedge \eta &= \sum_{i,j=1}^{n} a_i(\boldsymbol{x})b_j(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j \\ &= \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_i(\boldsymbol{x})b_j(\boldsymbol{x}) - a_j(\boldsymbol{x})b_i(\boldsymbol{x}))\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j \\ &= \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \begin{vmatrix} a_i(\boldsymbol{x}) & a_j(\boldsymbol{x}) \\ b_i(\boldsymbol{x}) & b_j(\boldsymbol{x}) \end{vmatrix} \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j,\end{aligned}$$

它是 Λ^2 中的元素.

显然,这样的外积定义可以推广到任意的 Λ^i 与 Λ^j 上去.为此,将前面的线性空间 $\Lambda^0, \Lambda^1, \cdots, \Lambda^n$ 合并为

$$\Lambda = \Lambda^0 + \Lambda^1 + \cdots + \Lambda^n,$$

则 Λ 是一个 $\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \cdots + \mathrm{C}_n^n = 2^n$ 维的线性空间.它的基即为 $\Lambda^0, \Lambda^1, \cdots, \Lambda^n$ 中的基的全体,Λ 中的元素的一般形式为

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 + \cdots + \omega_n \quad \omega_i \in \Lambda^i, i = 0, 1, \cdots, n.$$

现在在 Λ 上引入外积运算 $\wedge$:

记 $\mathrm{d}x_I = \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$,$\mathrm{d}x_J = \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \mathrm{d}x_{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_q}$.则 $\mathrm{d}x_I$ 与 $\mathrm{d}x_J$ 的外积定义为

$$\mathrm{d}x_I \wedge \mathrm{d}x_J = \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p} \wedge \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \mathrm{d}x_{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_q},$$

它是 $(p + q)$ - 形式.显然如果 I 和 J 中有公共元素,那么 $\mathrm{d}x_I \wedge \mathrm{d}x_J = 0$.对

于一般 p - 形式 $\omega=\sum\limits_{I}g_I(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_I$ 和 q - 形式 $\eta=\sum\limits_{J}h_J(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_J$，定义 ω 和 η 的外积 $\omega\wedge\eta$ 为

$$\omega\wedge\eta=\sum_{I,J}g_I(\boldsymbol{x})h_J(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_I\wedge\mathrm{d}x_J.$$

它是 $(p+q)$ - 形式. 在 Λ 中引入外积运算后，就明白为什么在微分形式的定义中采用外积符号 $\wedge$，它把定义与运算统一起来. 在外积定义中，实际上假定了 $p\geqslant1,q\geqslant1$. 对于 0 - 形式 f，我们补充定义

$$f\omega=f\wedge\omega=\sum_{I}f(\boldsymbol{x})g_I(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_I,\quad\omega\in\Lambda^p.$$

外积有以下性质.

性质 1 设 $\omega\in\Lambda^p,\eta\in\Lambda^q$，则当 $p+q>n$ 时

$$\omega\wedge\eta=0.$$

这是因为当 $p+q>n$ 时，$\{i_1,i_2,\cdots,i_p\}$ 和 $\{j_1,j_2,\cdots,j_p\}$ 必有公共元素.

性质 2 设 $\omega\in\Lambda^p,\eta\in\Lambda^q$，则

$$\omega\wedge\eta=(-1)^{pq}\eta\wedge\omega.$$

证 由外积的线性性质，只要对 $\omega=g(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}$ 和 $\eta=h(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\mathrm{d}x_{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}$ 证明即可. 若 $\{i_1,i_2,\cdots,i_p\}$ 和 $\{j_1,j_2,\cdots,j_p\}$ 有公共元素，则有 $\omega\wedge\eta=\eta\wedge\omega=0$，命题已经成立. 否则由定义知

$$\omega\wedge\eta=g(\boldsymbol{x})h(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\mathrm{d}x_{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q},$$

$$\eta\wedge\omega=h(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\mathrm{d}x_{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_q}\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}.$$

要使 $\omega\wedge\eta$ 中的微分变到 $\eta\wedge\omega$ 中的顺序，只要把每个 $\mathrm{d}x_{i_r}(r=1,2,\cdots,p)$ 与 q 个 $\mathrm{d}x_{i_s}(s=1,2,\cdots,q)$ 交换次序，这总共要进行 pq 个外积次序的交换.

证毕

推论 设 $\omega\in\Lambda^p,\omega\neq0$，则当 p 为奇数时，$\omega\wedge\omega=0$.

注意：当 p 为偶数时，不一定成立 $\omega\wedge\omega=0$.

例 13.5.4 在 $\mathbf{R}^4$ 上，如果 $\omega=\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2+\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4$，那么

$$\begin{aligned}\omega\wedge\omega&=(\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2+\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4)\wedge(\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2+\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4)\\&=\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4+\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4\wedge\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\\&=2\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4.\end{aligned}$$

性质3 对于任意 $\omega,\eta,\sigma\in\Lambda$，成立

分配律：$(\omega+\eta)\wedge\sigma=\omega\wedge\sigma+\eta\wedge\sigma,$

$\sigma\wedge(\omega+\eta)=\sigma\wedge\omega+\sigma\wedge\eta.$

结合律：$(\omega\wedge\eta)\wedge\sigma=\omega\wedge(\eta\wedge\sigma).$

证明留作习题.

例 13.5.5 在 $\mathbf{R}^n$ 上,如果 $\omega = \sum_i f_i \mathrm{d}x_i, \eta = \sum_j g_j \mathrm{d}x_j$,则

$$\omega \wedge \eta = \sum_{i,j} f_i g_j \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (f_i g_j - f_j g_i) \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j.$$

如果 $\lambda = \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} h_{jk} \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_k$,则

$$\begin{aligned} \omega \wedge \lambda &= \sum_{i, j<k} f_i h_{jk} \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_k \\ &= \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} (f_i h_{jk} - f_j h_{ik} + f_k h_{ij}) \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_k. \end{aligned}$$

现在回到一开始讲的问题,来看微分形式的一个应用.先以极坐标变换

$$T: x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

为例,这时 $\mathrm{d}x = \cos\theta \mathrm{d}r - r\sin\theta \mathrm{d}\theta, \mathrm{d}y = \sin\theta \mathrm{d}r + r\cos \mathrm{d}\theta$,因此

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta = r \mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta.$$

记 $r\theta$ 坐标系中的小矩形 σ 的有向面积为 $\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta$,视 σ 的象 $T(\sigma)$ 为小平行四边形,记它的有向面积为 $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$,则

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta$$

表示在极坐标变换下有向面积元 $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ 与 $\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta$ 之间的关系,$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r > 0$ 说明 σ 与 $T(\sigma)$ 的有向面积具有相同的符号(见图 13.5.2).

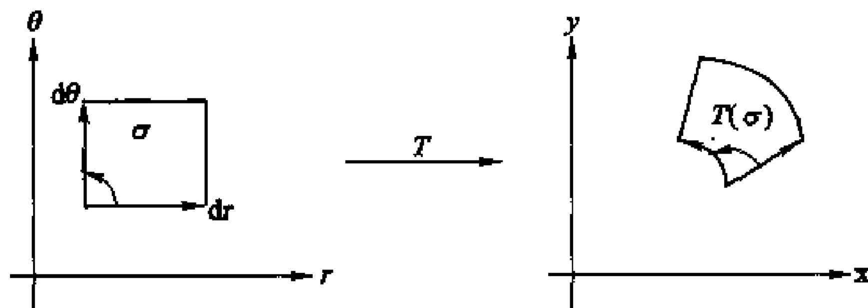


图 13.5.2

若我们将 r 与 θ 交换次序,即将 $r\theta$ 坐标系改为 θr 坐标系,则坐标变换公式应改变为

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,r)} \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}r,$$

$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,r)} = -r < 0$ 说明了 σ 与 $T(\sigma)$ 的有向面积具有相反的符号(见图 13.5.3).

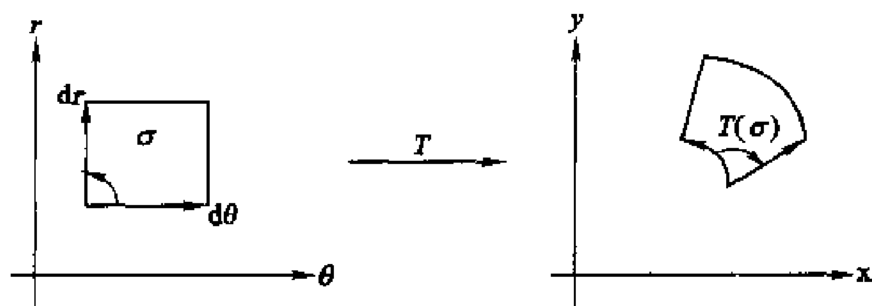


图 13.5.3

这样,就得到二重积分的关于极坐标的变量代换公式

$$\iint\limits_{T(D)} f(x,y)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \iint\limits_{D} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta$$

$$= \iint\limits_{D} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,r)}\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}r.$$

一般地,设 $\mathbf{R}^n$ 中的坐标变换为

$$T: y_1 = y_1(x_1,\cdots,x_n), y_2 = y_2(x_1,\cdots,x_n),\cdots, y_n = y_n(x_1,\cdots,x_n).$$

对上式取微分,得到

$$\mathrm{d}y_i = \sum_k \frac{\partial y_i}{\partial x_k}\mathrm{d}x_k (i = 1,2,\cdots,n).$$

从此式得到(留作习题)

$$\mathrm{d}y_1 \wedge \mathrm{d}y_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_n = \frac{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

这说明在坐标变换下,基本 n - 形式之间相差的因子就是映射的 Jacobi 行列式. 如果也将 $\mathrm{d}y_1 \wedge \mathrm{d}y_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_n$ 和 $\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$ 分别看成坐标系 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 和坐标系 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 中的有向体积元($n = 2$ 时为有向面积元),那么同样成立用微分形式表示的重积分变量代换公式

$$\int\limits_{T(D)} f(y_1,y_2,\cdots,y_n)\mathrm{d}y_1 \wedge \mathrm{d}y_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_n$$

$$= \int\limits_{D} f(y_1(\boldsymbol{x}),y_2(\boldsymbol{x}),\cdots,y_n(\boldsymbol{x}))\frac{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

这时就无须再对 Jacobi 行列式加上绝对值,以后会知道,这将带来很大的方便.这是引入微分形式的目的之一.

习 题

1. 设

$\omega = a_0 + a_1 dx_1 + a_2 dx_1 \wedge dx_3 + a_3 dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4,$

$\eta = b_1 dx_1 \wedge dx_2 + b_2 dx_1 \wedge dx_3 + b_3 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + b_4 dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4.$

求 $\omega + \eta$ 和 $\omega \wedge \eta$.

2. 求

$\omega = x_1 dx_1 \wedge dx_2 + x_3 dx_2 \wedge dx_3 + (1 + x_2^2) dx_1 \wedge dx_3 + x_2^2 dx_3 \wedge dx_1 + (x_3^2 + x_2^2) dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 - x_1^2 dx_3 \wedge dx_2$

的标准形式.

3. 证明外积满足分配律和结合律.

4. 写出微分形式 $dx \wedge dy \wedge dz$ 在下列变换下的表达式.

1) 柱面坐标变换

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z.$$

2) 球面坐标变换

$$x = r\sin\varphi\cos\theta, \quad y = r\sin\varphi\sin\theta, \quad z = r\cos\varphi.$$

5. 设 $\omega_j = \sum_{i=1}^{n} a_i^j dx_i, j = 1,2,\cdots,n$, 为 $\mathbf{R}^n$ 上的 1－形式, 证明

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_n = \det(a_i^j) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

第十四章　曲线积分、曲面积分与场论

§1　第一类曲线积分与第一类曲面积分

第一类曲线积分

在设计曲线形细长构件时，常常需要计算它们的质量，而构件的线密度（单位长度的质量）却是因点而异的.工程技术人员常常用这样的方法来计算一个构件的质量：设想构件为空间上一条具有质量的曲线 L，L 上任一点 (x,y,z) 处的线密度为 $\rho(x,y,z)$，这样就把实际问题定量化.

如图 14.1.1 将 L 分成 n 个小曲线段 $L_i(i=1,2,\cdots,n)$，并在 L_i 上任取一点 (ξ_i,η_i,ζ_i)，那么当每个 L_i 的长度 Δs_i 都很小时，每一小段的质量就近似地等于 $\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$，于是整个 L 的质量就近似地等于

$$\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i.$$

当对 L 的分割越来越细（即所有的小弧段的最大长度 λ 趋于零）时，这个近似值的极限就是构件的质量，这就解决了所提出的问题.

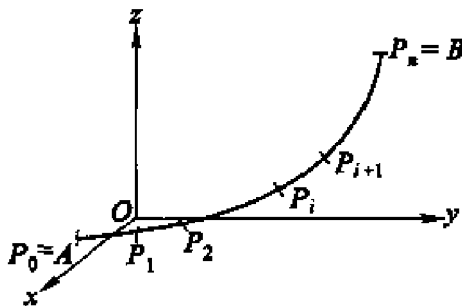


图 14.1.1

这种思想使我们引入第一类曲线积分的概念.

定义 14.1.1　设 L 是空间 $\mathbf{R}^3$ 上可求长的连续曲线，其端点为 A 和 B，函数 $f(x,y,z)$ 在 L 上有界.令 $A=P_0$，$B=P_n$，在 L 上从 A 到 B 顺序地插入分点 $P_1,P_2,\cdots,P_{n-1}$.分别在每个小弧段 $P_{i-1}P_i$ 上任取一点 (ξ_i,η_i,ζ_i)，并记第 i 个小弧段 $P_{i-1}P_i$ 的长度为 $\Delta s_1(i=1,2,\cdots,n)$，作和式

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i.$$

如果当所有小弧段的最大长度 λ 趋于零时，这个和式的极限存在且与分点 $\{P_i\}$ 的取法及 $P_{i-1}P_i$ 上的点 (ξ_i,η_i,ζ_i) 的取法无关，则称这个极限值为 $f(x,$

$y,z)$ 在曲线 L 上的**第一类曲线积分**,记为

$$\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s \text{ 或 } \int_L f(P)\mathrm{d}s.$$

即

$$\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i.$$

其中 $f(x,y,z)$ 称为**被积函数**,L 称为**积分路径**.

在平面情况下,函数 $f(x,y)$ 在平面曲线 L 上的第一类曲线积分记为 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$.

这样,本节一开始所要求的构件质量就可表为

$$M = \int_L \rho(x,y,z)\mathrm{d}s.$$

显然,从定义可以看出,第一类曲线积分是与积分路径的方向无关的,且第一类曲线积分具有以下性质:

性质 1(线性性) 如果函数 f,g 在 L 上的第一类曲线积分存在,则对任何常数 α,β,成立等式

$$\int_L(\alpha f+\beta g)\mathrm{d}s = \alpha\int_L f\mathrm{d}s + \beta\int_L g\mathrm{d}s.$$

性质2(路径可加性) 设曲线 L 分成了两段 L_1,L_2. 如果函数 f 在 L 上的第一类曲线积分存在,则函数 f 在 L_1 和 L_2 上的第一类曲线积分也存在. 反之,如果函数 f 在 L_1 和 L_2 上的第一类曲线积分存在,则函数 f 在 L 上的第一类曲线积分也存在. 并成立等式

$$\int_L f\mathrm{d}s = \int_{L_1} f\mathrm{d}s + \int_{L_2} f\mathrm{d}s.$$

现在讨论如何计算这个积分. 设 L 的方程为

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), \alpha\leqslant t\leqslant\beta,$$

其中 $x(t),y(t),z(t)$ 具有连续导数,且 $x'(t),y'(t),z'(t)$ 不同时为零(即 L 为光滑曲线),那么 L 是可求长的,且曲线的弧长为

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

定理14.1.1 设函数 $f(x,y,z)$ 在 L 上连续,则它在 L 上的第一类曲线积分存在,且

$$\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

证 记

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} \mathrm{d}t.$$

如定义中一样,对 L 顺次插入分点 $P_i(x(t_i), y(t_i), z(t_i))(i = 1, 2, \cdots, n-1)$,并设 $P_0 = (x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha)), P_n = (x(\beta), y(\beta), z(\beta))$. 注意,这时成立 $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = \beta$. 记小弧段 $P_{i-1}P_i$ 的长度为 Δs_i,那么 $\Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} \mathrm{d}t$. 令

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x(\xi_i), y(\xi_i), z(\xi_i)) \Delta s_i,$$

其中 $(x(\xi_i), y(\xi_i), z(\xi_i))$ 为弧段 $P_{i-1}P_i$ 上任意一点. 那么

$$\begin{aligned} \sigma - I = & \sum_{i=1}^{n} f(x(\xi_i), y(\xi_i), z(\xi_i)) \Delta s_i \\ & - \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} \mathrm{d}t \\ = & \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} [f(x(\xi_i), y(\xi_i), z(\xi_i)) \\ & - f(x(t)), y(t), z(t))] \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} \mathrm{d}t \end{aligned}$$

设 L 的弧长为 S. 由于 $f(x, y, z)$ 在 L 上连续,因此一致连续. 所以对任意正数 ε,当 $\lambda = \max(\Delta s_i)$ 充分小时,$f(x, y, z)$ 在每个弧段 $P_{i-1}P_i$ 上的振幅均小于 ε / S. 因此成立

$$\begin{aligned} |\sigma - I| \leqslant & \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} | f(x(\xi_i), y(\xi_i), z(\xi_i)) - f(x(t), y(t), z(t)) | \\ & \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} \mathrm{d}t \\ & < \frac{\varepsilon}{S} \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} \mathrm{d}t = \frac{\varepsilon}{S} S = \varepsilon. \end{aligned}$$

即

$$\int_L f(x, y, z) \mathrm{d}s = \lim_{\lambda \to 0} \sigma = I.$$

证毕

特别地,如果平面上的光滑曲线的方程为

$$y = y(x), a \leqslant x \leqslant b,$$

则

$$\int_L f(x, y) \mathrm{d}s = \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)} \mathrm{d}x.$$

例14.1.1 计算 $I = \int_L \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}} \mathrm{d}s$,其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$,直线 y

$=x$ 及 x 轴在第一象限所围图形的边界.

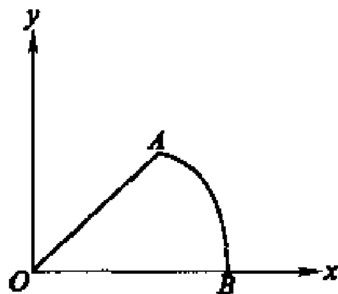


图 14.1.2

解　由于

$$I=\int_{\overline{OA}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds+\int_{\overset{\frown}{AB}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds+\int_{\overline{OB}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds,$$

而线段 $\overline{OA}$ 的方程为 $y=x, 0\leqslant x\leqslant a/\sqrt{2}$ 所以

$$\int_{\overline{OA}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\int_0^{a/\sqrt{2}} e^{\sqrt{2}x}\sqrt{2}dx=e^a-1.$$

圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的参数方程为 $x=a\cos\theta, y=a\sin\theta, 0\leqslant\theta\leqslant\pi/4$ 所以

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\int_0^{\pi/4} e^a a\,d\theta=\frac{\pi}{4}ae^a.$$

线段 $\overline{OB}$ 的方程为 $y=0, 0\leqslant x\leqslant a$,所以

$$\int_{\overline{OB}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\int_0^a e^x dx=e^a-1.$$

因此

$$I=2(e^a-1)+\frac{\pi}{4}ae^a.$$

例14.1.2　已知一条非均匀金属线 L 的方程为

$$x=e^t\cos t, y=e^t\sin t, z=e^t, 0\leqslant t\leqslant 1,$$

它在每点的线密度与该点到原点的距离的平方成反比,而且在点(1,0,1)处的线密度为1.求它的质量 M.

解　由题意,线密度

$$\rho(x,y,z)=\frac{k}{x^2+y^2+z^2}=\frac{k}{2e^{2t}},$$

其中 k 为常数.由 $\rho(1,0,1)=1$ 得 $k=2$,所以 $\rho(x,y,z)=e^{-2t}$.因此

$$M=\int_L \rho(x,y,z)ds=\int_0^1 e^{-2t}\sqrt{3}e^t dt=\sqrt{3}\int_0^1 e^{-t}dt=\sqrt{3}(1-e^{-1}).$$

曲面的面积

设曲面 Σ 的方程为

$$x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v), (u,v) \in D,$$

即

$$\boldsymbol{r}(u,v) = x(u,v)\boldsymbol{i} + y(u,v)\boldsymbol{j} + z(u,v)\boldsymbol{k},$$

这里 D 为 uv 平面上具有光滑(或分段光滑)边界的有界闭区域.假设这个映射是一一对应的,且 x,y,z 对 u 和 v 有连续偏导数,相应的 Jacobi 矩阵

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

满秩.

我们先看这个假设的意义.对曲面上任一点 $Q(x_0,y_0,z_0)(x_0 = x(u_0,v_0), y_0 = y(u_0,v_0), z = z(u_0,v_0))$, 曲线 $\boldsymbol{r}(u,v_0) = x(u,v_0)\boldsymbol{i} + y(u,v_0)\boldsymbol{j} + z(u,v_0)\boldsymbol{k}$ 就是曲面上过 Q 点的 u - 曲线;曲线 $\boldsymbol{r}(u_0,v) = x(u_0,v)\boldsymbol{j} + z(u_0,v)\boldsymbol{k}$ 就是曲面上过 Q 点的 v - 曲线.这两条曲线在 Q 点的切向量分别为

$$\boldsymbol{r}_u(u_0,v_0) = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)\boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0)\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{r}_v(u_0,v_0) = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)\boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0)\boldsymbol{k},$$

因此,Jacobi 矩阵满秩就保证了 $\boldsymbol{r}_u(u_0,v_0)$ 与 $\boldsymbol{r}_v(u_0,v_0)$ 线性无关.所以它们所张成的平面就是曲面 Σ 在 Q 点的切平面;向量 $\boldsymbol{r}_u(u_0,v_0) \times \boldsymbol{r}_v(u_0,v_0)$ 就是曲面 Σ 在 Q 点的法向量,它的模长 $\|\boldsymbol{r}_u(u_0,v_0) \times \boldsymbol{r}_v(u_0,v_0)\|$ 就是切平面上以 $\boldsymbol{r}_u(u_0,v_0)$ 和 $\boldsymbol{r}_v(u_0,v_0)$ 为邻边的平行四边形的面积.

现在用微元法来计算曲面 Σ 的面积.

首先考察 D 中一个矩形微元 σ,它的四个顶点为

$$P_1(u_0,v_0), P_2(u_0+\Delta u,v_0), P_3(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v), P_4(u_0, v_0+\Delta v),$$

它被映射为 Σ 上的以 Q_1,Q_2,Q_3,Q_4 为顶点的小曲面片 $\tilde{\sigma}$,这里

$Q_1 = (x(u_0,v_0), y(u_0,v_0), z(u_0,v_0))$;

$Q_2 = (x(u_0+\Delta u,v_0), y(u_0+\Delta u,v_0), z(u_0+\Delta u,v_0))$;

$Q_3 = (x(u_0+\Delta u,v_0+\Delta v), y(u_0+\Delta u,v_0+\Delta v), z(u_0+\Delta u,v_0+\Delta v))$;

$Q_4 = (x(u_0,v_0+\Delta v), y(u_0,v_0+\Delta v), z(u_0,v_0+\Delta v))$.

(见图 14.1.3). 那么

$$\overrightarrow{Q_1Q_2} = \boldsymbol{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \boldsymbol{r}(u_0, v_0) = \boldsymbol{r}_u(u_0, v_0)\Delta u + o(\Delta u),$$

$$\overrightarrow{Q_1Q_4} = \boldsymbol{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \boldsymbol{r}(u_0, v_0) = \boldsymbol{r}_v(u_0, v_0)\Delta v + o(\Delta v).$$

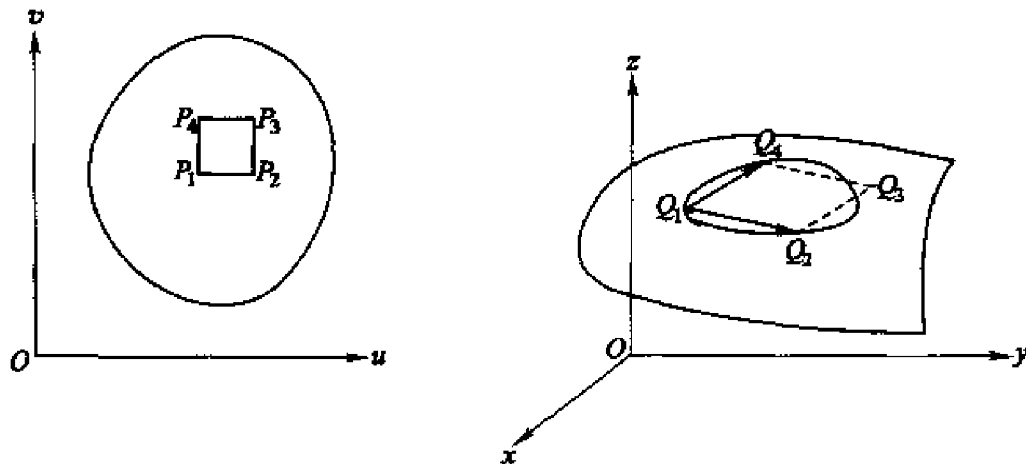


图 14.1.3

显然小曲面片 $\tilde{\sigma}$ 的面积近似地等于$\overrightarrow{Q_1Q_2}$ 与$\overrightarrow{Q_1Q_4}$ 所张成的平行四边形的面积,忽略高阶无穷小量后,$\overrightarrow{Q_1Q_2}$ 与$\overrightarrow{Q_1Q_4}$ 所张成的平行四边形的面积近似地等于 $\| \boldsymbol{r}_u(u_0, v_0) \times \boldsymbol{r}_v(u_0, v_0) \| \Delta u\Delta v$. 这就是说,忽略高阶无穷小量后,小曲面片 $\tilde{\sigma}$ 的面积近似地等于切平面上由 $\boldsymbol{r}_u(u_0, v_0)\Delta u$ 和 $\boldsymbol{r}_v(u_0, v_0)\Delta v$ 所张成的平行四边形的面积. 即小曲面片 $\tilde{\sigma}$ 的面积

$$\Delta S \approx \| \boldsymbol{r}_u(u_0, v_0) \times \boldsymbol{r}_v(u_0, v_0) \| \Delta u\Delta v.$$

也就是说,曲面的面积微分

$$\mathrm{d}S = \| \boldsymbol{r}_u(u_0, v_0) \times \boldsymbol{r}_v(u_0, v_0) \| \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

于是,曲面的面积就为

$$S = \iint_D \| \boldsymbol{r}_u(u, v) \times \boldsymbol{r}_v(u, v) \| \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

显然,利用面积的可加性可以将曲面的面积的计算方法推广到由有限片这样的曲面拼成的分片光滑曲面上去.

注　我们将光滑曲线的内接折线长度的极限定义为曲线的弧长,但这一定义不能推广到光滑曲面的面积定义上去. Schwarz 曾举过一个例子:即使对一段圆柱面,都无法用"内接多面形之面积的极限"来定义它的面积.

至于如何计算曲面的面积,我们有以下的定理:

定理 14.1.2　对满足上述假设条件的曲面 Σ,它的面积为

$$S = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

其中

$$E = \boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_u = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2,$$
$$F = \boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v,$$
$$G = \boldsymbol{r}_v \cdot \boldsymbol{r}_v = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2,$$

它称为曲面的 **Gauss 系数**.

证 由于

$$\boldsymbol{r}_u = x_u\boldsymbol{i} + y_u\boldsymbol{j} + z_u\boldsymbol{k};$$
$$\boldsymbol{r}_v = x_v\boldsymbol{i} + y_v\boldsymbol{j} + z_v\boldsymbol{k}.$$

则

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = (x_u\boldsymbol{i} + y_u\boldsymbol{j} + z_u\boldsymbol{k}) \times (x_v\boldsymbol{i} + y_v\boldsymbol{j} + z_v\boldsymbol{k})$$
$$= \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\boldsymbol{i} + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\boldsymbol{j} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\boldsymbol{k}.$$

所以

$$\|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v\|^2 = \left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]^2,$$

而直接计算就得知

$$EG - F^2 = \left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]^2.$$

证毕

现在考虑两种特殊情况:

(1) 曲面 Σ 的方程为 $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$,其中 $f(x,y)$ 为连续可微函数,D 为具有分段光滑边界的有界区域.

此时 Σ 的方程为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + f(x,y)\boldsymbol{k}.$$

因此

$$\boldsymbol{r}_x = \boldsymbol{i} + f_x(x,y)\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}_y = \boldsymbol{j} + f_y(x,y)\boldsymbol{k}.$$

而 $EG - F^2 = (1 + f_x^2)(1 + f_y^2) - (f_x f_y)^2 = 1 + f_x^2 + f_y^2$. 于是,$\Sigma$ 的面积为

$$S = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2(x,y) + f_y^2(x,y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(2) 曲面 Σ 的方程为 $H(x,y,z) = 0$,其中 $H(x,y,z)$ 是连续可微函数,且在 Σ 上 $H_z(x,y,z) \neq 0$. 进一步假设 Σ 在 xy 平面上的投影一一对应地将 Σ 映为具有分段光滑边界的有界区域 D.

这时由一一对应性,从 $H(x,y,z)=0$ 就可得出 z 为 x,y 的函数:

$$z=f(x,y),(x,y)\in D.$$

遗憾的是 $f(x,y)$ 不一定可以显式表达.但由于在 Σ 上 $H_z(x,y,z)\neq 0$,由隐函数存在定理知,

$$f_x=-\frac{H_x}{H_z},f_y=-\frac{H_y}{H_z}.$$

从而 Σ 的面积为

$$\begin{aligned}S&=\iint_D\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_D\sqrt{1+\left(-\frac{H_x}{H_z}\right)^2+\left(-\frac{H_y}{H_z}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_D\frac{\|\mathrm{grad}H\|}{|H_z|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

例 14.1.3　求抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $z=1$ 所割下的有界部分 Σ 的面积.

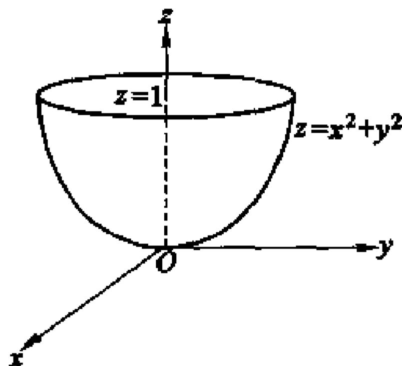


图 14.1.4

解　曲面 Σ 的方程为 $z=x^2+y^2,(x,y)\in D$,这里 D 为它在 xy 平面的投影区域 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$.因此

$$\begin{aligned}S&=\iint_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{1+4r^2}\,r\mathrm{d}r=\frac{\sqrt{5}-1}{6}\pi.\end{aligned}$$

例14.1.4　设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=2Rz$ 包含在锥面 $z^2=3(x^2+y^2)$ 内的部分,求它的面积.

解法一　在球面坐标

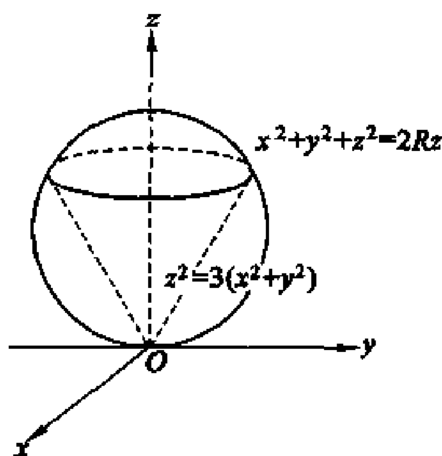


图 14.1.5

$$x = r\sin\varphi\cos\theta, y = r\sin\varphi\sin\theta, z = r\cos\varphi$$

下,所给的球面方程为 $r = 2R\cos\varphi$,于是 Σ 的参数方程为

$$x = 2R\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta, y = 2R\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta, z = R\cos^2\varphi,$$

其中 $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{6}$. 经计算可知

$$EG - F^2 = 4R^4\sin^2 2\varphi.$$

注意到对称性,Σ 的面积为它在第一卦限部分的 4 倍,所以 Σ 的面积为

$$S = 4\iint\limits_{\substack{0\leqslant\theta\leqslant\pi/2\\0\leqslant\varphi\leqslant\pi/6}} 2R^2\sin 2\varphi\,d\varphi\,d\theta = 8R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin 2\varphi\,d\varphi = \pi R^2.$$

解法二 球面的方程为 $H(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2Rz = 0$. 这时

$$H_x = 2x, H_y = 2y, H_z = 2z - 2R.$$

由于 Σ 在 xy 平面的投影为 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant \frac{3}{4}R^2\}$,所以 Σ 的面积为

$$S = \iint\limits_D \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-R)^2}}{z - R}dxdy.$$

注意到在球面上成立 $x^2 + y^2 + (z-R)^2 = R^2$,就得到

$$S = \iint\limits_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}}dxdy = R\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R}\frac{r\,dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \pi R^2.$$

第一类曲面积分

设空间中一曲面 Σ 上分布着质量,任一点 (x,y,z) 处的面密度(单位面积上的质量)由分布函数 $\rho(x,y,z)$ 确定,问如何求出 Σ 上的总质量.

显然,这个问题的本质与前面计算具有质量的曲线上的总质量的思想是

类似的,因此解决的思路也是相同的:先把它分成一些小片,估计每一小片上的质量并相加,最后取极限以获得精确值.这同样是一个积分的概念.

定义 14.1.2 设曲面 Σ 为有界光滑(或分片光滑)曲面,函数 $z = f(x, y, z)$ 在 Σ 上有界.将曲面 Σ 用一个光滑曲线网分成 n 片小曲面 $\Delta\Sigma_1, \Delta\Sigma_2, \cdots, \Delta\Sigma_n$,并记 $\Delta\Sigma_i$ 的面积为 ΔS_i.在每片 $\Delta\Sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i, η_i, ζ_i),作和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i.$$

如果当所有小曲面 $\Delta\Sigma_i$ 的最大直径 λ 趋于零时,这个和式的极限存在,且与小曲面的分法和点 (ξ_i, η_i, ζ_i) 的取法无关,则称此极限值为 $f(x, y, z)$ 在曲面 Σ 上的**第一类曲面积分**,记为 $\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)\mathrm{d}S$,即

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)\mathrm{d}S = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i,$$

其中 $f(x, y, z)$ 称为**被积函数**,Σ 称为**积分曲面**.

这样,本小节一开始所要求的曲面 Σ 上的总质量为

$$M = \iint\limits_{\Sigma} \rho(x, y, z)\mathrm{d}S.$$

由第一类曲面积分与第一类曲线积分的定义可以推断出,第一类曲线积分的性质与计算方法,只要稍作处理,就可以移植到第一类曲面积分上来,因此以下结论不再重复证明.

设 Σ 的方程为

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in D,$$

这里 D 为 uv 平面上具有分段光滑边界的区域.进一步设这个映射是一一对应的,且满足本节第二部分开始时的假设.那么如果 $f(x, y, z)$ 在 Σ 上连续,则它在 Σ 上的第一类曲面积分存在,且成立以下计算公式

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)\mathrm{d}S = \iint\limits_{D} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\sqrt{EG - F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

其中 E, F, G 的表示见定理 14.1.2.特别地,当 Σ 的方程为 $z = z(x, y), (x, y) \in D$ 时,成立

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)\mathrm{d}S = \iint\limits_{D} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z_x^2(x, y) + z_y^2(x, y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

例14.1.5 计算 $I = \iint\limits_{\Sigma}\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}\mathrm{d}S$,其中 Σ 为椭球面 $\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = 1, a, b, c > 0$.

解 椭球面的参数方程为

$$x=a\sin\varphi\cos\theta, y=b\sin\varphi\sin\theta, z=c\cos\varphi,$$

其中 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant\pi$. 易计算

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(\varphi,\theta)}=bc\sin^2\varphi\cos\theta,$$

$$\frac{\partial(z,x)}{\partial(\varphi,\theta)}=ac\sin^2\varphi\sin\theta,$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\theta)}=ab\sin\varphi\cos\varphi,$$

所以

$$\begin{aligned}EG-F^2&=\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(\varphi,\theta)}\right)^2+\left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(\varphi,\theta)}\right)^2+\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\theta)}\right)^2\\&=(abc)^2\sin^2\varphi\left(\frac{\cos^2\theta\sin^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{b^2}+\frac{\cos^2\varphi}{c^2}\right).\end{aligned}$$

而这时被积函数化为

$$\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}=\sqrt{\frac{\cos^2\theta\sin^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{b^2}+\frac{\cos^2\varphi}{c^2}}.$$

由被积函数与积分曲面的对称性,在第一卦限的积分后再乘 8 即为所求. 所以

$$\begin{aligned}I&=8\iint\limits_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{2}]}abc\left(\frac{\cos^2\theta\sin^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{b^2}+\frac{\cos^2\varphi}{c^2}\right)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\\&=\frac{4}{3}abc\pi\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).\end{aligned}$$

例14.1.6 设圆锥面 $z^2=x^2+y^2$ 上具有均匀的单位面密度,它被平面 $z=a$ 和 $z=b$ $(0<a<b)$ 所截部分为 Σ. 求 Σ 对位于原点处、具有单位质量的质点的引力.

解 设对质点的引力为 $\boldsymbol{F}=(F_x,F_y,F_z)$, 由对称性, 引力在 x 轴和 y 轴

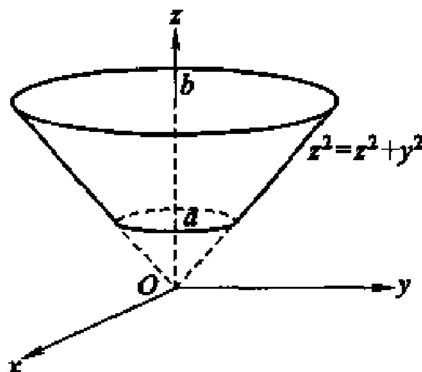


图 14.1.6

方向的分量为零，即 $F_x = F_y = 0$.

对曲面上一点 $P(x,y,z)$，包含它的曲面面积微元 dS 所具有的质量为 1 · dS. 由万有引力定律，dS 对锥面顶点处的质点的引力在 z 轴上的分量为

$$G\frac{dS}{x^2+y^2+z^2}\cos\theta,$$

其中 G 为引力常数，而 θ 为矢径 $\overrightarrow{OP}$ 与 z 轴的夹角，它恰好为锥面的半顶角 $\frac{\pi}{4}$. 所以由微元法可知

$$F_z = \iint_{\Sigma} G\frac{dS}{\sqrt{2}(x^2+y^2+z^2)}.$$

由于 Σ 的方程为

$$z=\sqrt{x^2+y^2},(x,y)\in D,$$

这里 D 为它在 xy 平面上的投影 $\{(x,y)\mid a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2\}$. 因此

$$\begin{aligned}F_z &= \iint_D G\frac{1}{\sqrt{2}(x^2+y^2+z^2)}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy\\ &= G\iint_D \frac{1}{\sqrt{2}(x^2+y^2+z^2)}dxdy = G\iint_D\frac{1}{2(x^2+y^2)}dxdy\\ &= G\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^b\frac{rdr}{2r^2} = G\pi\ln\frac{b}{a}.\end{aligned}$$

通讯卫星的电波覆盖的地球面积

将通讯卫星发射到赤道的上空，使它位于赤道所在的平面内. 如果卫星自西向东地绕地球飞行一周的时间正好等于地球自转一周的时间，那么它始终在地球的某一个位置的上空，即相对静止. 这样的卫星称为地球同步卫星.

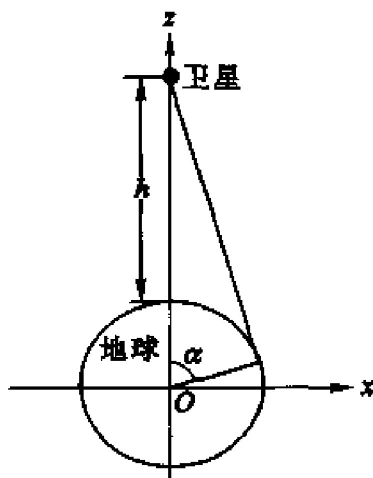


图 14.1.7

现在来计算该卫星的电波所能覆盖的地球的表面积. 为简化问题，把地球看成一个球体，且不考虑其它天体对卫星的影响.

我们已经知道，地球的半径 R 为 6 371 km，地球自转的角速度 $\omega=\frac{2\pi}{24\times 3\,600}$，由于卫星绕地球飞行一周的时间，正好等于地球自转一周的时间，因此 ω 也就是卫星绕地球飞行的角速度.

我们先确定卫星离地面的高度 h. 要使卫星不会脱离其预定轨道，卫星所受的地球的引力必须与它绕地球飞行所受的离心力相等，即

$$\frac{GMm}{(R+h)^2} = m\omega^2(R+h),$$

其中 M 为地球的质量，m 为卫星的质量，G 是引力常数．由于重力加速度（即在地面的单位质量所受的引力）$g = \dfrac{GM}{R^2}$，那么从上式得

$$(R+h)^3 = \frac{GM}{\omega^2} = \frac{GM}{R^2} \cdot \frac{R^2}{\omega^2} = g\frac{R^2}{\omega^2}.$$

于是

$$h = \sqrt[3]{g\frac{R^2}{\omega^2}} - R.$$

将 $R = 6\ 371\ 000$，$\omega = \dfrac{2\pi}{24 \times 3\ 600}$，$g = 9.8$ 代入上式，就得到卫星的离地面的高度为

$$\begin{aligned} h &= \sqrt[3]{9.8 \times \frac{6\ 371\ 000^2 \times 24^2 \times 3\ 600^2}{4\pi^2}} - 6\ 371\ 000 \\ &\approx 36\ 000\ 000(\mathrm{m}) = 36\ 000(\mathrm{km}). \end{aligned}$$

为计算卫星的电波所覆盖的地球表面的面积，取地心为坐标原点．取过地心与卫星中心、方向从地心到卫星中心的有向直线为 z 轴（见图 14.1.7，为简明起见，只画出了 xz 平面），则卫星的电波所覆盖的地球表面的面积为

$$S = \iint_{\Sigma} \mathrm{d}S,$$

其中 Σ 是上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 (z \geqslant 0)$ 上满足 $z \geqslant R\cos\alpha$ 的部分，即

$$\Sigma : z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2},\ x^2 + y^2 \leqslant R^2 \sin^2\alpha.$$

利用第一类曲面积分的计算公式，

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

这里 D 为 xy 平面上区域 $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant R^2\sin^2\alpha\}$．利用极坐标变换，得

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \int_0^{R\sin\alpha} \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} r\,\mathrm{d}r \\ &= 2\pi R\left[-\sqrt{R^2 - r^2}\right]_0^{R\sin\alpha} = 2\pi R^2(1 - \cos\alpha). \end{aligned}$$

因为 $\cos\alpha = \dfrac{R}{R+h}$，所以

$$S = 2\pi R^2 \frac{h}{R+h} = 2\pi \times 6\ 371\ 000^2 \times \frac{36\ 000\ 000}{6\ 371\ 000 + 36\ 000\ 000}$$

$$= 2.16575 \times 10^{14}(\mathrm{m}^2) = 2.16575 \times 10^{8}(\mathrm{km}^2).$$

我们再看一个有趣现象.由于

$$S = 2\pi R^2 \frac{h}{R+h} = 4\pi R^2 \frac{h}{2(R+h)},$$

由于 $4\pi R^2$ 正是地球的表面积,而

$$\frac{h}{2(R+h)} = \frac{36\,000\,000}{2(6\,371\,000 + 36\,000\,000)} \approx 0.4328.$$

这就是说,卫星的电波覆盖了地球表面三分之一以上的面积.因此,从理论上说,只要在赤道上空使用三颗相间 $2\pi/3$ 的通讯卫星,它们的电波就可以覆盖几乎整个地球表面.

习　　题

1. 求下列第一类曲线积分:

(1) $\int_L (x+y)\mathrm{d}s$,其中 L 是以 $O(0,0)$,$A(1,0)$,$B(0,1)$ 为顶点的三角形;

(2) $\int_L |y|\mathrm{d}s$,其中 L 为单位圆周 $x^2+y^2=1$;

(3) $\int_L (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$,$L$ 为螺旋线 $x = a\cos t$,$y = a\sin t$,$z = bt$,$0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ 的一段;

(4) $\int_l xyz\mathrm{d}s$.其中 L 为曲线 $x = t$,$y = \frac{2\sqrt{2t^3}}{3}$,$z = \frac{1}{2}t^2$ 上相应于 t 从 0 变到 1 的一段弧;

(5) $\int_L x^2\mathrm{d}s$,其中 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 和平面 $x+y+z=0$ 的交线.

2. 求椭圆周 $x = a\cos t$,$y = b\sin t$,$0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ 的质量,已知曲线在点 $M(x,y)$ 处的线密度是 $\rho(x,y) = |y|$.

3. 求下列曲面的面积:

(1) $z = axy$ 包含在圆柱面 $x^2+y^2=a^2(a>0)$ 内的部分;

(2) 锥面 $x^2+y^2=\frac{1}{3}z^2$ 被平面 $x+y+z=2a$ $(a>0)$ 所截的部分;

(3) 圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 被两平面 $x+z=0$,$x-z=0$ $(x>0$,y

>0) 所截部分；

(4) 抛物面 $x^2+y^2=2az$ 包含在柱面 $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ $(a>0)$ 内的那部分；

(5) 环面 $\begin{cases} x=(b+a\cos\phi)\cos\varphi, \\ y=(b+a\cos\phi)\sin\varphi, \\ z=a\sin\phi, \end{cases}$ $(0\leqslant\phi\leqslant 2\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$，其中 $0<a<b$.

4. 求下列第一类曲面积分：

(1) $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S$，其中 Σ 是左半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2, y\leqslant 0$；

(2) $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$，其中 Σ 是区域 $\{(x,y,z)\mid\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 1\}$ 的边界；

(3) $\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)\mathrm{d}S$，$\Sigma$ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax$ 所截部分；

(4) $\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}S$，其中 Σ 是圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 介于平面 $z=0$ 与 $z=H$ 之间的部分；

(5) $\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}S$，其中 Σ 是螺旋面 $x=u\cos v, y=u\sin v, z=v, 0\leqslant u\leqslant a, 0\leqslant v\leqslant 2\pi$ 的一部分.

5. 求密度为 $\rho(x,y)=z$ 的抛物面壳 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2), 0\leqslant z\leqslant 1$ 的质量与重心.

6. 求均匀球面(半径是 a，密度是 1) 对不在该球面上的质点(质量为 1) 的引力.

7. 设 $u(x,y,z)$ 为连续函数，它在 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处有连续的二阶偏导数，设

$$T(R)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\Sigma}u(x,y,z)\mathrm{d}S,$$

其中 Σ 为以点 M 为中心，半径为 R 的球面. 证明：

$$\lim_{R\to 0}T(R)=u(x_0,y_0,z_0).$$

若 $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}\neq 0$，求无穷小量 $T(R)-u(x_0,y_0,z_0)$ 的主要部分.

§2 第二类曲线积分与第二类曲面积分

第二类曲线积分

设 L 为空间中一条可求长的连续曲线，起点为 A，终点为 B（这时称 L 为定向的）. 一个质点在力

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

的作用下沿 L 从 A 移动到 B，我们要计算 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 所作的功.

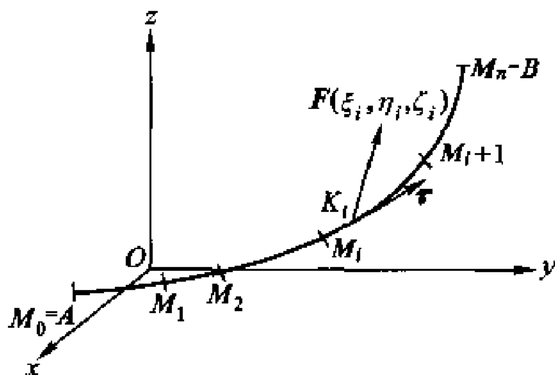


图 14.2.1

为了解决这个问题，在曲线 L 上插入一些分点

$$M_1(x_1,y_1,z_1),M_2(x_2,y_2,z_2),\cdots,M_{n-1}(x_{n-1},y_{n-1},z_{n-1}),$$

并令 $M_0(x_0,y_0,z_0)=A,M_n(x_n,y_n,z_n)=B$（见图 14.2.1）. 并且这些点是从 A 到 B 排列的. 这样一来，L 被这些分点分成 n 个小弧段 $M_{i-1}M_i(i=1,2,\cdots,n)$. 在小弧段 $M_{i-1}M_i$ 上任取一点 $K_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$，取曲线 L 在 K_i 的单位切向量

$$\boldsymbol{\tau}_i=\cos\alpha_i\boldsymbol{i}+\cos\beta_i\boldsymbol{j}+\cos\gamma_i\boldsymbol{k},$$

使它的方向与 L 的定向相一致. 那么质点从 M_{i-1} 移动到 M_i 时（$i=1,2,\cdots,n$），$\boldsymbol{F}$ 所作的功近似地等于

$$\boldsymbol{F}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\boldsymbol{\tau}_i\Delta s_i=(P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\alpha_i+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\beta_i+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i)\Delta s_i,$$

这里 Δs_i 是小弧段 $M_{i-1}M_i$ 的弧长. 因此 $\boldsymbol{F}$ 将质点沿 L 从 A 移动到 B 所作的功为

$$\begin{aligned}W&=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\boldsymbol{\tau}_i\Delta s_i\\&=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}(P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\alpha_i+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\beta_i\end{aligned}$$

$$+ R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cos \gamma_i) \Delta s_i$$

$$= \int_L (P(x,y,z) \cos \alpha + Q(x,y,z) \cos \beta + R(x,y,z) \cos \gamma) \mathrm{d}s,$$

其中 λ 为所有的小弧段的最大长度.

根据这种思想我们引入下面的定义.

定义 14.2.1 设 L 为定向的可求长连续曲线,起点为 A,终点为 B.在曲线上每一点取单位切向量 $\boldsymbol{\tau} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$,使它与 L 的定向相一致.设

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

是定义在 L 上的向量值函数,则称

$$\int_L \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{\tau} \mathrm{d}s = \int_L (P(x,y,z) \cos \alpha + Q(x,y,z) \cos \beta + R(x,y,z) \cos \gamma) \mathrm{d}s,$$

为 $\boldsymbol{f}$ 在 L 上的**第二类曲线积分**(如果右面的第一类曲线积分存在的话).

在曲线 L 上的点(x,y,z)处取一个 L 的弧长微元 $\mathrm{d}s$,作向量 $\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s$,其中 $\boldsymbol{\tau} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ 为曲线 L 在点(x,y,z)处的单位切向量.那么 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 在 x 轴上的投影是 $\cos \alpha \mathrm{d}s$,因此可记为 $\mathrm{d}x$,即 $\mathrm{d}x = \cos \alpha \mathrm{d}s$.同理记 $\mathrm{d}y = \cos \beta \mathrm{d}s$, $\mathrm{d}z = \cos \gamma \mathrm{d}s$.于是,第二类曲线积分又可以表示为

$$\int_L \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{\tau} \mathrm{d}s = \int_L \boldsymbol{f} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

$$= \int_L P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

它也称为 1 - 形式 $\omega = P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$ 在 L 上的第二类曲线积分,记为 $\int_L \omega$.

特别地,如果 L 为 xy 平面上的定向光滑曲线段,第二类曲线积分就简化为

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_L [P(x,y) \cos \alpha + Q(x,y) \cos \beta] \mathrm{d}s$$

$$= \int_L [P(x,y) \cos \alpha + Q(x,y) \sin \alpha] \mathrm{d}s$$

其中 α 为 L 的切向量与 x 轴正向的夹角.

第二类曲线积分是定义在定向曲线(即指定了方向的曲线)上,它具有如下性质.

性质 1 (方向性) 记 $-L$ 是定向曲线 L 的反向曲线,则

$$\int_{-L} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{\tau} \mathrm{d}s = -\int_L \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{\tau} \mathrm{d}s.$$

注意这个等式两边的 $\boldsymbol{\tau}$ 是方向相反的.

性质2（线性性）　设两个向量值函数 $\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2$ 在定向的分段光滑曲线 L 上的第二类曲线积分存在，则对任何常数 α,β，成立等式

$$\int_L(\alpha\boldsymbol{f}_1+\beta\boldsymbol{f}_2)\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s=\alpha\int_L\boldsymbol{f}_1\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s+\beta\int_L\boldsymbol{f}_2\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s.$$

性质3（路径可加性）　设定向分段光滑曲线 L 分成了两段 L_1 和 L_2，它们与 L 的取向相同（这时记为 $L=L_1+L_2$），则向量值函数 $\boldsymbol{f}$ 在 L 上的第二类曲线积分的存在性等价于 $\boldsymbol{f}$ 在 L_1 和 L_2 上的第二类曲线积分的存在性. 且成立等式

$$\int_L\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s=\int_{L_1}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s+\int_{L_2}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s.$$

现在讨论如何计算第二类曲线积分. 设光滑曲线 L 的方程为

$$x=x(t),y=y(t),z=z(t),\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta,$$

那么 L 是可求长的，且曲线的弧长的微分 $\mathrm{d}s=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\mathrm{d}t$. 注意到 $(x'(t),y'(t),z'(t))$ 是曲线的切向量，因此它的单位切向量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}&=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\beta)\\&=\frac{1}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}}(x'(t),y'(t),z'(t)).\end{aligned}$$

若向量值函数

$$\boldsymbol{f}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

在 L 上连续，那么由定理 14.1.1 得到第二类曲线积分的计算公式

$$\begin{aligned}&\int_L P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z\\&=\int_L(P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,x)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma)\mathrm{d}s\\&=\int_\alpha^\beta[P(x(t),y(t),z(t))x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)\\&\quad+R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

特别地，如果 L 的方程是

$$y=y(x),z=z(x),\quad a\leqslant x\leqslant b$$

则

$$\begin{aligned}&\int_L P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z\\&=\int_a^b[P(x,y(x),z(x))+Q(x,y(x),z(x))y'(x)\end{aligned}$$

$$+ R(x,y(x),z(x))z'(x)]\mathrm{d}x.$$

如果 L 为 xy 平面上光滑曲线,其方程为

$$x = x(t), y = y(t), \quad \alpha \leqslant x \leqslant \beta.$$

则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_\alpha^\beta [P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)]\mathrm{d}t.$$

因此如果 L 是方程为

$$y = y(x), \quad a \leqslant x \leqslant b$$

的 xy 平面上的光滑曲线,则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_a^b [P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x)]\mathrm{d}x.$$

例14.2.1　计算 $\int_L y^2\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y$,其中 L 为:(1) 圆周 $x^2 + y^2 = R^2$ 的上半部分,方向为逆时针方向;(2) 从点 $M(R,0)$ 到点 $N(-R,0)$ 的直线段.

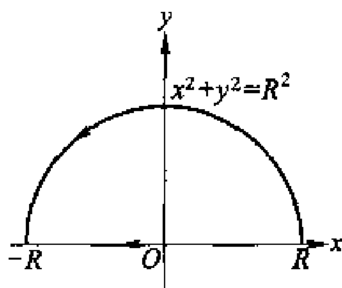


图 14.2.2

解　(1) 这时 L 的参数方程为

$$x = R\cos t, y = R\sin t, t: 0 \to \pi,$$

这里 $t: 0 \to \pi$ 表示 t 从 0 变化到 π. 因此

$$\int_L y^2\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y = \int_0^\pi [R^2\sin^2 t(-R\sin t) + R^2\cos^2 t(R\cos t)]\mathrm{d}t$$

$$= R^3\int_0^\pi [(1-\cos^2 t)(-\sin t) + (1-\sin^2 t)\cos t]\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{4}{3}R^3.$$

(2) 这时 L 的方程为

$$y = y(x) = 0, x: R \to -R,$$

这里 $x: R \to -R$ 表示 x 从 R 变化到 $-R$. 因此

$$\int_L y^2\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y = \int_R^{-R} 0 \cdot \mathrm{d}x = 0.$$

例14.2.2　求空间中一质量为 m 的物体沿某一光滑曲线 L 从 A 点移动到 B 点时，重力所做的功.

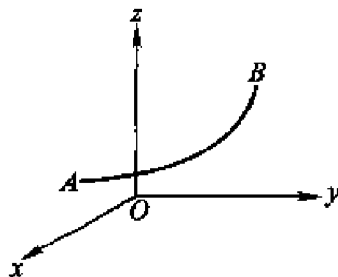


图 14.2.3

解　作直角坐标系，使 z 轴铅直向上. 在这个坐标系下，设 $A=(x_1,y_1,z_1)$，$B=(x_2,y_2,z_2)$. 设 L 的方程为

$$x=x(t), y=y(t), z=z(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta.$$

则 $A=(x_1,y_1,z_1)=(x(\alpha),y(\alpha),z(\alpha))$，$B=(x_2,y_2,z_2)=(x(\beta),y(\beta),z(\beta))$.

显然重力 $\boldsymbol{F}=-mg\boldsymbol{k}$，这里 g 为重力加速度. 则重力所做的功为

$$W=\int_L(-mg)\mathrm{d}z=-mg\int_L\mathrm{d}z=-mg\int_\alpha^\beta z'(t)\mathrm{d}t = mg(z_1-z_2).$$

这说明，重力所作的功与路径无关，它仅取决于物体下降(或上升)的距离.

这两个例子说明第二类曲线积分与第一类曲线积分截然不同：它不仅与起点和终点有关，还可能与路径有关.

例 14.2.3　计算 $\int_L (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$，其中 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在第一卦限部分的边界，当从球面外面看时为顺时针方向.

解　曲线是由圆弧段 $\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{CA}$ 组成. 而圆弧段 $\overset{\frown}{AB}$ 的参数方程为

$$x=0, y=\cos t, z=\sin t, t: \frac{\pi}{2} \to 0$$

这里 $t: \frac{\pi}{2} \to 0$ 表示 t 从 $\frac{\pi}{2}$ 变化到 0. 因此

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$$

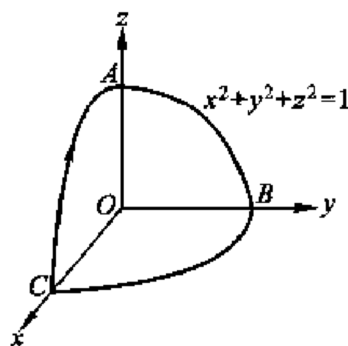


图 14.2.4

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} [\sin^2 t(-\sin t) - \cos^2 t(\cos t)]\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 t + \cos^3 t)\mathrm{d}t = \frac{4}{3}.$$

由对称性即得到

$$\int_L (y^2 - z^2)\mathrm{d}x + (z^2 - x^2)\mathrm{d}y + (x^2 - y^2)\mathrm{d}z$$

$$= 3\int_{\overset{\frown}{AB}} (y^2 - z^2)\mathrm{d}x + (z^2 - x^2)\mathrm{d}y + (x^2 - y^2)\mathrm{d}z = 4.$$

曲面的侧

如果放一只蚂蚁在一张白纸上，无论它怎样爬，只要它不越过白纸的边界，当它再爬回到原来的位置时，还是在纸的上方，不会到下面去. 这就象在白纸上的一点处选择一个指向上方的单位法向量，然后沿任何一条不越过边界的闭曲线连续地移动它，使它与所过之点处的一个单位法向量相合，并保持这种相合的连续性，那么当它又回到原来的位置时，它还是原来的那个单位法向量，而不会变成指向白纸下方的那个单位法向量. 具有这种性质的曲面叫做**双侧曲面**. 具体的定义是：

定义 14.2.2 *设 Σ 是一个光滑曲面，P 为 Σ 上任一点，Γ_p 是过 P 点且不越过曲面边界的任意一条闭曲线. 取定 Σ 在 P 点的一个单位法向量，让它沿 Γ_p 连续移动，使它与所过之点处的一个单位法向量连续地相合. 如果当它再回到 P 点时，法向量的指向仍与原选的方向相同，则称 Σ 为***双侧曲面**.

这样一来，在双侧曲面 Σ 上，如果选定了一点 P 和曲面 Σ 在该点的一个法向量，通过从这点连续地移动法向量就可以唯一地确定 Σ 上其它点的法向量的方向. 于是曲面 Σ 就由法向量的方向被分为两侧(例如，球面有内侧和外侧). 选好一侧的曲面称为**定向曲面**.

并非所有光滑曲面都是双侧曲面. 例如,把长方形 $ABCD$ 先扭转一次再首尾相粘,即 A 与 C 相粘,B 与 D 点相粘,就做成了所谓的 **Möbius 带**(见图 14.2.5). 如果从某一点开始,用刷子在 Möbius 带上连续地涂色(即指定法向量),最后就会涂满整条带子,但回到起始点时,涂的是反面(即法向量与已选择的反向). 这样的曲面叫做**单侧曲面**. 我们今后只讨论双侧曲面(注意数片双侧曲面拼在一起不一定仍是双侧曲面,如 Möbius 带可以看成是由两片双侧曲面拼成的).

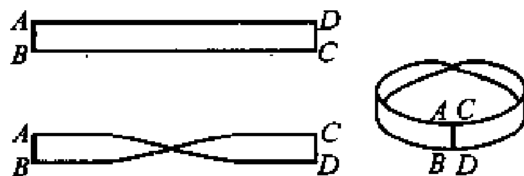


图 14.2.5

设双侧曲面 Σ 的方程为

$$x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v),\quad (u,v) \in D.$$

这里 D 为 uv 平面上具有分段光滑边界的区域. 进一步假设 x,y,z 对 u 和 v 有连续偏导数,且相应的 Jacobi 矩阵

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

总是满秩的.

前面已经知道,曲面的法向量可以表示为

$$\pm \boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = \pm \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right),$$

"$\pm$"表示曲面上每个点 $(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ 都有方向相反的两个法向量. 于是在这点的单位法向量及方向余弦为

$$\boldsymbol{n} = (\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma) = \frac{1}{\pm\sqrt{EG-F^2}}\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right),$$

这里 $EG - F^2 = \left[\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]^2$.

在根号前取定一个符号后,曲面对每一个点 $(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ 都确定了一个单位法向量. 而又由假设,方向余弦是连续的,因此所确定

的单位法向量是连续变动的，曲面的双侧性就保证了法向量不会指向另一侧去. 这就是说，在根号前取定一个符号后，也就确定了曲面的一侧.

例如，光滑曲面 Σ 的方程为

$$z = z(x,y),(x,y) \in D,$$

其中 D 为平面区域. 那么

$$\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \frac{1}{\pm\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}(-z_x, -z_y, 1).$$

如果取正号，则 $\cos\gamma > 0$，这时法向量与 z 轴成锐角，意味着取定了曲面的上侧，而取负号则意味着取定了曲面的下侧.

第二类曲面积分

设不可压缩流体(设其密度为 1) 在(x,y,z) 处的流速可以表示为

$$\boldsymbol{v} = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k},$$

并设它与时间无关，我们来计算单位时间内通过定向曲面 Σ 的流量.

用光滑曲线网将 Σ 分成 n 片小曲面 $\Delta\Sigma_1, \Delta\Sigma_2, \cdots, \Delta\Sigma_n$. 设 $\Delta\Sigma_i$ 的面积为 ΔS_i，在它上面任取一点 $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$，那么在这点的流速为

$$\boldsymbol{v}_i = P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\boldsymbol{i} + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\boldsymbol{j} + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\boldsymbol{k}.$$

记曲面 Σ 在 M_i 点的单位法向量为

$$\boldsymbol{n}_i = \cos\alpha_i\boldsymbol{i} + \cos\beta_i\boldsymbol{j} + \cos\gamma_i\boldsymbol{k},$$

那么单位时间内流过 $\Delta\Sigma_i$ 的流量(见图 14.2.6) 就近似地为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{n}_i\Delta S_i = &(P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\alpha_i + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\beta_i \\ &+ R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i)\Delta S_i.\end{aligned}$$

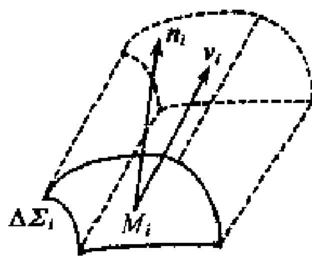


图 14.2.6

因此单位时间内通过 Σ 的流量

$$\begin{aligned}\Phi &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{n}_i\Delta S_i \\ &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}(P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\alpha_i + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\beta_i + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i)\Delta S_i\end{aligned}$$

$$= \iint\limits_{\Sigma} (P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma)\mathrm{d}S,$$

其中 λ 是所有小曲面片的最大直径.

这种思想使我们引入下面的定义.

定义 14.2.3 设 Σ 为定向的光滑曲面,曲面上面的每一点指定了单位法向量 $\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. 如果 $\boldsymbol{f}(x,y,z) = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k}$ 是定义在 Σ 上的向量值函数,称

$$\iint\limits_{\Sigma} \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma} (P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

为 $\boldsymbol{f}$ 在 Σ 上的**第二类曲面积分**(如果右面的第一类 Σ 曲面积分存在).

第二类曲面积分定义在定向曲面上,它具有与第二类曲线积分类似的性质.

性质 1 (方向性) 记 $-\Sigma$ 为与 Σ 取相反侧的曲面,则

$$\iint\limits_{-\Sigma} \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = -\iint\limits_{\Sigma} \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S.$$

注意这个等式两边的 $\boldsymbol{n}$ 是方向相反的.

性质 2 (线性性) 设 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{g}$ 在定向的光滑曲面 Σ 上的第二类曲面积分存在,则对任何常数 α, β,成立等式

$$\iint\limits_{\Sigma} (\alpha\boldsymbol{f} + \beta\boldsymbol{g})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \alpha\iint\limits_{\Sigma} \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S + \beta\iint\limits_{\Sigma} \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S.$$

性质3 (曲面可加性) 设定向的光滑曲面 Σ 分成了两片 Σ_1 和 Σ_2,它们与 Σ 的取向相同(这时记为 $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$),则 $\boldsymbol{f}$ 在 Σ 上的第二类曲面积分的存在性等价于 $\boldsymbol{f}$ 在 Σ_1 和 Σ_2 上的第二类曲面积分的存在性,且成立

$$\iint\limits_{\Sigma} \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma_1} \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S + \iint\limits_{\Sigma_2} \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S.$$

利用性质 3 的思想就可以把第二类曲面积分的定义推广到分片光滑的曲面上去.

在 Σ 上的点 (x,y,z) 处取一个 Σ 的面积微元 $\mathrm{d}S$,作向量 $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}\mathrm{d}S$,其中 $\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 为 Σ 在点 (x,y,z) 处的单位法向量. 记 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 在 xy 平面上的投影的面积为 $\mathrm{d}\sigma$. 如果我们用微分形式 $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ 表示 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 在平面上的有向投影面积(常常简记为 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$),即

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \begin{cases} \mathrm{d}\sigma, & \text{在 } \mathrm{d}\Sigma \text{ 上 } \cos\gamma > 0 \text{ 时;} \\ -\mathrm{d}\sigma, & \text{在 } \mathrm{d}\Sigma \text{ 上 } \cos\gamma < 0 \text{ 时;} \\ 0, & \text{在 } \mathrm{d}\Sigma \text{ 上 } \cos\gamma = 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

那么 $dx \wedge dy = \cos \gamma dS$.

类似地可记

$$dy \wedge dz = \cos \alpha dS, \quad dz \wedge dx = \cos \beta dS.$$

于是,第二类曲面积分又可以表示为

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{S} &= \iint_\Sigma P(x,y,z)dy \wedge dz + Q(x,y,z)dz \wedge dx + R(x,y,z)dx \wedge dy \\ &= \iint_\Sigma P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy.\end{aligned}$$

这也称为2-形式 $\omega = P(x,y,z)dy \wedge dz + Q(x,y,z)dz \wedge dx + R(x,y,z)dx \wedge dy$ 在 Σ 上的第二类曲面积分,记为 $\int_\Sigma \omega$.

下面讨论如何计算第二类曲面积分.

若定向光滑曲面 Σ 表示为参数方程

$$x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v), \quad (u,v) \in D,$$

其中 D 为 uv 平面上具有分段光滑边界的有界域. $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ 为 Σ 上的连续函数. 由于

$$(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \pm \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right),$$

以及 $dS = \sqrt{EG - F^2}dudv$,则由第一类曲面积分的计算公式,第二类曲面积分可由公式

$$\begin{aligned}&\iint_\Sigma P(x,y,z)\, dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy \\ =& \iint_\Sigma (P(x,y,z) \cos \alpha + Q(x,y,z) \cos \beta + R(x,y,z) \cos \gamma)dS \\ =& \pm \iint_D \Big[P(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + \\ & Q(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + \\ & R(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \Big] dudv\end{aligned}$$

计算. 上式中符号由曲面的侧,即方向余弦(或单位法向量)的计算公式中所取符号决定.

特别地,如果定向的光滑曲面 Σ 的方程为

$$z = z(x,y), (x,y) \in D_{xy},$$

其中 D_{xy} 为 xy 平面上具有分段光滑边界的有界闭区域, $R(x,y,z)$ 为 Σ 上的

连续函数,则

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm \iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

等式右端是二重积分,当曲面的定向为上侧时,积分号前取"+";当曲面的定向为下侧时,积分号前取"-".

读者不难推出当定向的光滑曲面 Σ 的方程为

$$x = x(y,z),(y,z) \in D_{yz},$$

或 $y = y(z,x),(z,x) \in D_{zx}$ 时的类似公式.

例 14.2.4　计算 $I = \iint_{\Sigma} (x+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y+1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Σ 为平面 $x+y+z=1, x=0, y=0$ 和 $z=0$ 所围立体的表面的外侧.

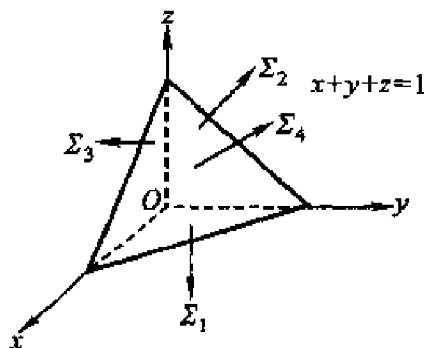


图 14.2.7

解　将曲面划分成如图所示的四片:$\Sigma_1,\Sigma_2,\Sigma_3$,和 Σ_4.

Σ_1 的方程为 $z=0, 0 \leqslant y \leqslant 1-x, 0 \leqslant x \leqslant 1$. 根据定向,其法向量与 yz 和 zx 平面的夹角都是 $\pi/2$,与 z 轴的夹角为 $-\pi$,因此

$$\begin{aligned}&\iint_{\Sigma_1} (x+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y+1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_{\Sigma_1} (z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1-x}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

同理

$$\iint_{\Sigma_2} (x+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y+1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{1}{2},$$

$$\iint_{\Sigma_3} (x+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y+1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}.$$

面 Σ_4 的方程可表为 $z = 1-x-y, 0 \leqslant y \leqslant 1-x, 0 \leqslant x \leqslant 1$. 因此

$$\iint\limits_{\Sigma_4}(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1-x}}(2-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2}{3}$$

由对称性得

$$\iint\limits_{\Sigma_4}(x+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma_4}(y+1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$$

因此

$$\iint\limits_{\Sigma_3}(x+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2.$$

相加后即得到 $I=\frac{1}{2}$.

例 14.2.5　计算$\iint\limits_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Σ 为上半椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,z\geqslant 0\ (a,b,c>0)$,定向取上侧.

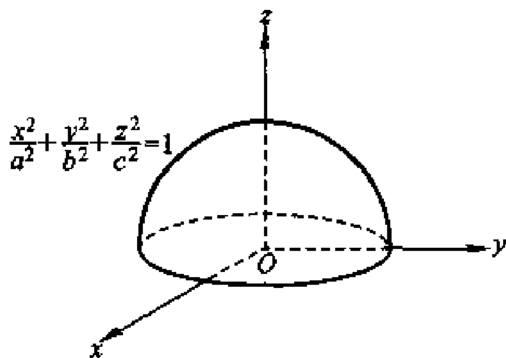


图 14.2.8

解　利用广义球面坐标代入曲面方程就可得曲面的参数方程为

$$x=a\sin\varphi\cos\theta,y=b\sin\varphi\cos\theta,$$

$$z=c\cos\varphi,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

易计算

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(\varphi,\theta)}=bc\sin^2\varphi\cos\theta,$$

$$\frac{\partial(z,x)}{\partial(\varphi,\theta)}=ac\sin^2\varphi\sin\theta,$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\theta)}=ab\sin\varphi\cos\theta.$$

因此

$$\iint_{\Sigma} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{\substack{0\leqslant\theta\leqslant2\pi \\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}}} (a^3bc\sin^5\varphi\cos^4\theta + b^3ac\sin^5\varphi\sin^4\theta + c^3ab\sin\varphi\cos\varphi)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$= abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}(a^2\sin^5\varphi\cos^4\theta + b^2\sin^5\varphi\sin^4\theta + c^2\sin\varphi\cos^4\varphi)\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{2}{5}\pi abc(a^2+b^2+c^2).$$

我们说明一下为什么这里积分号前取“+”.因为曲面的定向为上侧,所以在 Σ 上方向余弦 $\cos\gamma > 0$(除去 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 时的边界),而由方向余弦的计算公式知

$$\cos\gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\theta)} = \pm\frac{ab\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{EG-F^2}},$$

要等式成立必须取“+”号,因此积分号前取“+”号.

例 14.2.6 计算 $\iint_{\Sigma}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 Σ 为抛物面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 在平面 $z=0$ 与 $z=2$ 之间的部分,定向取下侧.

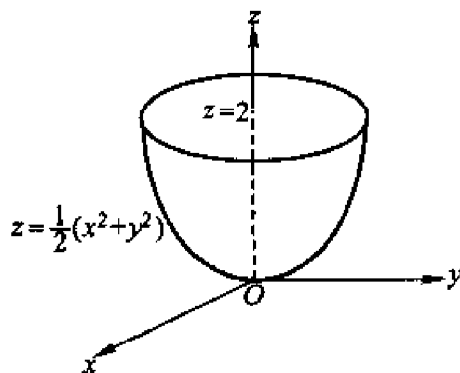


图 14.2.9

解 由于 $\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \cos\alpha\,\mathrm{d}S$,$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \cos\gamma\mathrm{d}S$,所以

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma}(z^2+x)\cos\alpha\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma}(z^2+x)\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

面 Σ 的定向为下侧,所以

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}},\cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

注意到 Σ 在 xy 平面的投影区域为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2\}$,就有

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\sqrt{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}[(z^2+x)(-x)+\sqrt{z}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iint_{D}\left[\left(\left(\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)^2+x\right)(-x)+\sqrt{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\left(-\frac{1}{4}r^5\cos\theta-r^2\cos^2\theta+\sqrt{\frac{1}{2}r}\right)r\mathrm{d}r=\left(4-\frac{8}{3}\sqrt{2}\right)\pi.$$

习　　题

1. 求下列第二类曲线积分:

(1) $\int_L(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y$, 其中 L 是以 $A(1,0),B(2,0),C(2,1),D(1,1)$ 为顶点的正方形,方向为逆时针方向;

(2) $\int_L(x^2-2xy)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y$,其中 L 是抛物线的一段:$y=x^2$,$-1\leqslant x\leqslant 1$,方向由$(-1,1)$ 到$(1,1)$;

(3) $\int_L\frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$,其中 L 是圆周$x^2+y^2=a^2$,方向为逆时针方向;

(4) $\int_L y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$,其中 L 是曲线$x=\mathrm{e}^t,y=\mathrm{e}^{-t},z=a^t,0\leqslant t\leqslant 1$,方向由$(\mathrm{e},\mathrm{e}^{-1},a)$到$(1,1,1)$;

(5) $\int_L x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+(x+y-1)\mathrm{d}z$,$L$ 是从点$(1,1,1)$到点$(2,3,4)$的直线段;

(6) $\int_L(y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$,$L$ 为圆周 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ y=x\tan\alpha\ (0<\alpha<\pi)\end{cases}$,若从 x 轴的正向看去,这个圆周是沿逆时针方向进行的.

2. 证明不等式

$$\left|\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y\right|\leqslant MC,$$

其中 C 是曲线L 的弧长,$M=\max\{\sqrt{P^2(x,y)+Q^2(x,y)}\mid(x,y)\in L\}$.
记圆周 $x^2+y^2=R^2$ 为 L_R,利用以上不等式估计

$$I_R = \int_{L_R} \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{(x^2 + xy + y^2)^2}$$

并证明

$$\lim_{R \to +\infty} I_R = 0.$$

3. 方向依纵轴的负方向,且大小等于作用点的横坐标的平方的力构成一个力场.求质量为 m 的质点沿抛物线 $y^2 = 1 - x$ 从点 $(1,0)$ 移到 $(0,1)$ 时,场力所作的功.

4. 计算下列第二类曲面积分:

(1) $\iint\limits_{\Sigma}(x + y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y + z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z + x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Σ 是中心在原点,边长为 $2h$ 的立方体 $[-h,h]\times[-h,h]\times[-h,h]$ 的边界,积分沿外侧;

(2) $\iint\limits_{\Sigma}yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x$,其中 Σ 是椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的上半部分,积分沿外侧;

(3) $\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}y\mathrm{d}z + x\mathrm{d}z\mathrm{d}x + y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Σ 是柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 被平面 $z = 0$ 和 $z = 4$ 所截部分的外侧;

(4) $\iint\limits_{\Sigma}zx\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Σ 是抛物面 $z = 4 - x^2 - y^2$ 在 $z \geqslant 0$ 部分的下侧;

(5) $\iint\limits_{\Sigma}[f(x,y,z) + x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z + [2f(x,y,z) + y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x + [f(x,y,z) + z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $f(x,y,z)$ 为连续函数,Σ 是平面 $x - y + z = 1$ 在第四卦限部分的上侧;

(6) $\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Σ 是球面 $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ 的外侧.

§3 Green 公式、Gauss 公式和 Stokes 公式

Green 公式

设 L 为平面上的一条曲线,它的方程是 $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j}, \alpha \leqslant t \leqslant \beta$.如果 $\boldsymbol{r}(\alpha) = \boldsymbol{r}(\beta)$,而且当 $t_1, t_2 \in (\alpha, \beta), t_1 \neq t_2$ 时总成立 $\boldsymbol{r}(t_1) \neq \boldsymbol{r}(t_2)$,则称 L 为**简单闭曲线**(或 **Jordan 曲线**).这就是说,简单闭曲线除两个端点相重合外,曲线自身不相交.

设 D 为平面上的一个区域. 如果 D 内的任意一条简单闭曲线都可以不触及边界地、连续地收缩成一点, 那么 D 称为单连通区域. 否则它称为复连通区域. 例如, 单位圆盘 $\{(x,y) \mid x^2+y^2<1\}$ 就是单连通区域, 而圆环 $\{(x,y) \mid \frac{1}{2}<x^2+y^2<1\}$ 就是复连通区域. 通俗地说, 单连通区域之中不含有"洞", 而复连通区域之中会有"洞".

对于平面区域 D, 我们给它的边界 ∂D 规定一个正向: 如果一个人沿 ∂D 的这个方向行走时, D 总是在他左边. 这个定向也称为 D 的诱导定向, 带有这样定向的 ∂D 称为 D 的正向边界. 例如, 如图 14.3.1 所示的区域 D 由 L 与 l 所围成, 那么在我们规定的边界正向下, L 为逆时针方向, 而 l 为顺时针方向.

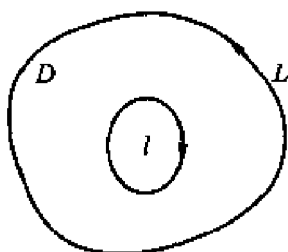


图 14.3.1

定理 14.3.1 (Green 公式) 设 D 为平面上由光滑或分段光滑的简单闭曲线所围的单连通区域. 如果函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 在 D 上具有连续偏导数, 那么

$$\int_{\partial D} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 ∂D 取正向, 即诱导定向.

证 我们先证明 D 可同时表为以下两种形式

$$\begin{aligned}D&=\{(x,y)\mid y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x), a\leqslant x\leqslant b\}\\&=\{(x,y)\mid x_1(y)\leqslant x\leqslant x_2(y), c\leqslant y\leqslant d\}\end{aligned}$$

的情形(这时平行于 x 轴或 y 轴的直线与区域 D 的边界至多交两点). 这样的区域称为**标准区域**. 在这种情况下(参见图 14.3.2),

$$\begin{aligned}\iint_D\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_a^b\mathrm{d}y\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y\\&=\int_a^b[P(x,y_2(x))-P(x,y_1(x))]\mathrm{d}x\\&=-\int_a^bP(x,y_1(x))\mathrm{d}x-\int_b^aP(x,y_2(x))\mathrm{d}x\end{aligned}$$

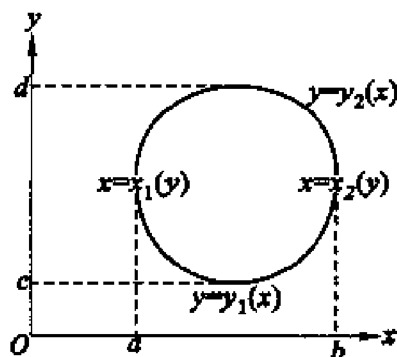


图 14.3.2

$$= -\int_{\partial D} P(x,y)\mathrm{d}x,$$

式中最后一步是利用了曲线积分的计算公式.同理又有

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x$$

$$= \int_c^d [Q(x_2(y),y) - Q(x_1(y),y)]\mathrm{d}y$$

$$= \int_c^d Q(x_2(y),y)\mathrm{d}x + \int_d^c Q(x_1(y),y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_{\partial D} Q(x,y)\mathrm{d}y.$$

两式合并就得所需结果.

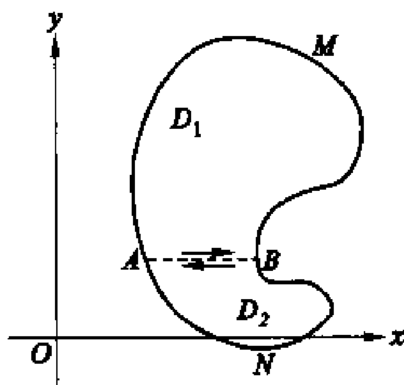


图 14.3.3

再证区域 D 可分成有限块标准区域的情形.我们只考虑如图 14.3.3 的区域,在这种区域上,平行于 y 轴的直线与 D 的边界的交点可能会多于两个.如

图所示用光滑曲线 AB 将 D 分割成两个区域 D_1 与 D_2（D_1 的边界为曲线 $ABMA$，D_2 的边界为曲线 $ANBA$），这时 D_1 和 D_2 都是标准区域. 因此应用 Green 公式得

$$\int_{\partial D_1} P\mathrm{d}y + Q\mathrm{d}y = \iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\int_{\partial D_2} P\mathrm{d}y + Q\mathrm{d}y = \iint_{D_2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

注意 D_1 与 D_2 的公共边界 AB，其方向相对于 ∂D_1 而言是从 A 到 B，相对于 ∂D_2 而言是从 B 到 A，两者方向正好相反，所以将上面的两式相加便得

$$\int_{\partial D} P\mathrm{d}y + Q\mathrm{d}y = \iint_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

对于 Green 公式一般情形的证明比较复杂，这里从略.

证毕

Green 公式还可以推广到有有限个"洞"的复连通区域上去. 以只有一个洞为例（见图 14.3.4），用光滑曲线连结其外边界 L 上一点 M 与内边界 l 上一点 N，将 D 割为单连通区域. 沿其边界的正向积分，利用定理 14.3.1，得

$$\iint_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\int_L + \int_{MN} + \int_l + \int_{NM}\right)P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

$$= \left(\int_L + \int_l\right)P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{\partial D} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y,$$

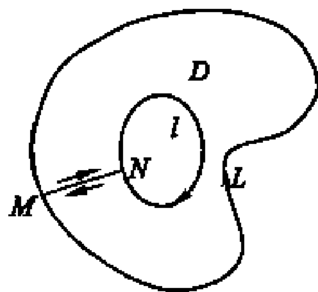


图 14.3.4

其中 L 为逆时针方向，l 为顺时针方向，这与 ∂D 的诱导定向相同.

Green 公式说明了有界闭区域上的二重积分与沿区域边界的第二类曲线积分的关系. 下面再作进一步讨论.

1. 记取诱导定向的 ∂D 上的单位切向量为 $\boldsymbol{\tau}$，单位外法向量为 $\boldsymbol{n}$（见图 14.3.5），那么显然

$$\cos(\boldsymbol{n}, y) = -\cos(\boldsymbol{\tau}, x), \cos(\boldsymbol{n}, x) = \sin(\boldsymbol{\tau}, x).$$

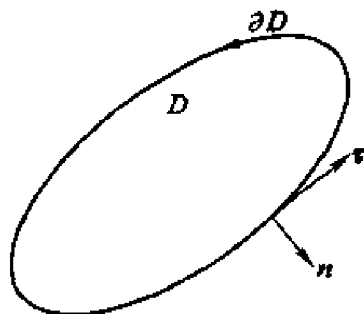


图 14.3.5

因此得到 Green 公式的另一种常用表示形式

$$\iint_D \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial D} F\mathrm{d}y - G\mathrm{d}x = \int_{\partial D} [F \sin(\boldsymbol{\tau}, x) - G \cos(\boldsymbol{\tau}, x)]\mathrm{d}s$$

$$= \int_{\partial D} [F \cos(\boldsymbol{n}, x) + G \cos(\boldsymbol{n}, y)]\mathrm{d}s,$$

这个形式便于记忆和推广.

2. Green 公式是 Newton-Leibniz 公式在二维情形的推广. 设 $f(x)$ 在$[a, b]$上可导, 取 $D = [a, b] \times [0, 1]$(见图 14.3.6). 在 Green 公式中取 $P = 0$, $Q = f(x)$, 就得

$$\iint_D f'(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial D} f(x)\mathrm{d}y.$$

利用化累次积分的方法就知道, 等式左边就是 $\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x$. 而等式右边等于

$$\left(\int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA}\right) f(x)\mathrm{d}y = \left(\int_{BC} + \int_{DA}\right) f(x)\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 f(b)\mathrm{d}y + \int_1^0 f(a)\mathrm{d}y = f(b) - f(a).$$

这就得到 Newton - Leibniz 公式

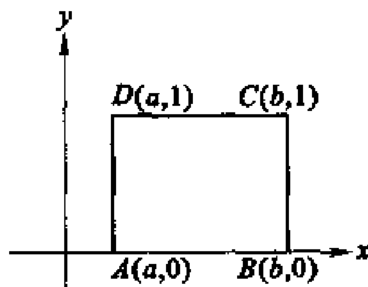


图 14.3.6

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(b) - f(a).$$

3. 从 Green 公式还可以得到一个求区域面积的方法(证明留给读者):

设 D 为平面上的有界闭区域,其边界为有限条可求长的简单闭曲线,则它的面积为

$$S = \int_{\partial D} x\mathrm{d}y = -\int_{\partial D} y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\partial D} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x,$$

其中 ∂D 取正向.

例 14.3.1 计算椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a, b > 0)$ 所围图形的面积.

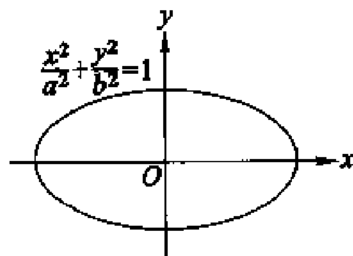


图 14.3.7

解 此椭圆的参数方程为

$$x = a\cos\theta, y = b\sin\theta, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

设椭圆的正向边界为 L,那么所求面积为

$$S = \frac{1}{2}\int_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(ab\cos^2\theta + ab\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = \pi ab.$$

例 14.3.2 计算 $I = \int_L \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x + y[xy + \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})]\mathrm{d}y$,其中 L 为曲线 $y = \sin x, 0 \leqslant x \leqslant \pi$ 与直线段 $y = 0, 0 \leqslant x \leqslant \pi$ 所围区域 D 的正向边界.

解 这时 $P = \sqrt{x^2+y^2}$, $Q = y[xy + \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})]$,则

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = y^2 + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

由 Green 公式,

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x} y^2\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\int_0^{\pi}\sin^3 x\mathrm{d}x = \frac{4}{9}.$$

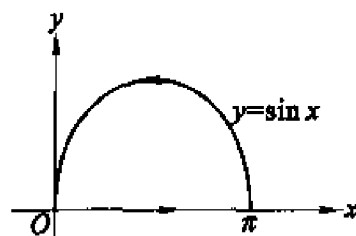


图 14.3.8

例 14.3.3　计算 $I=\int_L(\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\mathrm{d}y$，其中 L 为圆 $(x-a)^2+y^2=a^2\quad(a>0)$ 的上半圆周，方向为从点 $A(2a,0)$ 到原点 $O(0,0)$.

解　现在曲线不是闭的，不能直接用 Green 公式，但添加一条直线段 $\overline{OA}$（方向从 O 到 A）后，L 与 $\overline{OA}$ 合起来就是闭曲线. 设这样得到的闭曲线所围的区域为 D. 这时候

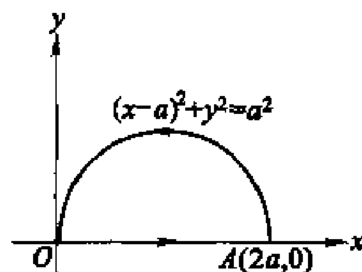


图 14.3.9

$$P=\mathrm{e}^x\sin y-my,\ Q=\mathrm{e}^x\cos y-m,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\mathrm{e}^x\cos y-m,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\mathrm{e}^x\cos y.$$

利用 Green 公式，得到

$$\int_L(\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\mathrm{d}y$$

$$+\int_{\overline{OA}}(\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\mathrm{d}y$$

$$=m\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{m\pi a^2}{2}.$$

再计算沿 $\overline{OA}$ 的曲线积分. 因为 $\overline{OA}$ 的方程为 $y=0$，$x:0\to2a$，那么

$$\int_{\overline{OA}}(e^x\sin y - my)dx + (e^x\cos y - m)dy = \int_0^{2a}0dx + 0 = 0.$$

代入前面的式子,就有

$$\int_L(e^x\sin y - my)dx + (e^x\cos y - m)dy = \frac{m\pi a^2}{2}.$$

曲线积分与路径无关的条件

容易想象,若一个函数沿着连接 A,B 两个端点的一条路径 L 积分,一般说来,积分值不仅会随端点变化而变化,还会随路径的不同而不同.

但上一节中曾指出,也有一些曲线积分的值,如重力所做的功,可以仅与端点有关而与路径无关.下面就来探讨曲线积分与路径无关的条件.先给出积分与路径无关的定义.

定义 14.3.1 设 D 为平面区域,$P(x,y),Q(x,y)$ 为 D 上的连续函数.如果对于 D 内任意两点 A,B,积分值

$$\int_L Pdx + Qdy$$

只与 A,B 两点有关,而与从 A 到 B 的路径 L(这里只考虑光滑或分段光滑曲线)无关,就称曲线积分 $\int_L Pdx + Qdy$ **与路径无关**.否则称为与路径有关.

曲线积分与路径无关问题可以归纳为下面的定理:

定理 14.3.2 设 D 为平面上的单连通区域,$P(x,y),Q(x,y)$ 在 D 上具有连续偏导数.则下面的四个命题等价:

(1) 对于 D 内的任意一条光滑(或分段光滑)闭曲线 L,

$$\int_L Pdx + Qdy = 0$$

(2) 曲线积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 与路径无关.

(3) 存在 D 上的可微函数 $U(x,y)$,使得

$$dU = Pdx + Qdy,$$

即 $Pdx + Qdy$ 为 $U(x,y)$ 的全微分,这时称 $U(x,y)$ 为 1 - 形式 $Pdx + Qdy$ 的**原函数**.

(4) 在 D 内成立等式

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

证 (1)⇒(2):设 A,B 为 D 内任意两点,L_1 和 L_2 是 D 中从 A 到 B 的任意两条路径,则 $C = L_1 + (-L_2)$ 就是 D 中的一条闭曲线.因此

$$0=\int_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\left(\int_{L_1}+\int_{-L_2}\right)P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

$$=\int_{L_1}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y-\int_{L_2}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y,$$

于是

$$\int_{L_1}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{L_2}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

因此曲线积分与路径无关.

(2)⇒(3)：取定点$(x_0,y_0)\in D$,作函数

$$U(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y,$$

这里积分沿从(x_0,y_0)到(x,y)的任意路径.由于曲线积分与路径无关,因此$U(x,y)$是有确定意义的.这时取如图14.3.10所示的积分路径时,就成立

$$\frac{\Delta U}{\Delta x}=\frac{U(x+\Delta x,y)-U(x,y)}{\Delta x}$$

$$=\frac{1}{\Delta x}\left(\int_{(x_0,y_0)}^{(x+\Delta x,y)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y-\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\right)$$

$$=\frac{1}{\Delta x}\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\frac{1}{\Delta x}\int_{x}^{x+\Delta x}P(t,y)\mathrm{d}t=P(\xi,y),$$

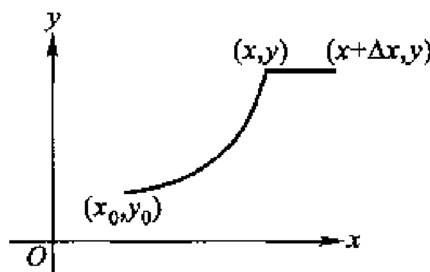


图14.3.10

其中ξ在x与$x+\Delta x$之间,这是利用了积分中值定理.因此

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta U}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}P(\xi,y)=P(x,y).$$

同理可证$\dfrac{\partial U}{\partial y}=Q(x,y)$.所以在$D$内成立$\mathrm{d}U=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$.

(3)⇒(4)：由于存在D上的可微函数U,使得$\mathrm{d}U=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$,那么

$$\frac{\partial U}{\partial x}=P(x,y),\frac{\partial U}{\partial y}=Q(x,y).$$

又由于函数$P(x,y)$和$Q(x,y)$在D内具有连续偏导数,于是

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

(4)⇒(1)：对于包含在 D 内的光滑(或分段光滑) 闭曲线 L，设它包围的区域为 $\widetilde{D}$，那么由 Green 公式就得

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_{\widetilde{D}}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

证毕

上面的证明还给出了当曲线积分与路径无关时，$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 在 D 内的原函数的构造方法，即

$$U(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y.$$

设 $A(x_A,y_A),B(x_B,y_B)\in D$. 对于从 A 到 B 的任意路径 L，任取一条 D 内从 (x_0,y_0) 到 A 的路径 l，则

$$U(x_A,y_A)=\int_l P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y,\ U(x_B,y_B)=\int_{l+L}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y.$$

因此

$$\begin{aligned}\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y&=\int_{l+L}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y-\int_l P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\\&=U(x_B,y_B)-U(x_A,y_A).\end{aligned}$$

反之，若 $U(x,y)$ 是 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 一个原函数，任取一条从 A 到 B 的路径

$$L:x=x(t),y=y(t),a\leqslant t\leqslant b,$$

使得

$$x(a)=x_A,y(a)=y_A,x(b)=x_B,y(b)=y_B,$$

那么

$$\begin{aligned}\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y&=\int_a^b[P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)]\mathrm{d}t\\&=U(x(t),y(t))\big|_a^b=U(x_B,y_B)-U(x_A,y_A).\end{aligned}$$

于是得到：

定理 14.3.3 设 D 为区域，$P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 为 D 上的连续函数. 那么曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与路径无关的充分必要条件是存在 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 的一个原函数 $U(x,y)$. 这时，对于 D 内任意两点 $A(x_A,y_A)$，$B(x_B,y_B)$，计算公式

$$\int_{\widehat{AB}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = U(x_B, y_B) - U(x_A, y_A)$$

成立,其中$\widehat{AB}$为从A到B的任意路径.

求$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$的原函数常用的是如图14.3.11所示的两个积分路径.

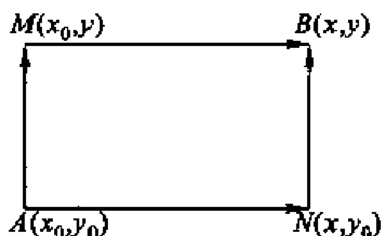


图14.3.11

由于$U(x,y) - U(x_0,y_0) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$,那么如果积分路径取$ANB$,则

$$\begin{aligned} U(x,y) &= \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + U(x_0,y_0) \\ &= \int_{AN} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + \int_{NB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + U(x_0,y_0) \\ &= \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)\mathrm{d}y + c. \end{aligned}$$

其中$c = U(x_0,y_0)$为任意常数.若积分路径取AMB,同样可以得到

$$U(x,y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\mathrm{d}y + \int_{x_0}^{x} P(x,y)\mathrm{d}y + c.$$

例14.3.4　证明在整个xy平面上,$(\mathrm{e}^x\sin y - my)\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x\cos y - mx)\mathrm{d}y$是某个函数的全微分,求这样一个函数并计算.

$$I = \int_L (\mathrm{e}^x\sin y - my)\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x\cos y - ms)\mathrm{d}y.$$

其中L为从(0,0)到(1,1)的任意一条道路.

解　令$P(x,y) = \mathrm{e}^x\sin y - my, Q(x,y) = \mathrm{e}^x\cos y - ms$,于是恒成立

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \mathrm{e}^x\cos y - m = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

因此由定理14.3.2知$(\mathrm{e}^x\sin y - my)\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x\cos y - mx)\mathrm{d}y$是某个函数的全微分.

取路径如图14.3.12,那么它的一个原函数为

$$U(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-mx)dy$$

$$=\left(\int_{OA}+\int_{AB}\right)(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-mx)dy$$

$$=\int_0^x 0dx+\int_0^y(e^x\cos y-mx)dy=e^x\sin y-mxy.$$

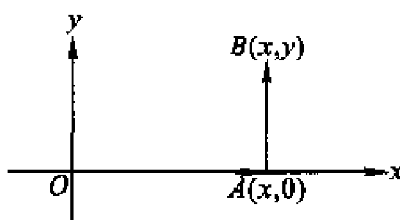


图 14.3.12

于是由定理 14.3.3 得

$$I=\int_L(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-mx)dy$$

$$=U(1,1)-U(0,0)=e\sin 1-m.$$

例14.3.5 计算 $\int_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$,其中 L 为一条不经过原点的简单闭曲线,方向为逆时针方向.

解 设 L 所围的区域为 D. 这时 $P(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}$,$Q(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$. 而

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x},x^2+y^2\neq 0,$$

那么当 D 不包含原点时,由 Green 公式即得.

$$\int_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0$$

当 D 包含原点时,函数 P,Q 在原点不满足 Green 公式的条件,因此不能直接使用 Green 公式. 但在 D 中挖去一个以原点为心,半径 r 为的小圆盘后,对于余下的部分 Green 公式的条件就满足了. 记 D 中挖去小圆盘后的区域为 D_1,记小圆盘的边界为 l(见图 14.3.13),在区域上 D_1 应用 Green 公式得

$$\int_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}-\int_l\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0,$$

注意上式对 l 取的方向是逆时针方向,这时 l 的参数方程为

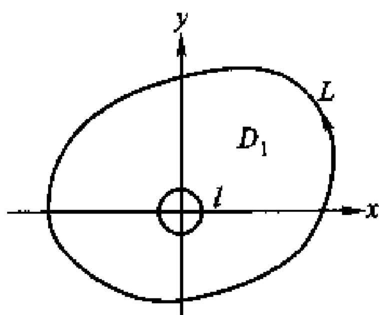


图 14.3.13

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi),$$

因此

$$\int_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2} = \int_l \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}{r^2}\mathrm{d}\theta = 2\pi.$$

这个例子说明，定理14.3.2中对于区域是单连通和函数具有连续偏导数的要求是必要的.

Gauss 公式

对于三重积分也有类似于 Green 公式的结论. 在叙述前先引入空间上的二维单连通区域的概念.

设 Ω 为空间上的一个区域. 如果 Ω 内的任何一张封闭曲面所围的立体仍属于 Ω，那么称 Ω 为**二维单连通区域**，否则称 Ω 为**二维复连通区域**. 通俗地说，二维单连通区域之中不含有“洞”，而二维复连通区域之中含有“洞”. 例如，单位球 $\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2<1\}$ 是二维单连通区域，而空心球 $\{(x,y,z) \mid \frac{1}{2}<x^2+y^2+z^2<1\}$ 是二维复连通区域.

定理 14.3.4(Gauss 公式)　*设 Ω 是 $\mathbf{R}^3$ 中由光滑或分片光滑的封闭曲面所围成的二维单连通闭区域，函数 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$ 和 $R(x,y,z)$ 在 Ω 上具有连续偏导数. 则成立等式*

$$\iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{\partial\Omega} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

*这里 $\partial\Omega$ 的定向为外侧，它称为 Ω 的***诱导定向**.

证　先设 Ω 可同时表为以下三种形式

$$= \{(x,y,z) \mid z_1(x,y) \leqslant z \leqslant z_2(x,y), (x,y) \in \Omega_{xy}\}$$
$$= \{(x,y,z) \mid y_1(z,x) \leqslant y \leqslant y_2(z,x), (z,x) \in \Omega_{zx}\}$$
$$= \{(x,y,z) \mid x_1(y,z) \leqslant x \leqslant x_2(x,y), (y,z) \in \Omega_{yz}\}$$

其中 Ω_{xy}，Ω_{zx}，Ω_{yz} 分别为 Ω 在 xy，zx，yz 平面的投影(见图 14.3.14)，这样的

区域称为**标准区域**.

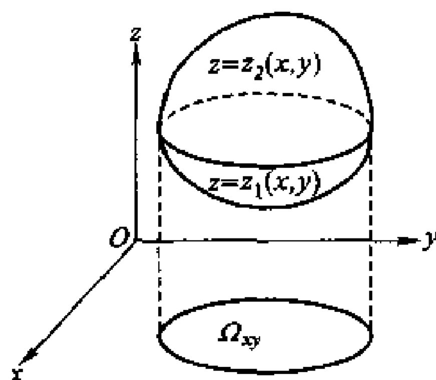


图 14.3.14

设 Σ_1 为曲面 $z=z_1(x,y),(x,y)\in\Omega_{xy}$，$\Sigma_2$ 为曲面 $z=z_2(x,y),(x,y)\in\Omega_{xy}$，按照所规定的定向，$\Sigma_1$ 的定向为下侧；Σ_2 的定向为上侧.那么利用 Ω 的第一种表示就有

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\iint\limits_{\Omega_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z\\&=\iint\limits_{\Omega_{xy}}[R(x,y,z_2(x,y))-R(x,y,z_1(x,y))]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_{\Sigma_2}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\Sigma_1}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_{\partial\Omega}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

同理利用 Ω 的第二种表示和第三种表示可证

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{\partial\Omega}Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x,$$

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{\partial\Omega}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

三式相加就是 Gauss 公式.

当 Ω 可分成有限块标准区域时，可添加辅助曲面(见图 14.3.15)，将其分成一块块标准区域.如同讨论 Green 公式的情形一样，对每块标准区域应用 Gauss 公式，再把它们加起来.注意到如果一片曲面为两块不同标准区域的共同边界时，会出现沿它不同侧面的两个曲面积分，在相加时它们就会互相抵消，最后只留下的是沿 $\partial\Omega$ 的曲面积分.这种情况就得到证明.

更一般的情况比较复杂，这里从略.

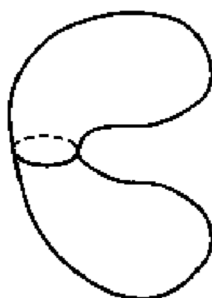


图 14.3.15

证毕

Gauss 公式也可以推广到有有限个"洞"的二维复连通区域上去. 如对如图 14.3.16 所示的有一个"洞"的区域,用适当的曲面将它分割成两个二维单连通区域后分别应用 Gauss 公式,再相加,即可推出 Gauss 公式依然成立. 注意,这时区域外面的边界还是取外侧,但内部的边界却取内侧. 但相对于区域,它们事实上都是外侧.

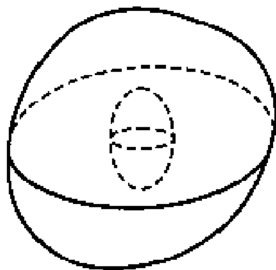


图 14.3.16

Gauss 公式的一个直接应用就是可用沿区域 Ω 的边界的曲面积分来计算 Ω 的体积,具体的说就是

$$V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{\partial\Omega}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{\partial\Omega}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint\limits_{\partial\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{3}\iint\limits_{\partial\Omega}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $\partial\Omega$ 的定向为外侧.

例 14.3.6 用上述公式计算椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所围区域的体积.

解 这就是计算椭球的体积,在上一章已经计算过它,这里采用另一种方法. 椭球面的参数方程为

$$x=a\sin\varphi\cos\theta,\quad y=b\sin\varphi\sin\theta,$$

$$z = c\cos\varphi,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant\pi,$$

于是

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\theta)} = ab\sin\varphi\cos\varphi.$$

所以,由公式求得椭球体积为

$$V = \iint_{\partial\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\substack{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\\0\leqslant\varphi\leqslant\pi}} c\cos\varphi\frac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\theta)}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$= abc\iint_{\substack{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\\0\leqslant\varphi\leqslant\pi}} \sin\varphi\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\cos^2\varphi d\varphi = \frac{4}{3}\pi abc.$$

请读者想想为什么在运算中第一步到第二步时积分号前取"+"号.

例 14.3.7 求$\iint\limits_{\Sigma} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,$\Sigma$ 为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧.

解 由 Gauss 公式并应用球面坐标变换得

$$\iint_{\Sigma} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 3\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant a^2}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= 3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a} r^4\sin\varphi\mathrm{d}r = \frac{12}{5}\pi a^5.$$

例14.3.8 设某种流体的速度为 $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$,求单位时间内流体流过曲面 $\Sigma: y = x^2+z^2 (0\leqslant y\leqslant h^2)$ 的流量,其中 Σ 取左侧.

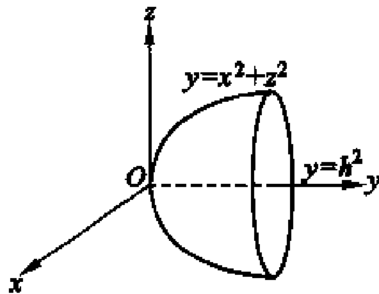


图 14.3.17

解 流量的计算公式为

$$\Phi = \iint_{\Sigma}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由于 Σ 不是封闭曲面,但添加一片曲面

$$\sigma: y = h^2, x^2+z^2\leqslant h^2$$

后,$\Sigma+\sigma$ 就是封闭曲面,这里 σ 取右侧.

记 $\Sigma+\sigma$ 所围的区域为 Ω，则由 Gauss 公式，得

$$\iint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{\sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_{\Omega} 3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3\iint_{x^2+z^2\leqslant h^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x\int_{x^2+z^2}^{h^2}\mathrm{d}y=\frac{3\pi}{2}h^4.$$

但

$$\iint_{\sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\sigma} y\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_{x^2+z^2\leqslant h^2} h^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\pi h^4,$$

所以

$$\Phi=\iint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3\pi}{2}h^4-\pi h^4=\frac{\pi}{2}h^4$$

Stokes 公式

设 Σ 为具有分段光滑边界的非封闭光滑双侧曲面. 选定曲面的一侧，并如下规定 Σ 的边界 $\partial\Sigma$ 的一个正向：如果一个人保持与曲面选定一侧的法向量同向站立，当他沿 $\partial\Sigma$ 的这个方向行走时，曲面 Σ 总是在他左边. $\partial\Sigma$ 的这个定向也称为 Σ 的诱导定向，这种定向方法称为**右手定则**.

定理 14.3.5(Stokes 公式) 设 Σ 为光滑曲面，其边界 $\partial\Sigma$ 为分段光滑闭曲线. 若函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在 Σ 及其边界上具有连续偏导数，则成立

$$\int_{\partial\Sigma} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

$$=\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\Sigma}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]\mathrm{d}S,$$

其中 $\partial\Sigma$ 取诱导定向.

证 只证明 Σ 可同时表为以下三种形式

$$\begin{aligned}\Sigma&=\{(x,y,z)\mid z=z(x,y),(x,y)\in\Sigma_{xy}\}\\&=\{(x,y,z)\mid y=y(z,x),(z,x)\in\Sigma_{zx}\}\\&=\{(x,y,z)\mid x=x(y,z),(y,z)\in\Sigma_{yz}\}\end{aligned}$$

的情形，其中 $\Sigma_{xy},\Sigma_{zx},\Sigma_{yz}$ 分别为 Σ 在 xy,zx,yz 平面的投影(见图 14.3.18)，这样的曲面称为标准曲面. 其它复杂情况从略.

不妨设 Σ 的定向为上侧. 利用曲线积分的计算公式，由 Σ 的第一种表示易得

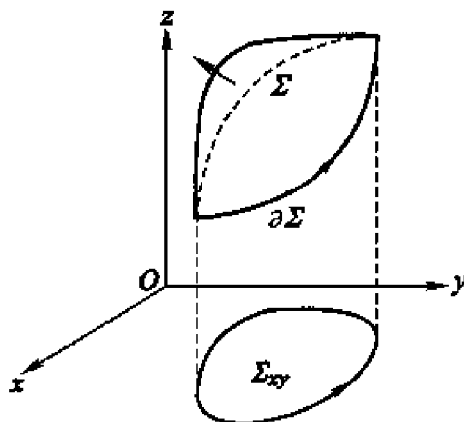


图 14.3.18

$$\int_{\partial\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}x = \int_{\partial\Sigma_{xy}} P(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x,$$

其中 $\partial\Sigma_{xy}$ 为 Σ_{xy} 的正向边界.再对后一式应用 Green 公式得

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\Sigma_{xy}} P(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x \\
&= -\iint_{\Sigma_{xy}} \frac{\partial}{\partial y}P(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= -\iint_{\Sigma_{xy}} \left[\frac{\partial P}{\partial y}(x,y,z(x,y)) + \frac{\partial P}{\partial z}(x,y,z(x,y)) \cdot \frac{\partial z}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

注意到曲面取上侧,则 Σ 的法向量的方向余弦为

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}\left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right),$$

因此$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$.所以

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Sigma_{xy}} \left[\frac{\partial P}{\partial y}(x,y,z(x,y)) + \frac{\partial P}{\partial z}(x,y,z(x,y)) \cdot \frac{\partial z}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_{\Sigma} \left[\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma}\left[\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right]\cos\gamma\mathrm{d}S \\
&= \iint_{\Sigma}\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\mathrm{d}S - \iint_{\Sigma}\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\cos\gamma\mathrm{d}S \\
&= \iint_{\Sigma}\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\mathrm{d}S - \iint_{\Sigma}\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma}\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{\Sigma}\frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

结合这几式就得

$$\int_{\partial\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}x = \iint_{\Sigma} \frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\mathrm{d}x - \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

同理可证

$$\int_{\partial\Sigma} Q(x,y,z)\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma} \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{\partial Q}{\partial z}\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$\int_{\partial\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma} \frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}z\mathrm{d}x.$$

三式相加即得 Stokes 公式.

证毕

利用行列式记号，可以将 Stokes 公式写成

$$\int_{\partial\Sigma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \mathrm{d}S$$

Stokes 定理说明了沿曲面 Σ 的曲面积分与沿其边界 $\partial\Sigma$ 的曲线积分间的关系.

例 14.3.9　计算 $I = \int_L (y^2 - z^2)\mathrm{d}x + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)\mathrm{d}z$，其中 L 为平面 $x + y + z = 1$ 被三个坐标平面所截三角形 Σ 的边界，若从 x 轴的正向看去，定向为逆时针方向.

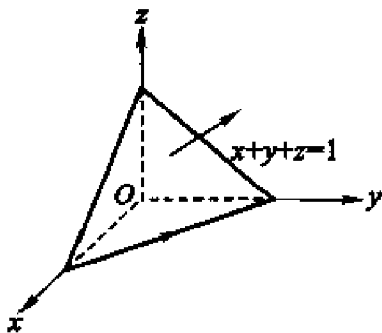


图 14.3.19

解　由 Stokes 公式得

$$I=\int_L (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$$

$$=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2 \end{vmatrix} \mathrm{d}S$$

$$=-2\iint_\Sigma [(y+z)\cos\alpha+(x+z)\cos\beta+(x+y)\cos\gamma]\mathrm{d}S$$

由于 Σ 的方程为 $x+y+z=1$,定向为上侧(这是要与 L 的定向相配合来使用 Stokes 公式),则易计算

$$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

因此注意到在三角形 Σ 上成立 $x+y+z=1$,且 Σ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,就得

$$I=-\frac{4}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma (x+y+z)\mathrm{d}S=-\frac{4}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma \mathrm{d}S=-2.$$

例 14.3.10 计算 $I=\int_L (y^2+z^2)\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$,其中 L 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=2Rx(z\geqslant 0)$ 与圆柱面 $x^2+y^2=2rx(R>r>0)$ 的交线,从 z 轴的正向看去,方向是逆时针方向

解 记在球面 $x^2+y^2+z^2=2Rx$ 上由 L 所围的曲面为 Σ.由于 L 的定向,为应用 Stokes 定理取 Σ 的定向为上侧,所以其法向量的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{x-R}{R},\cos\beta=\frac{y}{R},\cos\gamma=\frac{z}{R}.$$

于是由 Stokes 定理得

$$I=\int_L (y^2+z^2)\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$$

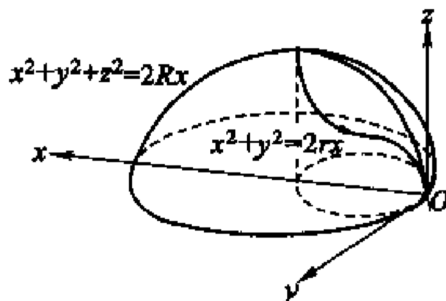


图 14.3.20

$$= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2+z^2 & z^2+x^2 & x^2+y^2 \end{vmatrix} \mathrm{d}S$$

$$= 2\iint_{\Sigma} ((y-z)\cos\alpha + (z-x)\cos\beta + (x-y)\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$= 2\iint_{\Sigma} \left[(y-z)\frac{x-R}{R} + (z-x)\frac{y}{R} + (x-y)\frac{z}{R}\right]\mathrm{d}S$$

$$= 2\left(\iint_{\Sigma} z\mathrm{d}S - \iint_{\Sigma} y\mathrm{d}S\right).$$

由于曲面 Σ 关于 xz 平面对称,因此

$$\iint_{\Sigma} y\mathrm{d}S = 0.$$

而在上半球面 $x^2+y^2+z^2=2Rx(z\geqslant 0)$ 上,$z=\sqrt{2Rx-x^2-y^2}$,所以在上有

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{(x-R)^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}} = \frac{R}{z},$$

利用曲面积分的计算公式,得

$$I = 2\iint_{\Sigma} z\mathrm{d}S = 2\iint_{(x-r)^2+y^2\leqslant r^2} z\frac{R}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2R\iint_{(x-r)^2+y^2\leqslant r^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\pi r^2 R.$$

有兴趣的读者可以再利用 L 的参数方程来计算一下这个曲线积分.

习　　题

1. 利用 Green 公式计算下列积分:

(1) $\int_L (x+y)^2\mathrm{d}x - (x^2+y^2)\mathrm{d}y$,其中 L 是以 $A(1,1),B(3,2),C(2,5)$ 为顶点的三角形的边界,方向为逆时针方向;

(2) $\int_L xy^2\mathrm{d}x - x^2y\mathrm{d}y$,其中 L 是圆周 $x^2+y^2=a^2$,方向为逆时针方向;

(3) $\int_L (x^2y\cos x + 2xy\sin x - y^2\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x + (x^2\sin x - 2y\mathrm{e}^x)\mathrm{d}y$,其中 L 是星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(a>0)$,方向为逆时针方向;

(4) $\int_L \mathrm{e}^x[(1-\cos y)\mathrm{d}x - (y-\sin y)\mathrm{d}y]$,其中 L 是曲线 $y=\sin x$ 上从

$(0,0)$ 到$(\pi,0)$ 的一段；

(5) $\int_L (x^2-y)\mathrm{d}x-(x+\sin^2 y)\mathrm{d}y$,其中 L 是圆周$x^2+y^2=2x$ 的上半部分,方向从$(0,0)$ 点到$(2,0)$ 点；

(6) $\int_L \dfrac{\mathrm{e}^x[(x\sin y-y\cos y)\mathrm{d}x+(x\cos y+y\sin y)\mathrm{d}y]}{x^2+y^2}$,其中 L 是包围原点的简单光滑闭曲线,方向为逆时针方向；

(7) $\int_L \dfrac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+4y)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}$,其中 L 单位圆周$x^2+y^2=1$,方向为逆时针方向.

2. 利用曲线积分,求下列曲线所围成的图形的面积：

(1) 星形线 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$;

(2) 抛物线$(x+y)^2=ax(a>0)$ 和 x 轴；

(3) 旋轮线的一段：$\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$ 与 x 轴.

3. 先证明曲线积分与路径无关,再计算积分值：

(1) $\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x-y)(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)$;

(2) $\int_{(2,1)}^{(1,2)}\varphi(x)\mathrm{d}x+\phi(y)\mathrm{d}y$,其中 $\phi(x),\phi(y)$ 为连续函数；

(3) $\int_{(1,0)}^{(6,8)}\dfrac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$,沿不通过原点的路径.

4. 证明$(2x\cos y+y^2\cos x)dx+(2y\sin x-x^2\sin y)dy$ 在整个xy 平面上是某个函数的全微分,并找出这样一个原函数.

5. 证明$\dfrac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ 在除去 y 的负半轴及原点的裂缝 xy 平面上是某个函数的全微分,并找出这样一个原函数.

6. 设一力场为 $\boldsymbol{F}=(3x^2y+8xy^2)\boldsymbol{i}+(x^3+8x^2y+12y\mathrm{e}^y)\boldsymbol{j}$,证明质点在此场内移动时,场力所作的功与路径无关.

7. 利用 Gauss 公式计算下列曲面积分：

(1) $\iint_\Sigma x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,$\Sigma$ 为立方体 $0\leqslant x,y,z\leqslant a$ 的边界,积分沿外侧；

(2) $\iint_\Sigma (x-y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z+x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Σ 为曲面$|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$ 的外表面；

(3) $\iint\limits_{\Sigma}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为锥面 $z^2=x^2+y^2$ 介于平面 $z=0$ 与 $z=h(h>0)$ 之间的部分，积分沿下侧；

(4) $\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的上侧；

(5) $\iint\limits_{\Sigma}2(1-x^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+8xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4zx\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是由 xy 平面上的曲线 $x=\mathrm{e}^y(0\leqslant y\leqslant a)$ 绕 x 轴旋转而成的旋转面，曲面的法向量与 x 轴的正向的夹角为钝角.

(6) $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$，其中 Σ 是抛物面 $1-\dfrac{z}{5}=\dfrac{(x-2)^2}{16}+\dfrac{(y-1)^2}{9}(z\geqslant 0)$ 的上侧.

8. 利用Gauss公式证明阿基米德原理：将物体全部浸没在液体中时，物体所受的浮力等于与物体同体积的液体的重量，而方向是垂直向上的.

9. 设某种流体的速度为 $\boldsymbol{v}=yz\boldsymbol{i}+xz\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$，求单位时间内流体

(1) 流过圆柱：$x^2+y^2\leqslant a^2, 0\leqslant z\leqslant h$ 的侧表面的流量；

(2) 流过该圆柱的全表面的流量.

10. 利用Stokes公式计算下列曲线积分：

(1) $\int\limits_{L}y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$，其中 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线（它是圆周），从 x 轴的正向看去，此圆周的方向是逆时针方向；

(2) $\int\limits_{L}3z\mathrm{d}x+5x\mathrm{d}y-2y\mathrm{d}z$，其中 L 是圆柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=y+3$ 的交线（它是椭圆），从 x 轴的正向看去，方向是逆时针方向；

(3) $\int\limits_{L}(y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$，其中 L 为圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 和平面 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{h}=1(a>0,h>0)$ 的交线（它是椭圆），若从 x 轴的正向看去，方向为逆时针方向；

(4) $\int\limits_{L}(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$，其中 L 是用平面 $x+y+z=\dfrac{3}{2}$ 截立方体 $0\leqslant x,y,z\leqslant 1$ 的表面所得的截痕，若从 x 轴的正向看去，它是逆时针方向；

(5) $\int\limits_{L}(x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-xz)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z$，其中 L 是沿着螺线 x

$= a\cos\varphi, y = a\sin\varphi, z = \dfrac{h}{2\pi}\varphi$ 从点 $A(a,0,0)$ 至点 $B(a,0,h)$ 的路径.

§4 微分形式的外微分

外微分

设 $U \subset \mathbf{R}^n$ 为区域，U 上的可微函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的全微分为

$$\mathrm{d}f = \sum_{n=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i.$$

这可以理解为，一个 0 - 形式作了微分运算后成为了 1 - 形式.

现在将微分运算 d 推广到 Λ^k 上去. 对 Λ^k 中的任意一个 k - 形式

$$\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} g_{i_1, i_2, \cdots, i_k}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k},$$

定义

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega &= \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} (\mathrm{d}g_{i_1, i_2, \cdots, i_k}(\boldsymbol{x})) \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} \\ &= \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_{i_1, i_2, \cdots, i_k}}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}. \end{aligned}$$

同时，对空间 $\Lambda = \Lambda^0 + \cdots + \Lambda^n$ 上的任意一个元素

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 + \cdots + \omega_n, \omega_i \in \Lambda^i,$$

定义

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\omega_0 + \mathrm{d}\omega_1 + \cdots + \mathrm{d}\omega_n.$$

这样一来，微分运算 $\mathrm{d}: \Lambda \to \Lambda$ 就是线性的，即 $\mathrm{d}(\alpha\omega + \beta\eta) = a\mathrm{d}\omega + \beta\mathrm{d}\eta$，$\omega$，$\eta \in \Lambda$，其中 α, β 为常数. 这样的微分运算 d 称为**外微分**. 显然，

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}) &= \mathrm{d}(1\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}) \\ &= (\mathrm{d}1) \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} = 0. \end{aligned}$$

例 14.4.1 设 $\omega = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$ 为 $\mathbf{R}^2$ 上的 1 - 形式，则

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega &= (\mathrm{d}P) \wedge \mathrm{d}x + (\mathrm{d}Q) \wedge \mathrm{d}y \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y\right) \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}y\right) \wedge \mathrm{d}y \\ &= \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

例 14.4.2 设 $\omega = P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$ 为 $\mathbf{R}^3$ 上的 1 - 形式，则

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega &= (\mathrm{d}P) \wedge \mathrm{d}x + (\mathrm{d}Q) \wedge dy + (\mathrm{d}R) \wedge \mathrm{d}z \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial Q}{\partial z}dz\right) \wedge \mathrm{d}y \end{aligned}$$

$$+\left(\frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge\mathrm{d}z$$

$$=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.$$

例 14.4.3 设 $\omega=P(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ 为 $\mathbf{R}^3$ 上的 2－形式，则

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega&=(\mathrm{d}P)\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(\mathrm{d}Q)\wedge\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(\mathrm{d}R)\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\&=\left(\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\\&\quad+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial Q}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x\\&\quad+\left(\frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\&=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

我们列出外微分的两个性质.

性质 1 设 ω 为 k－形式，η 为 l－形式，则

$$\mathrm{d}(\omega\wedge\eta)=\mathrm{d}\omega\wedge\eta+(-1)^k\omega\wedge\mathrm{d}\eta.$$

证 由于 d 的线性性，只要证明

$$\omega=a(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k},\eta=b(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_{j_1}\wedge dx_{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_l}$$

的情形即可. 这时

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\omega\wedge\eta)&=\mathrm{d}(a(\boldsymbol{x})b(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\\&\quad\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\mathrm{d}x_{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_l})\\&=\mathrm{d}(a(\boldsymbol{x})b(\boldsymbol{x}))\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\\&\quad\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\mathrm{d}x_{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_l}\\&=\sum_{i=1}^{n}\left(b\frac{\partial a}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i+a\frac{\partial b}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i\right)\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\\&\quad\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\mathrm{d}x_{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_l}\\&=\left(\sum_{i=1}^{n}b\frac{\partial a}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i\right)\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\\&\quad\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\mathrm{d}x_{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_l}+(-1)^k(a\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\\&\quad\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k})\wedge\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial b}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i\right)\wedge\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\mathrm{d}x_{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_l}\\&=\mathrm{d}\omega\wedge\eta+(-1)^k\omega\wedge\mathrm{d}\eta.\end{aligned}$$

设 $\omega\in\Lambda$，定义 $\mathrm{d}^2\omega=\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega)$. 在以下讨论中，我们假设微分形式的系数都具

有二阶连续偏导数.

例 14.4.4　设 $f\in\Lambda^0$ 为 0 − 形式,证明 $\mathrm{d}^2f=0$.

证　由于 f 具有二阶连续偏导数,因此 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$. 所以

$$\mathrm{d}^2 f=\mathrm{d}(\mathrm{d}f)=\mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_i$$

$$=\sum_{i<j}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}-\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}\right)\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j=0,$$

性质2　对任意 $\omega\in\Lambda$,有 $\mathrm{d}^2\omega=0$.

证　由于 d 的线性性,只要证明

$$\omega=a(x)\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}$$

的情形即可. 这时

$$\mathrm{d}\omega=(\mathrm{d}a(x))\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k},$$

因此由性质 1 和例 14.4.4 的结果

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2\omega&=\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega)\\&=(\mathrm{d}^2a)\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}\\&\quad-(\mathrm{d}a)\wedge\mathrm{d}(\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k})\\&=0\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}-(\mathrm{d}a)\wedge 0=0.\end{aligned}$$

外微分的应用

首先看 Green 公式

$$\int_{\partial D}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 ∂D 取 D 的诱导定向. 在上一章第五节中,我们已经提到可以将 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ 看成有向面积元素,那么如果将它看成是正面积元素 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的话,上式就可以表为

$$\int_{\partial D}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,$$

因此由例 14.4.1 得到,对于 1 − 形式 $\omega=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 成立

$$\int_{\partial D}\omega=\int_{D}\mathrm{d}\omega.$$

再看 Stokes 公式

$$\int_{\partial\Sigma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

$$= \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

其中 $\partial\Sigma$ 取 Σ 的诱导定向. 注意等式左边和右边分别是 1 - 形式和 2 - 形式在定向曲线和曲面上的积分, 因此由例 14.4.2 可知, 对于 1 - 形式 $\omega = P(x, y, z)\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\mathrm{d}y, R(x, y, z)\mathrm{d}z$ 上式就是

$$\int_{\partial\Sigma} \omega = \int_{\Sigma} \mathrm{d}\omega.$$

同样地, 对于 Gauss 公式

$$\iint_{\partial\Omega} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

如果我们将有向体积元素 $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ 看成是正体积元素 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 的话, 它就可以表为

$$\begin{aligned} &\iint_{\partial\Omega} P\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ = &\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z, \end{aligned}$$

其中 $\partial\Omega$ 取 Ω 的诱导定向. 因此由例 14.4.3 可知, 对于 2 - 形式 $\omega = P(x,y,z)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R(x,y,z)dx \wedge dy$, 上式就是

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} \mathrm{d}\omega.$$

最后看看 Newton - Leibniz 公式

$$\int_a^b \mathrm{d}f(x) = f(x)\Big|_a^b,$$

如果将上式右端视为 0 - 形式 $f(x)$ 在区间 $D = [a, b]$ 的诱导定向边界 $\partial D = \{a, b\}$ 上的积分, 那么上式就可以表为

$$\int_{\partial D} f = \int_D \mathrm{d}f.$$

这样, Newton - Leibniz 公式、Green 公式、Gauss 公式和 Stokes 公式就可以统一地写成如下形式:

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M \mathrm{d}\omega.$$

这个式子统称为 Stokes 公式. 它说明了, 高次的微分形式 $\mathrm{d}\omega$ 在给定区域上的积分等于低一次的微分形式 ω 在低一维的区域边界上的积分. Stokes 公式是单变量情形的 Newton - Leibniz 公式在多变量情形的推广, 是数学分析中最精彩的结论之一. 读者在今后的课程中还会看到它的广泛应用.

习　　题

1. 设 $\omega = a_1(x_1)\mathrm{d}x_1 + a_2(x_2)\mathrm{d}x_2 + \cdots\cdots + a_n(x_n)\mathrm{d}x_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的 1 - 形式，求 $\mathrm{d}\omega$.

2. 设 $\omega = a_1(x_2,x_3)\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + a_2(x_1,x_3)\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + a_3(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$ 是 $\mathbf{R}^3$ 上的 2 - 形式，求 $\mathrm{d}\omega$.

3. 设在 $\mathbf{R}^3$ 上的一个开区域 $\Omega = (a,b)\times(c,d)\times(e,f)$ 上定义了连续可微函数 $x = a_1(z), y = a_2(x), z = a_3(y)$，试求形如

$$\omega = b_1(y)\mathrm{d}x + b_2(z)\mathrm{d}y + b_3(x)\mathrm{d}z$$

的 1 - 形式 ω，使得

$$\mathrm{d}\omega = a_1(z)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + a_2(x)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + a_3(y)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

§5　场论初步

在实际应用中，常常要考察某种物理量(如温度、密度、电场强度、力、速度等)在空间的分布和变化规律，从数学和物理上看就是场.

设 $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ 是一个区域，若在时刻 t，Ω 中每一点 (x,y,z) 都有一个确定的数值 $f(x,y,z,t)$(或确定的向量值 $\boldsymbol{f}(x,y,z,t)$)与它对应，就称 $f(x,y,z,t)$(或 $\boldsymbol{f}(x,y,z,t)$)为 Ω 上的**数量场**(或**向量场**). 例如，某一区域上每一点的温度确定了一个数量场(称为温度场)，而某流体在某一区域上每一点的速度确定了一个向量场(称为速度场)，如此等等. 如果一个场不随时间的变化而变化，就称该场为**稳定场**；否则称为**不稳定场**. 在本节中除非特别声明，我们只考虑稳定场.

梯度

显然，Ω 上任何一个三元函数 $f(x,y,z)$ 都可以看成是 Ω 上的一个数量场. 若 $f(x,y,x)$ 在 Ω 上具有连续偏导数，我们知道其梯度为

$$\mathrm{grad}f = f_x\boldsymbol{i} + f_y\boldsymbol{j} + f_z\boldsymbol{k},$$

而且沿方向

$$\boldsymbol{l} = \cos(l,x)\boldsymbol{i} + \cos(l,y)\boldsymbol{j} + \cos(l,z)\boldsymbol{k}$$

的方向导数可以表为 $\frac{\partial f}{\partial l} = \mathrm{grad}f \cdot \boldsymbol{l}$. 我们称曲面

$$f(x,y,z) = \mathrm{c}(常数)$$

为等值面. 若 f_x, f_y, f_z 不同时为零，我们知道在等值面上的一个单位法向量

为 $\boldsymbol{n}=\frac{f_x\boldsymbol{i}+f_y\boldsymbol{j}+f_z\boldsymbol{k}}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+f_z^2}}$，这时$\frac{\partial f}{\partial n}=\|\mathrm{grad}\, f\|$，它大于零，而且

$$\mathrm{grad}\, f=\frac{\partial f}{\partial n}\boldsymbol{n}.$$

这说明，一点的梯度方向与等值面在这点的一个法线方向相同，这个法线方向就是方向导数取得最大值的方向，且从数值较低的等值面指向数值较高的等值面，梯度的模就等于函数在这个方向的方向导数. 而 f 在这点沿相反方向(即梯度的相反方向)的方向导数达到最小值 $-\|\mathrm{grad}\, f\|$，这就是说，沿着与梯度方向相反的方向，函数值减少最快. 进一步，梯度是与坐标系的选取无关的向量. 这个结论在 $\mathbf{R}^n(n\geqslant 2)$ 上都成立.

我们称由数量场 f 产生的向量场 $\mathrm{grad}f=f_x\boldsymbol{i}+f_y\boldsymbol{j}+f_z\boldsymbol{k}$ 为梯度场.

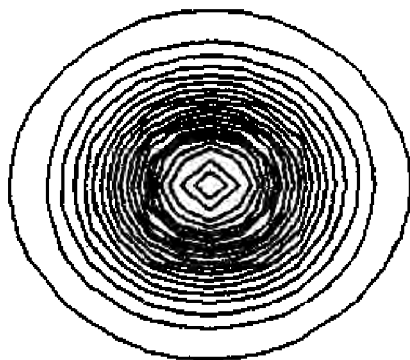


图 14.5.1

我们看一个实际例子. 经测量某积雪山顶的高度可用函数 $z=f(x,y)$ 来表示，图 14.5.1 是等高线图，即 $f(x,y)=c$ 的图形. 当雪融化时，由于重力的作用，雪水会沿高度下降最快的方向，即 $-\mathrm{grad}\, f$ 方向流动，溪流就是这样形成的.

通量与散度

设 Ω 中稳定流动的不可压缩流体(假定其密度为 1) 的速度场为

$$\boldsymbol{v}=v_x(x,y,z)\boldsymbol{i}+v_y(x,y,z)\boldsymbol{j}+v_z(x,y,z)\boldsymbol{k},$$

其中 v_x,v_y,v_z 具有连续偏导数. 设 Σ 是 Ω 中的一片定向曲面，则单位时间内通过 Σ 流向指定侧的流量为

$$\begin{aligned}\Phi&=\iint_{\Sigma}v_x(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+v_y(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+v_z(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{\Sigma}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S},\end{aligned}$$

这里 $\boldsymbol{n} = \cos\alpha\boldsymbol{i} + \cos\beta\boldsymbol{j} + \cos\gamma\boldsymbol{k}$ 为 Σ 在 (x,y,z) 处的、在指定侧的单位法向量.

显然,$\Phi > 0$ 说明了向指定侧穿过曲面 Σ 的流量多于向相反方向穿过曲面 Σ 的流量;$\Phi < 0$ 或 $\Phi = 0$ 说明了向指定侧穿过曲面 Σ 的流量少于或等于向相反方向穿过曲面 Σ 的流量. 如果 Σ 为一张封闭曲面,定向为外侧. 那么当 $\Phi > 0$ 时,就说明了从曲面内的流出量大于流入量,此时在 Σ 内必有产生流体的源头(源);当 $\Phi < 0$ 时,就说明了从曲面内的流出量小于流入量,此时在 Σ 内必有排泄流体的漏洞(汇).

要判断场中一点 $M(x,y,z)$ 是否源或汇,以及源的"强弱"或汇的"大小",可以作一张包含 M 的封闭曲面 Σ(定向为外侧),考察 Σ 所围区域 V 收缩到 M 点(记 $V \to M$ 为)时,$\Phi = \iint\limits_{\Sigma} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的值. 但因为 $V \to M$ 时有 $\Phi \to 0$,所以实际上我们考虑的是

$$\lim_{V\to M}\frac{\Phi}{mV} = \lim_{V\to M}\frac{\iint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{mV}$$

显然,这不改变其物理意义. 由 Gauss 公式,并利用积分中值定理得

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint\limits_{\Sigma} v_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + v_y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + v_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iiint\limits_{V}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)_{\widetilde{M}}\cdot mV.\end{aligned}$$

其中 $\widetilde{M}$ 为 V 上某一点. 因此当 $V \to M$ 时有

$$\begin{aligned}\lim_{V\to M}\frac{\Phi}{mV} &= \lim_{V\to M}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)_{\widetilde{M}} \\ &= \frac{\partial v_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial v_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial v_z(x,y,z)}{\partial z}.\end{aligned}$$

因此,可以用

$$\frac{\partial v_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial v_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial v_z(x,y,z)}{\partial z}$$

来判别场中的点是源还是汇,以及源的"强弱"或汇的"大小".

我们以此为背景引入一般性的概念.

定义 14.5.1　设

$$\boldsymbol{a}(x,y,z) = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k},(x,y,z) \in \Omega$$

是一个向量场,$P(x,y,z)$,$Q(x,y,z)$,$R(x,y,z)$ 具有连续偏导数. Σ 为场中的定向曲面,称曲面积分

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

*为向量场 $\boldsymbol{a}$ 沿指定侧通过曲面 Σ 的***通量**.

M 为这个场中任一点.称

$$\frac{\partial P}{\partial x}(M) + \frac{\partial Q}{\partial y}(M) + \frac{\partial R}{\partial z}(M)$$

为向量场 $\boldsymbol{a}$ 在 M 点的**散度**,记为 $\operatorname{div} \boldsymbol{a}(M)$.

想一想刚才举的流体的例子就可理解,如果 $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$ 大于零,则称在 M 点处有**正源**(源);如果 $\operatorname{div} \boldsymbol{a}(M)$ 小于零,则称在点处有**负源**(汇);如果 $\operatorname{div} \boldsymbol{a}(M) = 0$,则称在 M 点处**无源**.如果在场中每一点都成立 $\operatorname{div} \boldsymbol{a} = 0$,则称 $\boldsymbol{a}$ 为**无源场**.

利用散度的记号,Gauss 公式就可写成如下形式

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{a} \mathrm{d}V = \iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

设 M 为这个场中任一点.作包含 M 的一张封闭曲面 Σ,记 Σ 所围区域为 V, V 的体积记为 mV.如果 Σ 的定向为外侧,那么 $\Phi = \iint_{\Sigma} \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 就是从 V 穿出 Σ 的通量.用刚才处理流体速度场的方法就可得出:

定理 14.5.1　*$\boldsymbol{a}$ 的散度是通量关于体积的变化率,即*

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}(M) = \lim_{V \to M} \frac{\iint_{\Sigma} \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{mV}.$$

换句话说,散度就是穿出单位体积边界的通量.

从这个定理可以看出散度的定义本质上是与坐标系的选取无关的.我们称由向量场 $\boldsymbol{a}$ 产生的数量场 $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$ 为散度场.

向量线

我们知道在稳定流动的流体中质点的瞬时运动方向是该点的速度方向,这就是说,流体中质点的运动轨迹的切线方向,就是速度方向,这条轨迹称为流线.在一般向量场中这就是向量线的概念.

设

$$\boldsymbol{a}(x,y,z) = P(x,y,z)\boldsymbol{j} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k},(x,y,z) \in \Omega$$

为向量场,Γ 为 Ω 中的一条曲线.若 Γ 上的每一点处的切线方向都与场向量在该点的方向一致,则称 Γ 为向量场 $\boldsymbol{a}$ 的**向量线**.静电场中的电力线、磁场中的磁力线等都是向量线的实际例子.我们看看向量线需要满足什么条件.设 $M(x,y,z)$ 为向量线上任一点,则其矢量方程为

$$r = xi + yj + zk,$$

那么

$$dr = dxi + dyj + dzk$$

就是向量线在 M 点处的切向量.由定义,它与在 M 点处的场向量共线,因此

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}.$$

这就是向量线所满足的方程,如果解出它的话,一般就得到向量线族.如果再利用过 M 点这个条件,就得到过 M 点的向量线.一般来说,向量场中每一点有一条且仅有一条向量线通过它,向量线族充满了向量场所在的空间.

例 14.5.1 由电磁学中的Coulomb定律,在位于原点的点电荷 q(这里 q 表示电荷大小)所产生的静电场中,任何一点 $M(x,y,z)$ 处的电场强度为

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r},$$

其中 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 为 M 点到原点的距离,$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$,$\varepsilon_0$ 为真空介电常数.

将 $\boldsymbol{E}$ 具体写出来就是

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r} = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{i} + \frac{qy}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{j} + \frac{qz}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{k}.$$

由于

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,\frac{r^2-3x^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{qy}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,\frac{r^2-3y^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{qz}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,\frac{r^2-3z^2}{r^5}.$$

所以

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\boldsymbol{E} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{qy}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{qz}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\right) \\ &= 0, \quad x^2+y^2+z^2 \neq 0.\end{aligned}$$

1. 设 S 为以原点为心、半径为 R 的球面,定向取外侧.注意到在球面 S 上恒有 $r = R$,且 $\boldsymbol{E}$ 的方向与球面 S 的外法向量的方向相同,因此从内部穿出球面 S 的通量(称为**电通量**)为

$$\Phi = \iint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \iint_S \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dS = \iint_S \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\iint_S dS = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

2. 设 Σ 为任意一张光滑或分片光滑的封闭曲面.

(i) 如果 Σ 内不含原点. 记 Σ 所包围的区域为 Ω, 则由 Gauss 公式,

$$\iint_{\Sigma} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{E} \mathrm{d}V = 0.$$

(ii) 如果 Σ 内含有原点, 那么不能直接用 Gauss 公式. 在曲面 Σ 所包围的区域内取一个以原点为心的小球面 σ, 定向取内侧. 记 Ω_1 为介于 σ 与 Σ 之间的区域. 由 Gauss 公式得

$$\iint_{\Sigma} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \iint_{\sigma} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_{\Omega_1} \operatorname{div} \boldsymbol{E} \mathrm{d}V = 0,$$

因此从内部穿出曲面 Σ 的电通量

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\iint_{\sigma} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

因此, 电场强度穿出任一封闭曲面的电通量等于其内部的电荷量除以 ε_0, 这正是电磁学中的 Gauss 定律.

此外, 利用前面的讨论, 电场强度的向量线即电力线应满足关系式

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}z}{z},$$

由此解得电力线的方程为

$$\begin{cases} y = C_1 x, \\ z = C_2 x. \end{cases}$$

这是一族从坐标原点出发的半射线(见图 14.5.2).

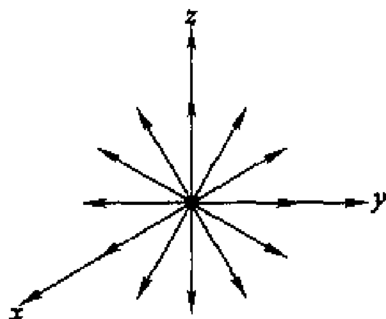


图 14.5.2

环量与旋度

设稳定不可压缩流体的速度场为

$$\boldsymbol{v} = v_x(x, y, z)\boldsymbol{i} + v_y(x, y, z)\boldsymbol{j} + v_z(x, y, z)\boldsymbol{k},$$

其中 v_x, v_y, v_z 具有连续偏导数. 设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 是场中一点. 如果在 M_0 附近有旋涡, 流体以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 旋转(这里 $\boldsymbol{\omega}$ 在旋涡的轴线上, 且方向与旋涡的旋

转方向符合右手螺旋定则). 那么 M_0 附近的任一点 $M(x,y,z)$ 的速度 $\boldsymbol{v}$ 可以表为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r},$$

其中 $\boldsymbol{v}_0$ 表示在点 M_0 的速度, $\boldsymbol{r}$ 表示向量 $\overrightarrow{M_0M}$ (见图 14.5.3). 这就是说, M 点的速度 $\boldsymbol{v}_0$ 是平移速度与旋转产生的线速度 $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ 的叠加.

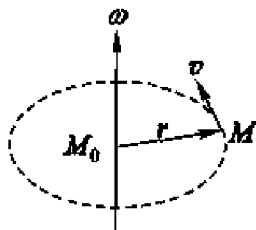


图 14.5.3

记 $\boldsymbol{\omega}=(\omega_x,\omega_y,\omega_z)$, , $\boldsymbol{v}_0=(v_{0x},v_{0y},v_{0z})$, 则 M 点的速度 $\boldsymbol{v}=(v_x,v_y,v_z)$ 为

$$\begin{aligned}v_x&=v_{0x}+\omega_y(z-z_0)-\omega_z(y-y_0)\\v_y&=v_{0y}+\omega_z(x-x_0)-\omega_x(z-z_0)\\v_z&=v_{0z}+\omega_x(y-y_0)-\omega_y(x-x_0)\end{aligned}$$

于是在 M 点成立

$$\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}=2\omega_x,\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}=2\omega_y,\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}=2\omega_z.$$

因此向量

$$\boldsymbol{B}=\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}=2\boldsymbol{\omega}$$

同样可以描述旋涡的强度和方向, 然而 $\boldsymbol{B}$ 是由速度场本身决定的, 不用真正测量出角速度 $\boldsymbol{\omega}$.

设 Γ 为场中的定向闭曲线, 由 Stokes 公式

$$\int_\Gamma\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\iint_\Sigma\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

这里 Σ 是任意以 Γ 为边界的曲面, 定向与 Γ 符合右手定则, 由此可见曲线积分 $\int_\Gamma\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 也与流体的旋转状态有密切关系, 我们以此为背景引入一般性的概念.

定义 14.5.2　设

$$\boldsymbol{a}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k},(x,y,z)\in\Omega$$

是一个向量场，$P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 具有连续偏导数.

设 Γ 为场中的定向曲线，称曲线积分

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

为向量场 $\boldsymbol{a}$ 沿定向曲线 Γ 的**环量**.

设 M 为这个场中任一点. 称向量

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}_M = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)_M \boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)_M \boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)_M \boldsymbol{k}$$

为向量场 $\boldsymbol{a}$ 在 M 点的**旋度**，记为 $\mathrm{rot}\ \boldsymbol{a}(M)$ 或 $\mathrm{curl}\ \boldsymbol{a}(M)$.

由向量场 $\boldsymbol{a}$ 产生的向量场 $\mathrm{rot}\ \boldsymbol{a}$ 称为**旋度场**. 如果在场中每一点都成立 $\mathrm{rot}\ \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$，则称 $\boldsymbol{a}$ 为**无旋场**.

于是，Stokes 公式可以写成

$$\iint_{\Sigma} \mathrm{rot}\ \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{\partial\Sigma} \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s},$$

可以对旋度作类似于散度的解释. 在场中一点 M 处任取一个向量 $\boldsymbol{n}$，作小平面片 Σ 过 M 点且以 $\boldsymbol{n}$ 为法向量，并按右手定则取定 $\partial\Sigma$ 的方向. 记 Σ 的面积为 $m\Sigma$，如果当 Σ 收缩到点 M 时（记为 $\Sigma \to M$），

$$\frac{\displaystyle\int_{\partial\Sigma} \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}}{m\Sigma}$$

的极限存在，则称此极限值为向量场 $\boldsymbol{a}$ 在 M 点沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的**环量面密度**. 它是环量关于面积的变化率，即沿平面上单位面积边缘的环量.

定理 14.5.2 向量场 $\boldsymbol{a}$ 在 M 点处的旋度就是这样一个向量：$\boldsymbol{a}$ 在 M 点处沿旋度方向的环量面密度最大，而且最大值就是 $\|\mathrm{rot}\ \boldsymbol{a}(M)\|$.

证 对于包含 $M(x,y,z)$ 的小平面片 Σ，设它的单位法向量为 $\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$，由 Stokes 公式，并利用积分中值定理得

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Sigma} \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} &= \int_{\partial\Sigma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z \\ &= \iint_{\Sigma} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]\mathrm{d}S \\ &= \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]_{\widetilde{M}} \cdot m\Sigma,\end{aligned}$$

其中$\widetilde{M}$为Σ上某一点. 因此当$\Sigma\to M$时，$\boldsymbol{a}$在M点沿方向$\boldsymbol{n}$的环量面密度为

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Sigma\to M}\frac{\int_{\partial\Sigma}\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}}{m\Sigma}\\
&=\lim_{\Sigma\to M}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]_{\widetilde{M}}\\
&=\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]_{M}\\
&=\|\operatorname{rot}\boldsymbol{a}(M)\|\cdot\cos\left(\operatorname{rot}\boldsymbol{a}(M),\boldsymbol{n}\right)\leqslant\|\operatorname{rot}\boldsymbol{a}(M)\|,
\end{aligned}$$

因此$\boldsymbol{a}$在M点处沿旋度方向的环量面密度最大，且最大值为$\|\operatorname{rot}\boldsymbol{a}(M)\|$.

证毕

以前面提到的流体速度场为例，它在与$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$垂直的平面上，沿单位面积边缘的环量最大(这显然符合实际)，达到角速度的模的两倍.

由定理易知旋度本质上是与坐标系的选取无关的.

例 14.5.2　设一根无限长直线导线载有电流I(见图 14.5.4). 由电磁学知，这电流产生的磁感强度$\boldsymbol{B}$的大小为

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

这里r为观察点到导线的距离，μ_0为真空磁导率. 而磁力线是围绕该导线的圆周，电流方向、半径方向和磁感强度的方向成右手定则.

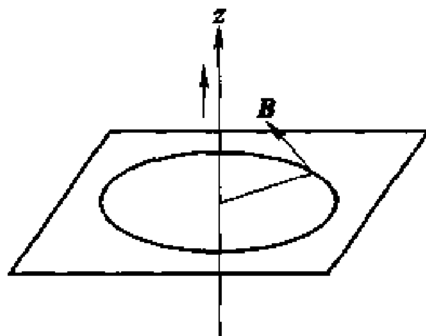


图 14.5.4

取导线为z轴，电流方向为z轴的正向. 任取一张垂直于导线的平面为xy平面. 那么在点$M(x,y,z)(x^2+x^2\neq 0)$的磁感强度为

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r^2}(-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}),$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$. 于是

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{-y}{r^2} & \dfrac{x}{r^2} & 0\end{vmatrix}=\boldsymbol{0},\quad x^2+y^2\neq 0.$$

1. 对位于垂直于导线的平面上的、围绕导线的任意简单闭曲线 Γ,如果我们取它的定向为从上往下看是逆时针方向,从例 14.3.5 知 $\boldsymbol{B}$ 沿 Γ 的环量为

$$\int_{\Gamma}\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_{\Gamma}\boldsymbol{B}\cdot \boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\mu_0 I.$$

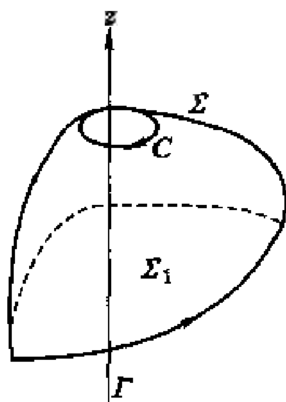


图 14.5.5

2. 对于空间中任意一条简单闭曲线 Γ(取它的定向为从上往下看是逆时针方向)以及以 Γ 为边界一张曲面 Σ,取 Σ 的定向与 Γ 的定向符合右手定则.

(i) 如果导线不穿过曲面 Σ,那么

$$\int_{\Gamma}\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=\iint_{\Sigma}\operatorname{rot}\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0.$$

(ii) 如果导线穿过曲面 Σ 一次,这时不能直接用Stokes定理. 适当取一张垂直于导线的平面使得它与 Σ 的交线 C 为围绕导线的简单闭曲线(见图 14.5.5,我们只考虑这种情形,其它类似). 记曲面 Σ 在 Γ 和 C 之间的部分为 Σ_1. 那么由 Stokes 定理

$$\int_{\Gamma}\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}+\int_{C}\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=\iint_{\Sigma_1}\operatorname{rot}\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0.$$

注意 C 的定向取为:从上往下看是顺时针方向. 因此利用(i) 的结果可知

$$\oint_{\Gamma}\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\oint_{C}\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mu_0 I.$$

综上所述，磁感强度沿封闭曲线 Γ 的环量与通过该曲线所围曲面的电流 I 成正比，即

$$\oint_{\Gamma}\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mu_0 I,$$

这就是 Ampère 环路定律.

Hamilton 算子

为了方便，我们介绍 Hamilton 引进的微分算子

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

记号 ∇ 读做“Nabla”.

若函数 $f(x,y,z)$ 和向量场 $\boldsymbol{a}(x,y,z) = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k}$ 在区域 Ω 上满足所需的可偏导条件，则有

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k} = \operatorname{grad} f;$$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{a} &= \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}) \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div}\boldsymbol{a};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{a} &= \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}) = \begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R\end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} = \operatorname{rot}\boldsymbol{a}.\end{aligned}$$

显然，

$$\nabla\cdot\nabla f = \nabla\cdot(\operatorname{grad} f) = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \Delta f,$$

这里记号 $\Delta = \nabla\cdot\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 称为 **Laplace 算子**. 满足 **Laplace 方程**

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

的函数叫做**调和函数**.

这样，Gauss 公式就可表示为

$$\iint_{\partial\Omega}\boldsymbol{a}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_{\Omega}\nabla\cdot\boldsymbol{a}\,\mathrm{d}V;$$

Stokes 公式就可表示为

$$\int_{\partial\Sigma} \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \iint_{\Sigma} (\nabla \times \boldsymbol{a}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

设函数 f,g 具有二阶连续偏导数,容易验证等式

$$\nabla \cdot (g\nabla f) = \nabla g \cdot \nabla f + g\Delta f$$

成立.如果置 $\boldsymbol{a} = g\Delta f$,从 Gauss 公式就得

$$\iiint_{\Omega} (\nabla g \cdot \nabla f + g\Delta f)\mathrm{d}V = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot (g\nabla f)\mathrm{d}V = \iint_{\partial\Omega} g\nabla f \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{\partial\Omega} g(\mathrm{grad}\, f \cdot \boldsymbol{n})\mathrm{d}S = \iint_{\partial\Omega} g\frac{\partial f}{\partial n}\mathrm{d}S.$$

同样置 $\boldsymbol{a} = f\nabla g$,就得

$$\iiint_{\Omega} (\nabla f \cdot \nabla g + f\Delta g)\mathrm{d}V = \iint_{\partial\Omega} f\frac{\partial g}{\partial n}\mathrm{d}S.$$

这两式相减就得到

$$\iiint_{\Omega} (f\Delta g - g\Delta f)\mathrm{d}V = \iint_{\partial\Omega} \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n}\right)\mathrm{d}S.$$

最后两个公式分别称为**Green 第一公式**和**Green 第二公式**,在数学物理中有着很多应用.

下面不加证明地列出场论中的一些基本关系式(第二式是将第一式的结果用 Hamilton 算子表示,读者可结合乘积的求导公式和向量的点积与叉积公式来帮助记忆并自行证明).设 $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$ 为向量场,其分量函数 a_x,a_y,a_z,b_x,b_y,b_z 和 f 均具有所需阶的连续偏导数,λ,μ 为常数.

(1) $\mathrm{div}(\lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}) = \lambda\mathrm{div}\,\boldsymbol{a} + \mu\mathrm{div}\,\boldsymbol{b}$;

$\nabla \cdot (\lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}) = \lambda(\nabla \cdot \boldsymbol{a}) + \mu(\nabla \cdot \boldsymbol{b})$;

(2) $\mathrm{rot}\,(\lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}) = \lambda\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a} + \mu\mathrm{rot}\,\boldsymbol{b}$;

$\nabla \times (\lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}) = \lambda(\nabla \times \boldsymbol{a}) + \mu(\nabla \times \boldsymbol{b})$;

(3) $\mathrm{div}(f\boldsymbol{a}) = f\mathrm{div}\,\boldsymbol{a} + \mathrm{grad}\,f \cdot \boldsymbol{a}$;

$\nabla \cdot (f\boldsymbol{a}) = f(\nabla \cdot \boldsymbol{a}) + (\nabla f) \cdot \boldsymbol{a}$;

(4) $\mathrm{rot}(f\boldsymbol{a}) = f\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a} + \mathrm{grad}\,f \times \boldsymbol{a}$;

$\nabla \times (f\boldsymbol{a}) = f(\nabla \times \boldsymbol{a}) + (\nabla f) \times \boldsymbol{a}$;

(5) $\mathrm{div}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b} \cdot \mathrm{rot}\,\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{rot}\,\boldsymbol{b}$;

$\nabla \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{b})$

(6) $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,f) = \boldsymbol{0}$;

$\nabla \times (\nabla f) = (\nabla \times \nabla)f = \boldsymbol{0}$;

(7) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \boldsymbol{a}) = 0$;

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{a}) = 0.$$

最后我们谈一下公式(3)的应用.从公式(3)得

$$f\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \operatorname{div}(f\boldsymbol{a}) - \operatorname{grad}f \cdot \boldsymbol{a},$$

两边积分便得"分部"积分公式

$$\iiint\limits_{\Omega} f\operatorname{div} \boldsymbol{a}\mathrm{d}V = \iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div}(f\boldsymbol{a})\mathrm{d}V - \iiint\limits_{\Omega} \operatorname{grad} f \cdot \boldsymbol{a}\mathrm{d}V$$

$$= \iint\limits_{\partial\Omega} f\boldsymbol{a}\mathrm{d}\boldsymbol{S} - \iiint\limits_{\Omega} \operatorname{grad} f \cdot \boldsymbol{a}\mathrm{d}V.$$

这说明了对 $\boldsymbol{a}$ 的"导数"$\operatorname{div} \boldsymbol{a}$,利用 Gauss 公式可以转移到可能具有较好性质的函数 f 的"导数"$\operatorname{grad}f$ 上.读者在后续的课程中会看到,这是偏微分方程中"广义解(弱解)"的基础,也是广义导数的引入思想.

保守场与势函数

定义 14.5.3　设

$\boldsymbol{a}(x,y,z) = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k},(x,y,z) \in \Omega$ 为向量场,其中 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在区域 Ω 上连续.若存在函数 $U(x,y,z)$ 满足 $\boldsymbol{a} = \operatorname{grad}U$,则称向量场 $\boldsymbol{a}$ 为**有势场**,并称函数 $V = -U$ 为**势函数**.

从定义看出,有势场是梯度场.一个场的势函数有无穷多个,但它们之间只相差一个常数.

定义 14.5.4　如果对于 Ω 内任意两点 A,B,积分值

$$\int\limits_{L} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

只与 A,B 两点有关,而与从 A 到 B 的路径(光滑或分段光滑曲线)L 无关,就称曲线积分 $\int\limits_{L} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$ 与路径无关.

如果在向量场 $\boldsymbol{a}$ 中曲线积分与路径无关,则称 $\boldsymbol{a}$ 为**保守场**.

显然,这等价于沿 Ω 内任意闭曲线的积分值为零.

若对区域 Ω 中的任何简单闭曲线 L,都存在完全在 Ω 中的曲面片,它以 L 为边界,则称 Ω 为**一维单连通**的.注意一维单连通与二维单连通毫无关系.如空心球 $\{(x,y,z) \mid 1 < x^2 + y^2 + z^2 < 3\}$(图 14.5.6)是一维单连通的,但不是二维单连通的;而环面的内部(图 14.5.7)是二维单连通的,但不是一维单连通的.

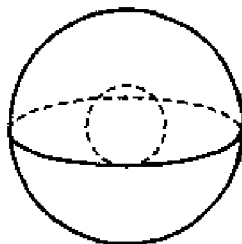


图 14.5.6



图 14.5.7

关于保守场与有势场的关系有如下定理.

定理 14.5.3　设 $\Omega \in \mathbf{R}^3$ 为一维单连通区域,在 Ω 上定义了向量场
$\boldsymbol{a}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k},(x,y,z)\in\Omega$,且 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在 Ω 上具有连续偏导数.则以下三个命题等价:

(1) $\boldsymbol{a}$ 是保守场;

(2) $\boldsymbol{a}$ 是有势场;

(3) $\boldsymbol{a}$ 是无旋场.

事实上,这三个命题再加上"沿 Ω 内任意闭曲线的积分值为零",就是定理 14.3.2 关于平面上曲线积分与路径无关的四个等价条件的三维形式.请读者仿照其证明方法并应用场论的有关定义,从(1)⇒(2)⇒(3)⇒(1) 的思路证明以上定理,注意(3)⇒(1) 需要利用 Stokes 公式.

定理 14.5.4　设函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z)$ 和 $R(x,y,z)$ 在区域 Ω 上连续,若 $U(x,y,z)$ 是 1 - 形式 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ 的一个**原函数**(即在 Ω 上恒有 $\mathrm{d}U=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$),则对于 Ω 内任意两点 $A(x_A,y_A,z_A),B(x_B,y_B,z_B)$ 成立

$$\int_{\overparen{AB}} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z = U(x_B,y_B,z_B)-U(x_A,y_A,z_A),$$

其中 $\overparen{AB}$ 为从 A 到 B 的任意路径.

例 14.5.3　设在坐标原点处有一质量为 m 的质点.根据万有引力定律,它在 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 点产生的引力,其方向指向原点,大小与它们的距离的平方成反比.因此质点的引力场可表为

$$\boldsymbol{F}=-\frac{Gmx}{r^3}\boldsymbol{i}-\frac{Gmy}{r^3}\boldsymbol{j}-\frac{Gmz}{r^3}\boldsymbol{k},$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,G 为引力常量.

容易验证 $U(x,y,z)=\dfrac{Gm}{r}$ 满足 $\mathrm{grad}\,U=\boldsymbol{F}$,因此 $\boldsymbol{F}$ 为有势场,它的一个势函数为 $V(x,y,z)=-\dfrac{Gm}{r}$.

将单位质量的物体从 $A(x_A,y_A,z_A)$ 处沿路径 L 移动到 $B(x_B,y_B,z_B)$ 处引力所作的功为

$$W=\int_L \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=-Gm\int_L \frac{x}{r^3}\mathrm{d}x+\frac{y}{r^3}\mathrm{d}y+\frac{z}{r^3}\mathrm{d}z,$$

这里 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}x\boldsymbol{i}+\mathrm{d}y\boldsymbol{j}+\mathrm{d}z\boldsymbol{k}$. 由于 $\boldsymbol{F}$ 为有势场即保守场,因此 W 与 $\boldsymbol{L}$ 路径无关. 显然, $-\frac{1}{r}$(它与 $V(x,y,z)$ 只相差一个常数因子)是 $\frac{x}{r^3}\mathrm{d}x+\frac{y}{r^3}\mathrm{d}y+\frac{z}{r^3}\mathrm{d}z$ 的一个原函数,于是

$$W=-Gm\int_{(x_A,y_A,z_A)}^{(x_B,y_B,z_B)}\frac{x}{r^3}\mathrm{d}x+\frac{y}{r^3}\mathrm{d}y+\frac{z}{r^3}\mathrm{d}z=-Gm\left[-\frac{1}{r}\right]_{(x_A,y_A,z_A)}^{(x_B,y_B,z_B)}$$

$$=Gm\left(\frac{1}{\sqrt{x_B^2+y_B^2+z_B^2}}-\frac{1}{\sqrt{x_A^2+y_A^2+z_A^2}}\right).$$

最后说一下势函数 $V(x,y,z)$ 的物理意义. 在这个力场中,设质点在无穷远点的势能为 0,那么一个单位质量的质点在点 $M(x,y,z)$ 的势能就是将它从无穷远点 ∞ 移到点 M 时,克服引力所作的功,即

$$\int_\infty^M -\boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=Gm\int_\infty^M \frac{x}{r^3}\mathrm{d}x+\frac{y}{r^3}\mathrm{d}y+\frac{z}{r^3}\mathrm{d}z=-\frac{Gm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=-\frac{GM}{r},$$

这正是势函数 $V(x,y,z)$.

例 14.5.4 我们已经知道,位于原点的点电荷 q(这里 q 表示电荷的大小)产生的静电场的电场强度为

$$\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r}=\frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{i}+\frac{qy}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{j}+\frac{qz}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{k},\ r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

容易验证,

$$\boldsymbol{E}=-\operatorname{grad}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

因此它是有势场,即保守场.

均匀带电直线的电场模型

设 L 是一条无限长均匀带电的直线,电荷分布的线密度为 q. 现在考察它所产生的电场中的任一点的电场强度 $\boldsymbol{E}$.

取这条直线为 z 轴,直线上任取一点为坐标原点(见图 14.5.8). 设 $P(x,y,z)$ 为空间上的一个点. 由于 L 是无限长的,因此由对称性,P 点的电场强度的垂直方向分量 $\boldsymbol{E}_z=\boldsymbol{0}$.

记 $\boldsymbol{E}$ 在 x 方向与 y 方向的分量 $\boldsymbol{E}_x,\boldsymbol{E}_y$ 的大小分别为 E_x,E_y. 任取带电直线 L 上的微元 $\mathrm{d}l$,那么它所带的电荷为 $q\mathrm{d}l$. 若设 $\mathrm{d}l$ 的坐标为 $(0,0,a)$,则由 Coulomb 定律,它在 P 点产生的电场强度为

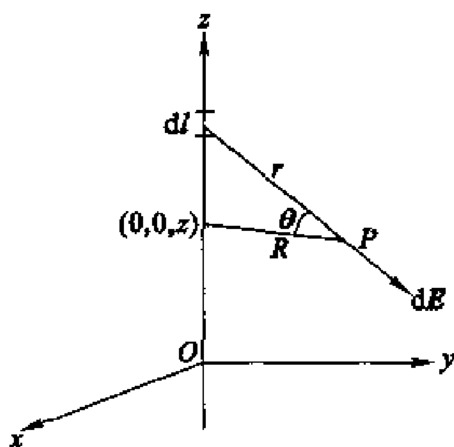


图 14.5.8

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\mathrm{d}l}{r^3}\boldsymbol{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\mathrm{d}l}{r^3}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+(z-a)\boldsymbol{k}),$$

其中 r 为P点与 $\mathrm{d}l$ 的距离,$\boldsymbol{r}$ 为从 $\mathrm{d}l$ 到P 的向量,因此 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 在x 轴与y 轴方向的分量的大小分别为

$$\mathrm{d}E_x=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\mathrm{d}l}{r^3}x,\quad \mathrm{d}E_y=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\mathrm{d}l}{r^3}y.$$

记 $R=\sqrt{x^2+y^2}$,则 $r=\dfrac{R}{\cos\theta}$,其中 θ 为过 $\mathrm{d}l$ 和P 两点的直线与过P 点且平行于 xy 平面的平面之间的夹角. 如果记 $\mathrm{d}l$ 与点 $(0,0,z)$ 的距离(即 $|a-z|$)为 l,那么 $l=R\tan\theta$,于是

$$\mathrm{d}l=R\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta}.$$

所以

$$\mathrm{d}E_x=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{R^2}\cos\theta\mathrm{d}\theta,\quad \mathrm{d}E_y=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qy}{R^2}\cos\theta\mathrm{d}\theta.$$

由于带电直线 L 无限长,因此对应的 θ 的取值范围是$(-\pi/2,\pi/2)$,于是

$$E_x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{R^2}\cos\theta d\theta=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{R^2},E_y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qy}{R^2}\cos\theta d\theta=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qy}{R^2}.$$

于是,

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{R^2}\boldsymbol{i}+\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{R^2}\boldsymbol{j}+0\cdot\boldsymbol{k}=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}}{x^2+y^2}.$$

这说明一点的电场强度的大小与电荷分布的线密度成正比,与该点到带电直线的距离成反比,场强的方向与带电直线垂直.

由于

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E}=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{x}{x^2+y^2} & \dfrac{y}{x^2+y^2} & 0\end{vmatrix}=\boldsymbol{0},$$

因此 $\boldsymbol{E}$ 是无旋场即有势场，它的一个势函数为

$$V=-U=-\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}\frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y+0\cdot\mathrm{d}z$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{x_0^2+y_0^2}{x^2+y^2},$$

这里 $x_0^2+y_0^2\neq 0$. 于是等势(等电势)线方程为

$$x^2+y^2=C.$$

再来求 $\boldsymbol{E}$ 的电力线. 从关系式

$$\frac{\mathrm{d}x}{\dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{x}{x^2+y^2}}=\frac{\mathrm{d}y}{\dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{y}{x^2+y^2}}=\frac{\mathrm{d}z}{0}$$

即可解得电力线方程为 $\begin{cases}y=C_1x,\\ z=C_2.\end{cases}$

图 14.5.9 是 xy 平面上的电力线与等电势线的示意图(任意与其平行的平面上的电力线和等电势线也都是这样的形状)，其中射线为电力线，圆为等电势线.

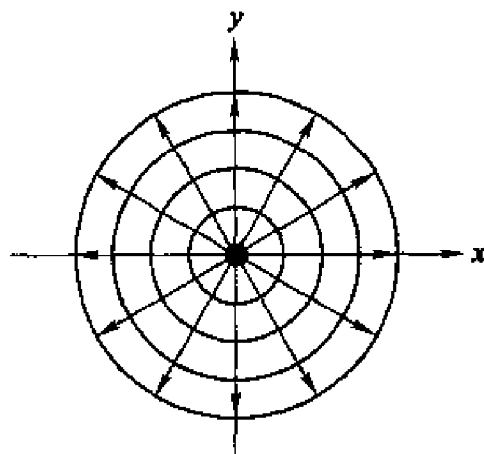


图 14.5.9

热传导模型

设 $U(x,y,z,t)$ 是某一均匀介质(密度为 ρ)上的无热源的温度场，显然它是数量场. 设 Ω 为场内任一个区域、边界的定向为外侧. 任取 $\partial\Omega$ 上面积为 $\mathrm{d}S$ 曲面微元，设它在指定侧的单位法向量为 $\boldsymbol{n}$，我们先看在时间 $\mathrm{d}t$ 内流过这个曲面微元的热量. 由热学知道，热是

从介质的较热部分流向较冷的部分，且温度减低得越快，流得也越快，这就是说热量向 $-\operatorname{grad}U$ 方向流动，且传导速度与 $\operatorname{grad}U$ 成正比. 因此在时间 dt 内流过这个曲面微元的热量为（参见关于流量的计算）

$$dQ = -k(\operatorname{grad}U)\cdot \boldsymbol{n}dSdt = -k\left(\frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma\right)dSdt,$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦，k 为介质的热导率. 这样一来，在时间 dt 内自 Ω 通过 $\partial\Omega$ 向外流出的热量为

$$Q = -kdt\iint\limits_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma\right)dS = -kdt\iint\limits_{\partial\Omega}\operatorname{grad}U\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$= -kdt\iiint\limits_{\Omega}\operatorname{div}(\operatorname{grad}U)dV,$$

最后一步是利用了 Gauss 公式. 由于场内无热源，那么时间 dt 内流入 Ω 的热量为

$$kdt\iiint\limits_{\Omega}\operatorname{div}(\operatorname{grad}U)dV,$$

这一热量引起 Ω 内部的温度变化.

另一方面，对于 Ω 内体积为 dV 的立体微元，在时间 dt 内温度改变 $dU = \frac{\partial U}{\partial t}dt$ 所需要的热量为

$$cdU\rho dV = c\frac{\partial U}{\partial t}dt\rho dV,$$

其中 c 为介质的比热容. 那么在时间 dt 内 Ω 的温度改变就需要 $dt\iiint\limits_{\Omega}c\rho\frac{\partial U}{\partial t}dV$ 的热量.

由于场内无热源，所以流出与流入的热量必相等，即

$$kdt\iiint\limits_{\Omega}\operatorname{div}(\operatorname{grad}U)dV = dt\iiint\limits_{\Omega}c\rho\frac{\partial U}{\partial t}dV.$$

因此

$$\iiint\limits_{\Omega}\left[c\rho\frac{\partial U}{\partial t} - k\operatorname{div}(\operatorname{grad}U)\right]dv = 0.$$

由于 Ω 是场内的任意区域，在场内必成立

$$c\rho\frac{\partial U}{\partial t} - k\operatorname{div}(\operatorname{grad}U) = 0.$$

注意到 $\operatorname{div}(\operatorname{grad}U) = \Delta U$，那么上式就可表为

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2\Delta U,$$

其中 $a^2 = \frac{k}{c\rho}$. 这就是说，函数 U 必满足以上方程，它称为热传导方程.

当温度场 U 为稳定场（即与时间无关的场）时，以上方程就是 Laplace 方程

$$\Delta U = 0,$$

这就是说，U 是调和函数.

例 14.5.5　设无热源的温度场 U 为稳定场，那么从以上的讨论知道 $\Delta U = 0$.

设 Ω 为场中一个区域. 如果我们将 U 沿 $\partial\Omega$ 的单位外法向方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数记为 f，那么 U 就满足方程

$$\begin{cases}\Delta U = 0,\text{在 } \Omega \text{ 中};\\ \dfrac{\partial U}{\partial n} = f,\text{在 } \partial\Omega \text{ 中}.\end{cases}$$

我们看看函数 f 需要满足什么条件. 由 Gauss 公式得

$$0 = \iiint_{\Omega} \Delta U \mathrm{d}V = \iiint_{\Omega} \mathrm{div}(\mathrm{grad}\ U)\mathrm{d}V = \iint_{\partial\Omega} \mathrm{grad} U \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S$$
$$= \iint_{\partial\Omega} \frac{\partial U}{\partial n}\mathrm{d}S = \iint_{\partial\Omega} f\mathrm{d}S.$$

即函数 f 必须满足 $\iint_{\partial\Omega} f\mathrm{d}S = 0$,它称为相容性条件. 这个条件很容易理解,因为 $\iint_{\partial\Omega} f\mathrm{d}S = \iint_{\partial\Omega} \frac{\partial U}{\partial n}\mathrm{d}S$ 就是单位时间内沿 $\partial\Omega$ 的外侧流过 $\partial\Omega$ 的热量,注意到 U 是无热源的稳定场,它当然是 0.

习　　题

1. 设 $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} + 20\boldsymbol{j} - 15\boldsymbol{k}$,对下列数量场 $f(x,y,z)$,分别计算 $\mathrm{grad}\ f$ 和 $\mathrm{div}(f\boldsymbol{a})$:

(1) $f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$;

(2) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$;

(3) $f(x,y,z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$.

2. 求向量场 $\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ 穿过球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 在第一卦限部分的通量,其中球面在这一部分的定向为上侧.

3. 设 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $r = |\boldsymbol{r}|$,求:

(1) 满足 $\mathrm{div}[f(r)\boldsymbol{r}] = 0$ 的函数 $f(r)$;

(2) 满足 $\mathrm{div}[\mathrm{grad} f(r)] = 0$ 的函数 $f(r)$.

4. 计算向量场 $\boldsymbol{a} = \mathrm{grad}\left(\arctan \dfrac{y}{x}\right)$ 沿下列定向曲线的环量:

(1) 圆周 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1, z = 0$,定向为逆时针方向;

(2) 圆周 $x^2 + y^2 = 4, z = 1$,定向为顺时针方向.

5. 计算向量场 $\boldsymbol{r} = xyz(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{y} + \boldsymbol{k})$ 在点 $M(1,3,2)$ 处的旋度,以及在这点沿方向 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ 的环量面密度.

6. 设向量场 $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$, $f(x,y,z)$ 为数量场,证明:(假设函数 a_x, a_y, a_z 和 f 具有必要的连续偏导数)

(1) $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{a}) = 0$;

(2) $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\ f) = 0$;

(3)$\mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{a}) - \mathrm{rot}(\mathrm{rot}\boldsymbol{a}) = \Delta \boldsymbol{a}$

7. 位于原点的点电荷 q 产生的静电场的电场强度为$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})$，其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$，$\varepsilon_0$ 为真空介电常数. 求 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}$.

8. 设 $\boldsymbol{a}$ 为常向量，$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$，验证：

(1)$\nabla \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}) = 0$;

(2)$\nabla \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}) = 2\boldsymbol{a}$;

(3)$\nabla \cdot ((\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{a}) = 2\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{a}$;

9. 求全微分$(x^2 - 2yz)\mathrm{d}x + (y^2 - 2xz)\mathrm{d}y + (z^2 - 2xy)\mathrm{d}z$ 的原函数.

10. 证明向量场 $\boldsymbol{a} = \frac{x - y}{x^2 + y^2}\boldsymbol{i} + \frac{x + y}{x^2 + y^2}\boldsymbol{j}(x > 1, y > 1)$是有势场，并求势函数.

11. 证明向量场 $\boldsymbol{a} = (2x + y + z)yz\boldsymbol{i} + (x + 2y + z)zx\boldsymbol{j} + (x + y + 2z)xy\boldsymbol{k}$ 是有势场，并求出它的势函数.

12. 验证 $u = y^3 - 3x^2y$ 为平面上的调和函数.

13. 设 $u(x, y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上具有二阶连续偏导数，证明 u 是调和函数的充要条件为：对于 $\mathbf{R}^2$ 中任意光滑封闭曲线 C，成立 $\int_C \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s = 0$，其中$\frac{\partial u}{\partial n}$ 为沿C 的外法线方向的方向导数.

14. 设 $u = u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 都为平面上的调和函数. 置 $F = \sqrt{u^2 + v^2}$. 证明当 $p \geqslant 2$ 时，在 $F \neq 0$ 的点成立

$$\Delta(F^p) \geqslant 0.$$

15. 可以知道，在柱面坐标系$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$中每一点$(r, \theta, z)$有三个相互正交的单位向量 $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_z$，它们关于$(r, \theta, z)$具有连续偏导数. 设 f 为数量场，$\boldsymbol{F} = \alpha\boldsymbol{e}_r + \beta\boldsymbol{e}_\theta + \gamma\boldsymbol{e}_z$ 为向量场. 验证：

$$\mathrm{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{e}_z,$$

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{F} = \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial(r\alpha)}{\partial r} + \frac{\partial \beta}{\partial \theta} + \frac{\partial(r\gamma)}{\partial z}\right\},$$

$$\Delta f = \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right\},$$

$$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{F} = \left\{\frac{1}{r}\frac{\partial \gamma}{\partial \theta} - \frac{\partial \beta}{\partial z}\right\}\boldsymbol{e}_r + \left\{\frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial r}\right\}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial(r\beta)}{\partial r} - \frac{\partial \alpha}{\partial \theta}\right\}\boldsymbol{e}_z.$$

第十五章　含参变量积分

§1　含参变量的常义积分

含参变量常义积分的定义

设 $f(x,y)$ 是定义在闭矩形 $[a,b]\times[c,d]$ 上的连续函数，于是对于任意固定的 $y\in[c,d]$，$f(x,y)$ 是 $[a,b]$ 上的一元连续函数，因此积分存在，且积分 $\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ 值由唯一确定. 也就是说，

$$I(y)=\int_a^b f(x,y)dx, y\in[c,d]$$

确定了一个关于 y 的一元函数. 由于式中的 y 可以看成一个参变量，所以称它为含参变量 y 的积分. 同理可定义含参变量 x 的积分 $J(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$. 它们统称为含**参变量常义积分**，一般就称为**含参变量积分**.

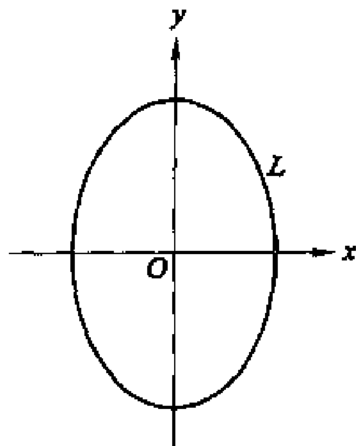


图 15.1.1

实际应用中经常遇到含参变量积分. 如在计算椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(b>a>0)$ 的周长时，利用椭圆的参数方程 $x=a\cos t$，$y=b\sin t$，记 L 为椭圆在第一象限的部分，则所求周长的四分之一为

$$\int_L \mathrm{d}s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2(1-\sin^2 t)}\,\mathrm{d}t$$

$$=b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{b^2-a^2}{b^2}\sin^2 t}\,\mathrm{d}t=b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$

这里 $k=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$ 就是含参变量的积分,称为**第二类完全椭圆积分**.但遗憾的是,这里的被积函数$\sqrt{1-k^2\sin^2 t}$ 的原函数不能用初等函数表示.因此计算这个积分,通常只能采用数值计算的方法.

含参变量常义积分的分析性质

既然含参变量积分是参变量的函数,就应该研究它的分析性质,诸如连续性、可微性和可积性.

定理 15.1.1(连续性定理)　设 $f(x,y)$ 在闭矩形 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上连续,则函数

$$I(y)=\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$$

在$[c,d]$上连续.

证　由条件,$f(x,y)$ 在 D 上一致连续.因此,对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$, 使得对于任意两点 (x_1,y_1), $(x_2,y_2)\in D$, 当 $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}<\delta$ 时,成立

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon.$$

因此,对任意定点 $y_0\in[c,d]$,只要 $|y-y_0|<\delta$ 时,就有

$$|I(y)-I(y_0)|=\left|\int_a^b[f(x,y)-f(x,y_0)]\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant\int_a^b|f(x,y)-f(x,y_0)|\mathrm{d}x<(b-a)\varepsilon.$$

这说明 $I(y)$ 在$[c,d]$上连续.

证毕

由这个结论可知

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^b\lim_{y\to y_0}f(x,y)\mathrm{d}x,\quad y_0\in[c,d].$$

即极限运算与积分号可以交换.

例 15.1.1　求$\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2\cos\alpha x}$.

解　由于函数

$$f(x,\alpha)=\frac{1}{1+x^2\cos\alpha x}$$

在闭矩形 $0\leqslant x\leqslant 1$, $-\frac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{2}$ 上连续,因此由定理 15.1.1 得

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2\cos\alpha x}=\int_0^1\lim_{\alpha\to 0}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2\cos\alpha x}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$$

定理 15.1.2(积分次序交换定理) 设 $f(x,y)$ 在闭矩形 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续，则

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy.$$

证 由于 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续，因此由二重积分的计算公式可知

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx = \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy.$$

证毕

例 15.1.2 计算 $I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}dx$，其中 $b > a > 0$.

解 由于

$$\int_a^b x^y dy = \frac{x^b - x^a}{\ln x},$$

因此

$$I = \int_0^1 dx \int_a^b x^y dy.$$

而 $f(x,y) = x^y$ 在闭矩形 $0 \leqslant x \leqslant 1, a \leqslant y \leqslant b$ 上连续，所以积分次序可以交换，即

$$I = \int_0^1 dx \int_a^b x^y dy = \int_a^b dy \int_0^1 x^y dx = \int_a^b \frac{1}{1+y}dy = \ln\frac{1+b}{1+a}.$$

定理 15.1.3(积分号下求导定理) 设 $f(x,y), f_y(x,y)$ 都在闭矩形 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续，则 $I(y)$ 在 $[c,d]$ 上可微，并且在 $[c,d]$ 上成立

$$\frac{dI(y)}{dy} = \int_a^b f_y(x,y)dx.$$

证 对任意给定的 $y \in [c,d]$，当 $y+\Delta y \in [c,d]$ 时，利用微分中值定理得

$$\begin{aligned}\frac{I(y+\Delta y) - I(y)}{\Delta y} &= \int_a^b \frac{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}dx \\ &= \int_a^b f_y(x,y+\theta\Delta y)dx \quad (0 < \theta < 1).\end{aligned}$$

由定理 15.1.1，即有

$$\begin{aligned}\frac{dI(y)}{dy} &= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{I(y+\Delta y) - I(y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\int_a^b f_y(x,y+\theta\Delta y)dx \\ &= \int_a^b \lim_{\Delta y\to 0} f_y(x,y+\theta\Delta y)dx = \int_a^b f_y(x,y)dx.\end{aligned}$$

证毕

这个定理的结论也可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

这说明求导运算与积分号可以交换.

定理 15.1.4 设 $f(x,y),f_y(x,y)$ 都是闭矩形$[a,b]\times[c,d]$上的连续函数,又设 $a(y),b(y)$ 是在$[c,d]$上的可微函数,满足 $a\leqslant a(y)\leqslant b,c\leqslant b(y)\leqslant d$,则函数

$$F(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

在$[c,d]$上可微,并且在$[c,d]$上成立

$$F'(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f_y(x,y)\mathrm{d}x + f[b(y),y]b'(y) - f[a(y),y]a'(y).$$

证 将 $F(y)$ 写成复合函数形式

$$F(y) = \int_u^v f(x,y)\mathrm{d}x = I(y,u,v),\quad u = a(y),\quad v = b(y).$$

由定理 15.1.3,知

$$\frac{\partial I}{\partial y}(u,v,y) = \int_u^v f_y(x,y)\mathrm{d}x.$$

容易验证$\frac{\partial I}{\partial y}(u,v,y)$是连续函数.由积分上限函数的求导法则得

$$\frac{\partial I}{\partial u} = -f(u,y),\quad \frac{\partial I}{\partial v} = f(v,y),$$

它们都是连续的.所以函数 $I(y,u,v)$ 可微,于是按复合函数的链式规则得到

$$\begin{aligned}F'(y) &= \frac{\partial I}{\partial y} + \frac{\partial I}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} + \frac{\partial I}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\\ &= \int_{a(y)}^{b(y)} f_y(x,y)\mathrm{d}x + f[b(y),y]b'(y) - f[a(y),y]a'(y).\end{aligned}$$

证毕

注意这时我们顺便得到:函数 $F(y)$ 在$[c,d]$上连续.

例 15.1.3 设

$$F(y) = \int_0^y \frac{\ln(1+xy)}{x}\mathrm{d}x,\quad y>0.$$

求 $F'(y)$.

解

$$\begin{aligned}F'(y) &= \frac{\ln(1+y^2)}{y} + \int_0^y \frac{\mathrm{d}x}{1+xy}\\ &= \frac{\ln(1+y^2)}{y} + \left[\frac{\ln(1+xy)}{y}\right]_0^y = \frac{2}{y}\ln(1+y^2).\end{aligned}$$

例 15.1.4 计算

$$I(\theta)=\int_0^{\pi}\ln(1+\theta\cos x)\mathrm{d}x\ (|\theta|<1).$$

解 对于任意满足 $|\theta|<1$ 的 θ,必有正数 a 使得 $|\theta|\leqslant a<1$. 记 $f(x,\theta)=\ln(1+\theta\cos x)$,易知 $f(x,\theta)$ 与

$$f_\theta(x,\theta)=\frac{\cos x}{1+\theta\cos x}$$

都在闭矩形 $0\leqslant x\leqslant\pi$, $-a\leqslant\theta\leqslant a$ 上连续. 因此由定理 15.1.3 知

$$\begin{aligned}I'(\theta)&=\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{1+\theta\cos x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\theta}\int_0^{\pi}\left(1-\frac{1}{1+\theta\cos x}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{\theta}-\frac{1}{\theta}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+\theta\cos x}.\end{aligned}$$

对于最后一个积分,作万能代换 $t=\tan\dfrac{x}{2}$ 就得

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+\theta\cos x}&=\int_0^{+\infty}\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2+\theta(1-t^2)}=\frac{2}{1+\theta}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+\dfrac{1-\theta}{1+\theta}t^2}\\&=\frac{2}{\sqrt{1-\theta^2}}\left[\arctan\sqrt{\frac{1-\theta}{1+\theta}}t\right]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{1-\theta^2}}.\end{aligned}$$

于是

$$I'(\theta)=\frac{\pi}{\theta}-\frac{\pi}{\theta\sqrt{1-\theta^2}}.$$

再对 θ 积分得

$$I(\theta)=\pi\ln(1-\theta^2)+C.$$

由 $I(\theta)$ 的定义知 $I(0)=0$,代入上式得 $C=-\pi\ln2$,于是

$$I(\theta)=\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-\theta^2}}{2}.$$

本例对参变量先求了一次导数,然后又做了一次积分,但我们并非回到了原来的出发点,而是解决了问题. 这与例 15.1.2 中展示的通过交换积分次序来求积分的处理过程都是重要的方法.

习 题

1. 求下列极限:

(1) $\displaystyle\lim_{\alpha\to0}\int_0^{1+\alpha}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+\alpha^2}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{1+\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n}$.

2. 利用交换积分顺序的方法计算下列积分：

(1) $\int_0^1 \sin\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)\dfrac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x \quad (b>a>0)$；

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\dfrac{1+a\sin x}{1-a\sin x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin x} \quad (1>a>0)$.

3. 求下列函数的导数：

(1) $I(y)=\int_y^{y^2}\mathrm{e}^{-x^2y}\mathrm{d}x$；

(2) $I(y)=\int_y^{y^2}\dfrac{\cos xy}{x}\mathrm{d}x$；

(3) $F(t)=\int_0^{t^2}\mathrm{d}x\int_{x-t}^{x+t}\sin(x^2+y^2-t^2)\mathrm{d}y$.

4. 设 $I(y)=\int_0^y (x+y)f(x)\mathrm{d}x$，其中 f 为可微函数，求 $I''(y)$.

5. 设 $F(y)=\int_a^b f(x)\,|\,y-x\,|\,\mathrm{d}x \ (a<b)$，其中 $f(x)$ 为可微函数，求 $F''(y)$.

6. 设函数 f 具有二阶导数，F 是可微的，证明函数

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x-at)+f(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}F(y)\mathrm{d}y$$

满足弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

以及初始条件 $u(x,0)=f(x)$，　$\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=F(x)$.

7. 利用积分号下求导法计算下列积分：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2-\sin^2 x)\mathrm{d}x \quad (a>1)$；

(2) $\int_0^{\pi}\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\mathrm{d}x \quad (|\alpha|<1)$；

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)\mathrm{d}x$.

8. 证明：第二类椭圆积分

$$E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t \quad (0<k<1)$$

满足方程

$$E''(k)+\frac{1}{k}E'(k)+\frac{E(k)}{1-k^2}=0.$$

9. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)>0$. 研究函数

$$I(y)=\int_0^1\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x$$

的连续性.

§2　含参变量的反常积分

含参变量反常积分的一致收敛

含参变量的反常积分也有两种：**无穷区间上的含参变量反常积分**和**无界函数的含参变量反常积分**.

先考虑前一种情况. 设 $f(x,y)$ 定义在 $[a,+\infty)\times[c,d]$ 上，若对某个 $y_0\in[c,d]$，反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x,y_0)\mathrm{d}x$ 收敛，则称含参变量反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$ 在 y_0 处收敛，并称 y_0 为它的**收敛点**. 记 E 为所有收敛点组成的点集，则 E 就是函数

$$I(y)=\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$$

的定义域，也称为 $\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$ 的**收敛域**.

同样，我们要讨论函数 $I(y)$ 的连续性、可微性和可积性. 为此，需要引进一致收敛的概念（读者可以将这个概念与函数项级数的一致收敛概念相比较）.

定义 15.2.1　设二元函数 $f(x,y)$ 定义在 $[a,+\infty)\times[c,d]$ 上，且对任意的 $y\in(c,d)$，反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$ 存在. 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在与 y 无关的正数 A_0，使得当 $A>A_0$ 时，对于所有的 $y\in[c,d]$，成立

$$\left|\int_A^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon,$$

则称 $\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$ 关于 y 在 $[c,d]$ 上**一致收敛**.

同样可以对 $x\in(-\infty,a]$ 或 $x\in(-\infty,+\infty)$ 定义一致收敛概念.

例 15.2.1　含参变量 α 的反常积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{d}x$ 在 $\alpha_0\leqslant\alpha<+\infty$ 上一致收敛（$\alpha_0>0$），但在 $0<\alpha<+\infty$ 上不一致收敛.

解 先说明在 $\alpha_0 \leqslant \alpha < +\infty$ 上一致收敛. 由于当 $\alpha \geqslant \alpha_0$ 时,

$$0 \leqslant \int_A^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha A}^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha A} \leqslant \frac{1}{\alpha_0} e^{-\alpha_0 A},$$

而

$$\lim_{A \to +\infty} \frac{1}{\alpha_0} e^{-\alpha_0 A} = 0,$$

所以对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在正数 A_0, 使得当 $A > A_0$ 时, $\left| e^{-\alpha_0 A} \frac{1}{\alpha_0} \right| < \varepsilon$. 这时成立

$$\left| \int_A^{+\infty} e^{-\alpha x} dx \right| \leqslant \left| e^{-\alpha_0 A} \frac{1}{\alpha_0} \right| < \varepsilon,$$

这说明 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx$ 在 $\alpha_0 \leqslant \alpha < +\infty$ 上一致收敛.

再说明在 $0 < \alpha < +\infty$ 上不一致收敛. 对于任意取定的正数 A, 由于

$$\int_A^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha A},$$

而 $\lim\limits_{\alpha \to 0+} \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha A} = +\infty$, 所以必存在某个 $\alpha(A) \in (0, +\infty)$, 使得 $\int_A^{+\infty} e^{-\alpha(A)x} dx > 1$. 因此 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx$ 在 $0 < \alpha < +\infty$ 上不一致收敛.

对于无界函数的含参变量反常积分, 同样也有一致收敛的概念:

定义 15.2.1′ *设二元函数 $f(x,y)$ 定义在 $[a,b) \times [c,d]$ 上, 且对任意的 $y \in [c,d]$, 以 b 为奇点的反常积分 $\int_a^b f(x,y) dx$ 存在. 如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在与 y 无关的 $\delta > 0$, 使得当时 $\eta < \delta$, 对所有 $y \in [c,d]$ 成立*

$$\left| \int_{b-\eta}^{b} f(x,y) dx \right| < \varepsilon,$$

则称 $\int_a^b f(x,y) dx$ 关于 y 在 $[c,d]$ 上一致收敛.

一致收敛的判别法

下面仅以 $\int_a^{+\infty} f(x,y) dx$ 为例讨论一致收敛的判别方法. 对于无界函数的情况, 结果是类似的. 以下总假定反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y) dx$ 对于每个 $y \in [c,d]$ 收敛.

对于一致收敛, 同样也有 Cauchy 收敛原理:

定理 15.2.1(Cauchy 收敛原理) *含参变量反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y) dx$ 关*

于y在$[c,d]$上一致收敛的充要条件为:对于任意给定的$\varepsilon>0$,存在与y无关的正数A_0,使得对于任意的$A',A>A_0$,

$$\left|\int_A^{A'} f(x,y)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon,\quad y\in[c,d]$$

成立.

证明略.

由Cauchy收敛原理立即得知,若存在$\varepsilon_0>0$,使得对于任意大的A_0,总存在$A',A>A_0$及$y\in[c,d]$,满足

$$\left|\int_A^{A'} f(x,y)\mathrm{d}x\right|\geqslant\varepsilon_0,$$

那么$\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$关于$y$在$[c,d]$上非一致收敛.

定理15.2.2(Weierstrass判别法) 如果存在函数$F(x)$使得

1) $|f(x,y)|\leqslant F(x),\quad a\leqslant x<+\infty,\quad c\leqslant y\leqslant d$,

2) 反常积分$\int_a^{+\infty} F(x)\mathrm{d}x$收敛,

那么含参变量的反常积分$\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$关于$y$在$[c,d]$上一致收敛.

证 因为$\int_a^{+\infty} F(x)\mathrm{d}x$收敛,由反常积分的Cauchy收敛原理知,对于任意的$\varepsilon>0$,存在正数A_0,使得对于任意的$A',A>A_0$,

$$\int_A^{A'} F(x)\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

因此当$A',A>A_0$时,对于任意$y\in[c,d]$,不等式

$$\left|\int_A^{A'} f(x,y)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_A^{A'} F(x)\mathrm{d}x<\varepsilon$$

成立,于是由定理15.2.1知$\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$关于$y\in[c,d]$一致收敛.

证毕

例15.2.2 证明$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\alpha x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$关于$\alpha\in[0,+\infty)$一致收敛.

解 由于

$$0<\frac{\mathrm{e}^{-\alpha x}}{1+x^2}\leqslant\frac{1}{1+x^2},\quad 0\leqslant x<+\infty,\ 0\leqslant\alpha<+\infty,$$

而$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$收敛,由Weierstrass判别法知,$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\alpha x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$关于$\alpha\in[0,+\infty)$一致收敛.

定理15.2.3 设函数$f(x,y)$和$g(x,y)$满足以下两组条件之一,则含

参变量的反常积分

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x$$

关于 $y\in[c,d]$ 一致收敛.

1.(Abel 判别法)

(1) $\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ 关于 $y\in[c,d]$ 一致收敛,

(2) $g(x,y)$ 关于 x 单调,即对每个固定的 $y\in[c,d]$,g 关于 x 是单调函数,

(3) $g(x,y)$ 一致有界,即存在正数 L,使得

$$|g(x,y)|\leqslant L,\quad a\leqslant x<+\infty,\quad c\leqslant y\leqslant d.$$

2.(Dirichlet 判别法)

(1) $\int_a^A f(x,y)\mathrm{d}x$ 一致有界,即存在正数 L,使得

$$\left|\int_a^A f(x,y)\mathrm{d}x\right|\leqslant L,\quad a\leqslant A<+\infty,\quad y\in[c,d],$$

(2) $g(x,y)$ 关于 x 单调,即对每个固定的 $y\in[c,d]$,g 关于 x 是单调函数,

(3) 当 $x\to+\infty$ 时 $g(x,y)$ 关于 $y\in[c,d]$ 一致趋于零.即对于任意 $\varepsilon>0$,存在与 y 无关的正数 A_0,使得当 $x\geqslant A_0$ 时,对于任意 $y\in[c,d]$ 成立

$$|g(x,y)|<\varepsilon.$$

证 我们只证明 Abel 判别法,Dirichlet 判别法的证明类似.

由于 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ 关于 $y\in[c,d]$ 一致收敛,由 Cauchy 收敛原理知,对于任意的 $\varepsilon>0$,存在与 y 无关的正数 A_0,使得当 $A',A>A_0$ 时,

$$\left|\int_A^{A'} f(x,y)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

那么当 $A',A>A_0$ 时,对于任意 $y\in[c,d]$,由积分第二中值定理得

$$\begin{aligned}&\left|\int_A^{A'} f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\right|\\ =&\left|g(A,y)\int_A^{\xi} f(x,y)\mathrm{d}x+g(A',y)\int_{\xi}^{A'} f(x,y)\mathrm{d}x\right|\\ \leqslant&|g(A,y)|\left|\int_A^{\xi} f(x,y)\mathrm{d}x\right|+|g(A',y)|\left|\int_{\xi}^{A'} f(x,y)\mathrm{d}x\right|<2L\varepsilon,\end{aligned}$$

(其中 ξ 在 A 与 A' 之间).于是由定理 15.2.1 知 $\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x$ 关于 $y\in[c,d]$ 一致收敛.

例 15.2.3 证明 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}$ 关于 $\alpha \in [0,+\infty)$ 一致收敛.

解 因为 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 收敛,它当然关于 α 一致收敛. 显然 $e^{-\alpha x}$ 关于 x 单调,且

$$0 \leqslant e^{-\alpha x} \leqslant 1,\quad 0 \leqslant \alpha < +\infty,\quad 0 \leqslant x < +\infty,$$

即 $e^{-\alpha x}$ 一致有界. 由 Abel 判别法, $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx$ 关于 $\alpha \in [0,+\infty)$ 一致收敛.

例 15.2.4 证明 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{x}dx$ 关于 y 在 $[a,b](0<a<b<+\infty)$ 上一致收敛,但在 $(0,+\infty)$ 上非一致收敛.

解 先证明 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{x}dx$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛. 由于

$$\left|\int_0^A \sin xy\,dx\right| = \left|\frac{1-\cos(Ay)}{y}\right| \leqslant \frac{2}{y} \leqslant \frac{2}{a},\quad A \geqslant 0, y \in [a,b],$$

因而一致有界. 而 $\frac{1}{x}$ 是 x 的单调减少函数且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, 由于 $\frac{1}{x}$ 与 y 无关,因此这个极限关于 y 是一致的. 于是由 Dirichlet 判别法知 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{x}dx$ 在 $y \in [a,b]$ 上一致收敛.

再证明 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{x}dx$ 在 $(0,+\infty)$ 上非一致收敛. 对于正整数 n, 取 $y=\frac{1}{n}$, 这时

$$\left|\int_{n\pi}^{\frac{3}{2}n\pi}\frac{\sin xy}{x}dx\right| = \left|\int_{n\pi}^{\frac{3}{2}n\pi}\frac{\sin\frac{x}{n}}{x}dx\right| > \frac{1}{\frac{3}{2}n\pi}\left|\int_{n\pi}^{\frac{3}{2}n\pi}\sin\frac{x}{n}dx\right| = \frac{2}{3\pi}.$$

只要取 $\varepsilon_0 = \frac{2}{3\pi}$, 则对于任意 A_0, 总存在正整数 n 满足 $n\pi > A_0$, 取 $y=\frac{1}{n}$, 这时成立 $\left|\int_{n\pi}^{\frac{3}{2}n\pi}\frac{\sin xy}{x}dx\right| > \frac{2}{3\pi} = \varepsilon_0$. 由 Cauchy 收敛原理知 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{x}dx$ 在 $(0,+\infty)$ 上非一致收敛.

例 15.2.5 证明 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x^2}{x^p}dx$ 关于 p 在 $(-1,1)$ 上内闭一致收敛.

证 要证明的是:对于任意给定的 $[p_0,p_1]\subset(-1,1)$, $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x^2}{x^p}dx$ 在 $[p_0,p_1]$ 上一致收敛.

注意到被积函数 $\frac{\cos x^2}{x^p}$ 在 $x=0$ 附近无界,我们将 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x^2}{x^p}dx$ 写为

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x^2}{x^p}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\cos x^2}{x^p}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\cos x^2}{x^p}\mathrm{d}x=I_1+I_2.$$

当 $I_1=\int_0^1\frac{\cos x^2}{x^p}\mathrm{d}x$ 与 $I_2=\int_1^{+\infty}\frac{\cos x^2}{x^p}\mathrm{d}x$ 都一致收敛时，$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x^2}{x^p}\mathrm{d}x$ 才一致收敛.

先看 $I_1=\int_0^1\frac{\cos x^2}{x^p}\mathrm{d}x$，这是一个含参变量的无界函数的反常积分. 注意到

$$\left|\frac{\cos x^2}{x^p}\right|\leqslant\frac{1}{x^p}\leqslant\frac{1}{x^{p_1}},\quad 0<x\leqslant 1,\quad p_0\leqslant p\leqslant p_1,$$

由于 $p_1<1$，因此 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^{p_1}}$ 收敛. 于是由 Weierstrass 判别法，知 $I_1=\int_0^1\frac{\cos x^2}{x^p}\mathrm{d}x$ 在$[p_0,p_1]$上一致收敛.

再看 $I_2=\int_1^{+\infty}\frac{\cos x^2}{x^p}\mathrm{d}x$. 作变换 $t=x^2$ 得

$$\int_1^{+\infty}\frac{\cos x^2}{x^p}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t^{\frac{1}{2}(p+1)}}\mathrm{d}t.$$

由于

$$\left|\int_1^A\cos t\,\mathrm{d}t\right|=|\sin A-\sin 1|\leqslant 2,\quad 1\leqslant A<+\infty,$$

即一致有界. 而函数 $\frac{1}{t^{\frac{1}{2}(p+1)}}$ 关于 t 单调减少，且对于 $p\in[p_0,p_1]$ 成立

$$\frac{1}{t^{\frac{1}{2}(p+1)}}\leqslant\frac{1}{t^{\frac{1}{2}(p_0+1)}}\quad(1\leqslant t<+\infty,\ p_0\leqslant p\leqslant p_1),$$

由于 $p_0>-1$，当 $t\to+\infty$ 时，$\frac{1}{t^{\frac{1}{2}(p+1)}}$ 关于 $p\in[p_0,p_1]$ 一致趋于零. 于是由 Dirichlet 判别法知，$\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t^{\frac{1}{2}(p+1)}}\mathrm{d}t$ 在$[p_0,p_1]$上一致收敛，所以 $I_2=\int_1^{+\infty}\frac{\cos x^2}{x^p}\mathrm{d}x$ 在$[p_0,p_1]$上一致收敛.

综上所述，$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x^2}{x^p}\mathrm{d}x$ 在$(-1,1)$上内闭一致收敛.

定理 15.2.4（Dini 定理） 设 $f(x,y)$ 在$[a,+\infty)\times[c,d]$上连续且保持定号，如果含参变量积分

$$I(y)=\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$$

在$[c,d]$上连续，那么积分 $\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$ 关于 $y\in[c,d]$ 一致收敛.

证　用反证法.不妨设 $f(x,y)\geqslant 0$.若 $\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$ 关于 $y\in[c,d]$ 不一致收敛,那么存在某个正数 ε_0,对于任何正整数 $n>a$,总存在 $y_n\in[c,d]$,使得

$$\int_n^{+\infty}f(x,y_n)\mathrm{d}x\geqslant\varepsilon_0.$$

由于有界数列 $\{y_n\}$ 必有收敛子列,不妨就设 $\{y_n\}$ 收敛,并记 $y_0=\lim\limits_{n\to\infty}y_n\in[c,d]$.

由于反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x,y_0)\mathrm{d}x$ 收敛,所以必存在 $A(>a)$ 使得

$$\int_A^{+\infty}f(x,y_0)\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

并且由 $f(x,y)\geqslant 0$ 知当 $n>A$ 时,

$$\int_A^{+\infty}f(x,y_n)\mathrm{d}x\geqslant\int_n^{+\infty}f(x,y_n)\mathrm{d}x\geqslant\varepsilon_0.$$

由于

$$\int_A^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x-\int_a^{A}f(x,y)\mathrm{d}x,$$

及 $\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$ 的连续性,再由常义含参变量积分的连续性定理知 $\int_a^{A}f(x,y)\mathrm{d}x$ 也连续,于是 $\int_A^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$ 连续.因此由 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y_0$ 知

$$\lim_{n\to\infty}\int_A^{+\infty}f(x,y_n)\mathrm{d}x=\int_A^{+\infty}(x,y_0)\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon_0}{2},$$

这与 $\int_A^{+\infty}f(x,y_n)\mathrm{d}x\geqslant\varepsilon_0(n>A)$ 矛盾.因此 $\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$ 关于 $y\in[c,d]$ 一致收敛.

证毕

一致收敛积分的分析性质

现在讨论含参变量反常积分的分析性质,即连续性、可微性和可积性.

设反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$ 对于每个 $y\in[c,d]$ 收敛,这样就定义了函数

$$I(y)=\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x,\quad y\in[c,d].$$

任取一列严格单调增加的数列 $\{a_n\}$,它满足 $a_0=a$ 以及 $a_n\to+\infty$.置

$$u_n(y)=\int_{a_{n-1}}^{a_n}f(x,y)\mathrm{d}x,\quad n=1,2,\cdots,$$

那么

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x,y)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y).$$

利用 Cauchy 收敛原理容易证明如下的引理：

引理 15.2.1　若含参变量反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ 关于 $y \in [c,d]$ 一致收敛，则函数项级数关于 $y \in [c,d]$ 一致收敛.

在以下的定理的证明中我们仍采用上面的记号.

定理 15.2.4(连续性定理)　设 $f(x,y)$ 在 $[a,+\infty)\times[c,d]$ 上连续，$\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ 关于 $y \in [c,d]$ 一致收敛，则函数

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$$

在 $[c,d]$ 上连续，即

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty}\lim_{y\to y_0} f(x,y)\mathrm{d}x,\ y_0 \in [c,d],$$

就是说，极限运算与积分运算可以交换.

证　因为 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ 关于 $y \in [c,d]$ 一致收敛，那么由引理 15.2.1 知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(y)$ 关于 $y \in [c,d]$ 一致收敛. 由于 $f(x,y)$ 在 $[a_{n-1},a_n]\times[c,d]$ 上连续，那么由常义含参变量积分的连续性定理知

$$u_n(y) = \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x,y)\mathrm{d}x$$

连续($n = 1,2,\cdots$). 根据一致收敛级数的性质就知道，和函数

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x = \sum_{n-1}^{\infty} u_n(y)$$

连续.

证毕

注意，Dini 定理并不是这个定理的逆定理. Dini 定理只说明了在 $f(x,y)$ 保持定号的情况下，由 $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ 的连续性可以推出 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ 的一致收敛. 读者可以举例说明：去掉"保持定号"条件可能导致 Dini 定理的结论不成立.

定理 15.2.5(积分次序交换定理)　设 $f(x,y)$ 在 $[a,+\infty)\times[c,d]$ 上连续，$\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ 关于 $y \in [c,d]$ 一致收敛，则

$$\int_c^d \mathrm{d}y \int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} \mathrm{d}x \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y,$$

即积分次序可交换.

证 由假设知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(y)$ 关于 $y \in [c,d]$ 一致收敛. 根据一致收敛级数的和号与积分号可以交换的结论知

$$\begin{aligned}
&\int_c^d \mathrm{d}y \int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x \\
&= \int_c^d \Big(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(y)\Big)\mathrm{d}y = \sum_{n=1}^{\infty}\int_c^d u_n(y)\mathrm{d}y \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\int_c^d\left(\int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \sum_{n=1}^{\infty}\int_c^d \mathrm{d}y \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x,y)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{a_{n-1}}^{a_n} \mathrm{d}x \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

其中第二行到第三行的推导是利用了常义含参变量积分的积分次序可交换定理.

证毕

当$[c,d]$也改为无穷区间$[c,+\infty)$时,本定理的条件就不足以保证积分次序可交换,但有下面的结论:

定理 15.2.5′ 设$f(x,y)$在$[a,+\infty)\times[c,+\infty]$上连续,且$\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$关于$y \in [c,C]$一致收敛$(c < C < +\infty)$, $\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 关于$x \in [a,A]$一致收敛$(a < A < +\infty)$. 进一步假设$\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x \int_c^{+\infty} |f(x,y)|\mathrm{d}y$ 和 $\int_c^{+\infty}\mathrm{d}y \int_a^{+\infty} |f(x,y)|\mathrm{d}x$ 中有一个存在,那么

$$\int_c^{+\infty} \mathrm{d}y \int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} \mathrm{d}x \int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

这个定理的证明较为复杂,这里略去.

定理 15.2.6(积分号下求导定理) 设$f(x,y)$, $f_y(x,y)$都在$[a,+\infty)\times[c,d]$上连续,且$\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ 关于 $y \in [c,d]$ 收敛. 进一步假设$\int_a^{+\infty} f_y(x,y)\mathrm{d}x$关于$y \in [c,d]$一致收敛. 则$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$在$[c,d]$上可微,并且在$[c,d]$上成立

$$I'(y) = \int_a^{+\infty} f_y(x,y)\mathrm{d}x,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\mathrm{d}x,$$

就是说,求导运算与积分运算可交换.

证 记 $\phi(y)=\int_a^{+\infty}f_y(x,y)\mathrm{d}x$,由 $\int_a^{+\infty}f_y(x,y)\mathrm{d}x$ 关于 $y\in[c,d]$ 一致收敛的假设知 $\phi(y)$ 在 $[c,d]$ 上连续. 于是对于 $y\in[c,d]$,由定理 15.2.5 得

$$\begin{aligned}\int_c^y\phi(y)\mathrm{d}y&=\int_c^y\mathrm{d}y\int_a^{+\infty}f_y(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_c^yf_y(x,y)\mathrm{d}y\\&=\int_a^{+\infty}[f(x,y)-f(x,c)]\mathrm{d}y=\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y-\int_a^{+\infty}f(x,c)\mathrm{d}y\\&=I(y)-I(c).\end{aligned}$$

由于 $\phi(y)$ 在 $[c,d]$ 上连续,所以函数 $\int_c^y\phi(y)\mathrm{d}y$ 可微,从而 $I(y)$ 可微. 两边求导就得

$$I'(y)=\phi(y)=\int_a^{+\infty}f_y(x,y)\mathrm{d}x.$$

证毕

例 15.2.6 确定函数 $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x^3)}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 的连续范围.

解 注意到 $x=0$ 可能为奇点,将积分写为

$$I(\alpha)=\int_0^1\frac{\ln(1+x^3)}{x^\alpha}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x^3)}{x^\alpha}\mathrm{d}x=I_1(\alpha)+I_2(\alpha).$$

因为当 $x\to0+$ 时 $\frac{\ln(1+x^3)}{x^\alpha}\sim\frac{1}{x^{\alpha-3}}$,所以只有当 $\alpha-3<1$ 即 $\alpha<4$ 时 $I_1(\alpha)$ 才收敛;而显然只有当 $\alpha>1$ 时 $I_2(\alpha)$ 才收敛. 所以 $I(\alpha)$ 的定义域为 $(1,4)$.

我们现在说明 $I(\alpha)$ 在其定义域 $(1,4)$ 上连续. 为此只要说明在任意闭区间 $[a,b]\subset(1,4)$ 上,$I(\alpha)$ 连续即可.

对任意闭区间 $[a,b]\subset(1,4)$,由于

$$\left|\frac{\ln(1+x^3)}{x^\alpha}\right|=\frac{\ln(1+x^3)}{x^\alpha}\leqslant\frac{\ln(1+x^3)}{x^b},\quad 0<x\leqslant1,a\leqslant\alpha\leqslant b<4,$$

且 $\int_0^1\frac{\ln(1+x^3)}{x^b}\mathrm{d}x$ 收敛,因此由 Weierstrass 判别法,$I_1(\alpha)=\int_0^1\frac{\ln(1+x^3)}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 关于 $\alpha\in[a,b]$ 一致收敛,因此由被积函数 $\frac{\ln(1+x^3)}{x^\alpha}$ 在 $(0,1]\times[a,b]$ 上的连续性知,$I_1(\alpha)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

由于

$$\left|\frac{\ln(1+x^3)}{x^\alpha}\right| = \frac{\ln(1+x^3)}{x^\alpha} \leqslant \frac{\ln(1+x^3)}{x^a},$$

$$1 \leqslant x < +\infty,\quad 1 < a \leqslant \alpha \leqslant b,$$

且 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x^3)}{x^a}\mathrm{d}x$ 收敛,所以由 Weierstrass 判别法,$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^3)}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 关于 $\alpha \in [a,b]$ 一致收敛,因此由被积函数$\frac{\ln(1+x^3)}{x^\alpha}$ 在$[1,+\infty)\times[a,b]$上的连续性知,$I_2(\alpha)$ 在$[a,b]$上连续.

综上所述,$I(\alpha) = I_1(\alpha) + I_2(\alpha)$ 在其定义域$(1,4)$上连续.

例 15.2.7 **计算 Dirichlet 积分**

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x.$$

解 考虑含参变量反常积分

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \quad (\alpha \geqslant 0).$$

(这里引进了收敛因子 $\mathrm{e}^{-\alpha x}$,这是改善被积函数收敛性质的一种常用方法).记

$$f(x,\alpha) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

显然 $f(x,\alpha)$ 与 $f_\alpha(x,\alpha) = -\mathrm{e}^{-\alpha x}\sin x$ 都在$[0,+\infty)\times[0,+\infty]$上连续.

由例15.2.3知道$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 关于$\alpha \geqslant 0$一致收敛,因此 $I(\alpha)$ 在$[0,+\infty)$上连续,从而

$$I = I(0) = \lim_{\alpha\to 0+} I(\alpha).$$

为了找出 $I(\alpha)$,我们利用积分号下求导的方法.考虑

$$\int_0^{+\infty} f_\alpha(x,\alpha)\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\sin x\mathrm{d}x,$$

对任意 $\alpha_0 > 0$,在$[\alpha_0,+\infty)$上,由于$|\mathrm{e}^{-\alpha x}\sin x| \leqslant \mathrm{e}^{-\alpha_0 x}$$(0 \leqslant x < +\infty,\ \alpha_0 \leqslant \alpha < +\infty)$,且 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha_0 x}\mathrm{d}x$ 收敛,由 Weierstrass 判别法知 $\int_0^{+\infty} f_\alpha(x,\alpha)\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\sin x\mathrm{d}x$ 在 $\alpha \in [\alpha_0,+\infty)$ 上一致收敛,因此由定理 15.2.6 知

$$I'(\alpha) = -\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\sin x\mathrm{d}x = \left[\frac{\mathrm{e}^{-\alpha x}(\alpha\sin x + \cos x)}{1+\alpha^2}\right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{1+\alpha^2}.$$

由 α_0 的任意性知,上式在$(0,+\infty)$上都成立,因此将上式积分得

$$I(\alpha) = -\arctan\alpha + C.$$

现在确定常数 C.由于在 $\alpha \in (0,+\infty)$ 上

$$|I(\alpha)| = \left|\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx\right| \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}dx = \frac{1}{\alpha},$$

因此 $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} I(\alpha) = 0$,所以 $C = \frac{\pi}{2}$,从而 $I(\alpha) = -\arctan\alpha + \frac{\pi}{2}$. 于是,

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = I(0) = \lim_{\alpha\to 0+} I(\alpha) = \lim_{\alpha\to 0+}\left(-\arctan\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

从这个结果可推出一个有趣的结论:

$$\mathrm{sgn}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin xt}{t}dt.$$

请读者自行完成证明.

例 15.2.8 计算 $I(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos 2xt\,dt$.

解 记 $f(x,t) = e^{-t^2}\cos 2xt$,则 $f_x(x,t) = -2te^{-t^2}\sin 2xt$. 这时有

$$|f_x(x,t)| = |-2te^{-t^2}\sin 2xt| \leqslant 2te^{-t^2},$$
$$-\infty < x < +\infty,\ 0 \leqslant t < +\infty,$$

而反常积 $\int_0^{+\infty} te^{-t^2}dt$ 分收敛,由 Weierstrass 判别法知

$$\int_0^{+\infty} f_x(x,t)dt = -2\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\sin 2xt\,dt$$

关于 $-\infty < x < +\infty$ 一致收敛. 应用积分号下求导定理,得

$$I'(x) = -2\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\sin 2xt\,dt = e^{-t^2}\sin 2xt\Big|_0^{+\infty} - 2x\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos 2xt\,dt$$
$$= -2xI(x).$$

将这个式子写成

$$\frac{I'(x)}{I(x)} = -2x,$$

再积分得 $I(x) = Ce^{-x^2}$. 由于 $I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$,因此 $C = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$,于是

$$I(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-x^2}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

例 15.2.9 计算

$$I = \int_0^{+\infty}\frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}dx, \quad b > a > 0.$$

解 利用积分次序交换的方法. 由于

$$\frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} = \int_a^b \sin xy\,dy,$$

所以

$$I=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_a^b\frac{\sin xy}{x}\mathrm{d}y.$$

由例15.2.4知含参变量反常积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{x}\mathrm{d}x$在$y\in[a,b]$上一致收敛，于是

$$I=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_a^b\frac{\sin xy}{x}\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{x}\mathrm{d}x$$
$$=\int_a^b\frac{\pi}{2}\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}(b-a).$$

习　　题

1. 证明下列含参变量反常积分在指定区间上一致收敛：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{x^2+y^2}\mathrm{d}x$,　$y\geqslant a\geqslant 0$;

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x+\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{d}x$,　$0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_0$;

(3) $\int_0^{+\infty}x\sin x^4\cos\alpha x\mathrm{d}x$, $a\leqslant\alpha\leqslant b$.

2. 说明下列含参变量反常积分在指定区间上非一致收敛：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{\alpha(1+x^2)}\mathrm{d}x$,　$0<\alpha<\infty$;

(2) $\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$,　$0<\alpha<2$.

3. 设 $f(t)$ 在 $t>0$ 上连续，反常积分 $\int_0^1 t^\lambda f(t)\mathrm{d}t$ 当$\lambda=a$与$\lambda=b$时都收敛，证明 $\int_0^{+\infty}t^\lambda f(t)\mathrm{d}t$ 关于$\lambda\in[a,b]$一致收敛.

4. 讨论下列含参变量反常积分的一致收敛性：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$，在 $y\geqslant y_0>0$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-\alpha)^2}\mathrm{d}x$，在(i)$a<\alpha<b$，(ii)$-\infty<\alpha<+\infty$;

(3) $\int_0^1 x^{p-1}\ln^2 x\mathrm{d}x$，在(i)$p\geqslant p_0>0$，(ii)$p>0$;

(4) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\sin x\mathrm{d}x$，在(i)$\alpha\geqslant\alpha_0>0$，(ii)$\alpha>0$.

5. 证明函数 $F(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 在$\alpha>0$上连续.

6. 确定函数 $F(y)=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}}\mathrm{d}x$ 的连续范围.

7. 证明函数 $I(t)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+(x+t)^2}\mathrm{d}x$ 在$(-\infty,+\infty)$上可微.

8. 利用$\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}=\int_a^b\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y$,计算 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\mathrm{d}x\ (b>a>0)$.

9. 利用$\frac{\sin bx-\sin ax}{x}=\int_a^b\cos xy\mathrm{d}y$,计算 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-px}\frac{\sin bx-\sin ax}{x}$ $(p>0,b>a>0)$.

10. 利用 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{a+x^2}=\frac{\pi}{2\sqrt{a}}(a>0)$,计算 $I_n=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(a+x^2)^{n+1}}$($n$ 为正整数).

11. 计算 $g(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$.

12. 设 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$上连续,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$,证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

13. (1) 利用 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 推出 $L(c)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2-\frac{c^2}{y^2}}\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-2c}$;

(2) 利用积分号下求导的方法引出$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}c}=-2L$,以此推出与(1)同样的结果,并求出 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ay^2-\frac{b}{y^2}}\mathrm{d}y(a>0,b>0)$ 之值.

14. 利用 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t(a^2+x^2)}\mathrm{d}t=\frac{1}{a^2+x^2}$,计算 $J=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{a^2+x^2}\mathrm{d}x$.

§ 3　Euler 积分

Beta 函数

形如

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$$

的含参变量积分称为 **Beta 函数**,或**第一类 Euler 积分**.

先看它的定义域.将 Beta 函数写成

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^{1/2}x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x+\int_{1/2}^1x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x,$$

当 $x\to0$ 时 $x^{p-1}(1-x)^{q-1}\sim x^{p-1}$,所以只有当 $p>0$ 时右边第一个反常积分收敛.而当 $x\to1$ 时 $x^{p-1}(1-x)^{q-1}\sim(1-x)^{q-1}$,所以只有当 $q>0$时右边第二个反常积分收敛.这说明了 $\mathrm{B}(p,q)$ 在 $p>0,q>0$ 上收敛,即它的定

义域为 $p>0, q>0$.

Beta 函数的性质：

1. **连续性：** $\mathrm{B}(p,q)$ 在 $p>0, q>0$ 上连续.

证 对于任意固定的 $p_0>0, q_0>0$，当 $p\geqslant p_0, q\geqslant q_0$ 时，

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1}\leqslant x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1},\quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

而 $\int_0^1 x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}\mathrm{d}x$ 收敛，因此 $\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$ 在 $[p_0,+\infty)\times[q_0,+\infty)$ 上一致收敛，从而在 $[p_0,+\infty)\times[q_0,+\infty)$ 上连续.

由 $p_0>0, q_0>0$ 的任意性得知 $\mathrm{B}(p,q)$ 在 $p>0, q>0$ 上连续.

2. **对称性：** $\mathrm{B}(p,q)=\mathrm{B}(q,p)$.

证 作变换 $x=1-t$ 就得到

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x=\int_0^1(1-t)^{p-1}t^{q-1}\mathrm{d}t=\mathrm{B}(q,p).$$

3. **递推公式：** $\mathrm{B}(p,q)=\dfrac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1), p>0, q>1$.

证 利用分部积分法就得到

$$\begin{aligned}\mathrm{B}(p,q)&=\int_0^1\frac{1}{p}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x^p=\frac{1}{p}x^p(1-x)^{q-1}\Big|_0^1+\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-2}\mathrm{d}x\\&=\frac{q-1}{p}\left[\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-2}\mathrm{d}x-\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{q-1}{p}\mathrm{B}(p,q-1)-\frac{q-1}{p}\mathrm{B}(p,q).\end{aligned}$$

移项整理后就得递推公式.

由 $\mathrm{B}(p,q)$ 的对称性并结合递推公式，可得到，当 $p>1, q>1$ 时有

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{(p-1)(q-1)}{(p+q-1)(p+q-2)}\mathrm{B}(p-1,q-1).$$

4. **其它表示：**

(1) 作变量代换 $x=\cos^2\varphi$ 就得

$$\mathrm{B}(p,q)=2\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}\varphi\sin^{2q-1}\varphi\mathrm{d}\varphi.$$

据此可以得到

$$\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\pi.$$

(2) 作变量代换 $x=\dfrac{1}{1+t}$，得

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}=\int_0^1\frac{t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}\mathrm{d}t+\int_1^{+\infty}\frac{t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}\mathrm{d}t.$$

在最后一个积分中再作变量代换 $t=\frac{1}{u}$，即有 $\int_1^{+\infty}\frac{t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}}\mathrm{d}u$，于是

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1\frac{t^{p-1}+t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}\mathrm{d}t.$$

Gamma 函数

形如

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

的含参变量积分称为 **Gamma 函数，或第二类 Euler 积分**.

先看它的定义域. 将 Gamma 函数写成

$$\Gamma(s)=\int_0^1 x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x,$$

则由反常积分的收敛判别法知，当 $s\leqslant 0$ 时右边第一个反常积分发散，而当 $s>0$ 时两个反常积分都收敛，因此 Gamma 函数 $\Gamma(s)$ 的定义域为 $s>0$.

Gamma 函数的性质：

1. **连续性**：$\Gamma(s)$ 在 $s>0$ 上连续.

证　对于任意区间 $[a,b]\subset(0,+\infty)$，当 $s\in[a,b]$ 时成立

$$x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\leqslant x^{a-1}\mathrm{e}^{-x},\quad x\in(0,1]$$

而 $\int_0^1 x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 收敛，由 Weierstrass 判别法知，$\int_0^1 x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 关于 $s\in[a,b]$ 一致收敛. 又由于当 $s\in[a,b]$ 时，

$$x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\leqslant x^{b-1}\mathrm{e}^{-x},\quad x\in[1,+\infty)$$

而 $\int_1^{+\infty}x^{b-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 收敛，由 Weierstrass 判别法知，$\int_1^{+\infty}x^{x-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 关于 $s\in[a,b]$ 一致收敛. 于是 $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 关于 $s\in[a,b]$ 一致收敛.

因此 $\Gamma(s)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 由区间 $[a,b]$ 的任意性知 $\Gamma(s)$ 在 $s>0$ 上连续.

2. **递推公式**：$\Gamma(s)$ 满足

$$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s),s>0.$$

证　利用分部积分法，即得到

$$\Gamma(s+1)=\int_0^{+\infty}x^s\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}x^s\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}=-x^s\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty}+s\int_0^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=s\Gamma(s).$$

特别地，当 $s = n$ 为正整数时

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = n!\Gamma(1),$$

而 $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$，所以

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

因而 Gamma 函数可以说是阶乘的推广.

由于 $\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}$ 以及 $\Gamma(1) = 1$，所以

$$\lim_{s\to 0+}\Gamma(s) = +\infty.$$

3.其它表示：

(1) 在 $\Gamma(s)$ 的表示式中作变量代换 $x = t^2$，那么

$$\Gamma(s) = 2\int_0^{+\infty} t^{2s-1}e^{-t^2}dt.$$

据此可知

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}.$$

(2) 作变量代换 $x = \alpha t(\alpha > 0)$ 得

$$\Gamma(s) = \alpha^s\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-\alpha t}dt.$$

例 15.3.1 计算 $I = \int_0^{+\infty} x^{2n}e^{-x^2}dt$.

解 利用表示式 $\Gamma(s) = 2\int_0^{+\infty} t^{2s-1}e^{-t^2}dt$ 和递推公式，即有

$$I = \frac{1}{2}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{2n-1}{2}+1\right) = \frac{2n-1}{2^2}\Gamma\left(n-1+\frac{1}{2}\right),$$

反复递推即得到

$$I = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}.$$

Beta 函数与 Gamma 函数的关系

定理 15.3.1 Beta 函数与 Gamma 函数之间具有如下关系：

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad p > 0, q > 0.$$

证 由于

$$\Gamma(p) = 2\int_0^{+\infty} t^{2p-1}e^{-t^2}dt, \quad \Gamma(q) = 2\int_0^{+\infty} t^{2q-1}e^{-t^2}dt,$$

取 $\Omega = \{(s,t) \mid 0 \leqslant s < +\infty, 0 \leqslant t < +\infty\}$，利用化反常重积分为累次积分的定理，得

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\int_0^{+\infty} s^{2p-1}\mathrm{e}^{-s^2}\mathrm{d}s\int_0^{+\infty} t^{2q-1}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$$
$$= 4\iint\limits_{\Omega} s^{2p-1}\mathrm{e}^{-s^2}t^{2q-1}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

对右边的反常二重积分做极坐标变换 $s = r\cos\theta, t = r\sin\theta$,得

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\iint\limits_{\substack{0\leqslant r<+\infty\\0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}}} r^{2(p+q)-1}\mathrm{e}^{-r^2}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$
$$= \left(2\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\mathrm{d}\theta\right)\left(2\int_0^{+\infty} r^{2(p+q)-1}\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r\right)$$
$$= \mathrm{B}(p,q)\Gamma(p+q).$$

证毕

例 15.3.2 计算 $I = \int_0^1 \sin^6 x\cos^4 x\mathrm{d}x.$

解 利用 Beta 函数的性质及 Gamma 函数的递推公式得

$$I = \int_0^1 \sin^6 x\cos^4 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma(6)}$$
$$= \frac{1}{2\cdot 5!}\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right]\left[\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right] = \frac{3\pi}{512}.$$

例15.3.3 计算 $I = \int_0^1 x^8\sqrt{1-x^3}\mathrm{d}x.$

解 作变量代换 $x^3 = t$,得

$$I = \int_0^1 x^8\sqrt{1-x^3}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_0^1 t^2\sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\mathrm{B}\left(3,\frac{3}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\,\frac{\Gamma(3)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)} = \frac{2!\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{3\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{16}{315}.$$

关于 Gamma 函数,我们还有三个重要公式:Legendre 公式、余元公式和 Stirling 公式.

定理 15.3.2(Legendre 公式)

$$\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2s-1}}\Gamma(2s).$$

证 由于

$$\mathrm{B}(s,s) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{s-1}\mathrm{d}x = \int_0^1\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{s-1}\mathrm{d}x$$

$$= 2\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2\right]^{s-1}\mathrm{d}x,$$

作变量代换$\frac{1}{2} - x = \frac{1}{2}\sqrt{t}$,得

$$\mathrm{B}(s,s) = \frac{1}{2^{2s-1}}\int_0^1(1-t)^{s-1}t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2^{2s-1}}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},s\right).$$

利用定理 15.3.1 的 Beta 函数与 Gamma 函数的关系,上式即为

$$\frac{\Gamma(s)\Gamma(s)}{\Gamma(2s)} = \frac{1}{2^{2s-1}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(s)}{\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2^{2s-1}}\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(s)}{\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)}$$

整理后就得 Legendre 公式.

证毕

定理 15.3.3(余元公式)

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s},\quad 0 < s < 1.$$

在证明这个定理之前,我们先给出一个一般性的结果.

引理 15.3.1 设区间$[a,b)$上的连续可积函数序列$\{u_n(x)\}$点态收敛于$u(x)$,函数$\varphi(x)$在$[a,b)$上可积(即$\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x$收敛).进一步设

1) $0 \leqslant u_n(x) \leqslant \varphi(x),\quad a \leqslant x < b, n = 1,2,\cdots$

2) 对于任意给定的$\varepsilon > 0$,$\{u_n(x)\}$在$[a,b-\varepsilon]$上一致收敛.

那么

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b u(x)\mathrm{d}x$$

即极限运算与积分符号可交换.

证 由条件 1) 知

$$0 \leqslant u(x) \leqslant \varphi(x),\quad a \leqslant x < b,$$

所以$\int_a^b u(x)\mathrm{d}x$收敛.

根据极限的定义,要证明的是:$\forall\varepsilon > 0$,存在$N \in \mathbf{N}^+$,使得当$n > N$时

$$\left|\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x - \int_a^b u(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

由于$\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x$收敛,那么存在一个正数$\eta$,使得$\int_{b-\eta}^b\varphi(x)\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{3}$.因此

$$\int_{b-\eta}^b u_n(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{b-\eta}^b\varphi(x)\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{3}.$$

$$\int_{b-\eta}^b u(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{b-\eta}^b\varphi(x)\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{3}.$$

由于$\{u_n(x)\}$在$[a,b-\eta]$上一致收敛于$u(x)$,所以存在正整数N,使得当$n > N$时

$$\left|\int_a^{b-\eta}u_n(x)\mathrm{d}x-\int_a^{b-\eta}u(x)\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

这样一来,当 $n>N$ 时,

$$\begin{aligned}&\left|\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x-\int_a^b u(x)\mathrm{d}x\right|\\=&\left|\int_a^{b-\eta}u_n(x)\mathrm{d}x-\int_a^{b-\eta}u(x)\mathrm{d}x+\int_{b-\eta}^b u_n(x)\mathrm{d}x-\int_{b-\eta}^b u(x)\mathrm{d}x\right|\\\leqslant&\left|\int_a^{b-\eta}u_n(x)\mathrm{d}x-\int_a^{b-\eta}u(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{b-\eta}^b u_n(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{b-\eta}^b u(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.\end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b u(x)\mathrm{d}x$.

证毕

注:在这个引理中,把 $[a,b)$ 换为 $(a,b]$ 或 (a,b) 时,相应的结论也成立.

余元公式的证明:由定理 15.3.1 得

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\mathrm{B}(s,1-s)\Gamma(1)=\mathrm{B}(s,1-s),\ 0<s<1.$$

而

$$\mathrm{B}(s,1-s)=\mathrm{B}(1-s,s)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{s-1}}{1+t}\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{t^{s-1}}{1+t}\mathrm{d}t+\int_1^{+\infty}\frac{t^{s-1}}{1+t}\mathrm{d}t.$$

先看 $\int_0^1\frac{t^{s-1}}{1+t}\mathrm{d}t$. 利用 $\frac{1}{1+t}$ 的幂级数展开得

$$\frac{t^{s-1}}{1+t}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{s+n-1},$$

且右边的级数在任意区间 $0<\varepsilon\leqslant t\leqslant 1-\varepsilon'<1$ 上一致收敛. 又因为这个级数的部分和

$$0<u_n(t)=\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i t^{s+i-1}=\frac{t^{s-1}(1-(-t)^n)}{1+t}\leqslant t^{s-1},\quad 0<t<1,$$

而 $\int_0^1 t^{s-1}\mathrm{d}t$ 收敛,所以由引理 15.3.1 及其后的注得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 u_n(t)\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{t^{s-1}}{1+t}\mathrm{d}t.$$

但

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^1 u_n(t)\mathrm{d}t&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\int_0^1(-1)^i t^{s+i-1}\mathrm{d}t=\sum_{i=0}^{\infty}\int_0^1(-1)^i t^{s+i-1}\mathrm{d}t\\&=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{s+i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{s+n}.\end{aligned}$$

于是

$$\int_0^1\frac{t^{s-1}}{1+t}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{s+n}.$$

再看 $\int_1^{+\infty}\frac{t^{s-1}}{1+t}\mathrm{d}t$. 作变量代换 $t=\frac{1}{u}$ 得

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\frac{t^{s-1}}{1+t}\mathrm{d}t&=\int_0^1\frac{u^{-s}}{1+u}\mathrm{d}u=\int_0^1\frac{u^{(1-s)-1}}{1+u}\mathrm{d}u\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-s+n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{s-n}.\end{aligned}$$

在下面的引理 15.3.2 中,我们要证明

$$\frac{\pi}{\sin \pi s}=\frac{1}{s}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{s+n}+\frac{1}{s-n}\right).$$

由这个引理就得

$$\begin{aligned}\Gamma(s)\Gamma(1-s)&=\int_0^1\frac{t^{s-1}}{1+t}\mathrm{d}t+\int_1^{+\infty}\frac{t^{s-1}}{1+t}\mathrm{d}t\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{s+n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{s-n}\\&=\frac{1}{s}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{s+n}+\frac{1}{s-n}\right)=\frac{\pi}{\sin \pi s}.\end{aligned}$$

引理 15.3.2 对于 $x\in(0,1)$ 成立

$$\frac{\pi}{\sin \pi x}=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{x+n}+\frac{1}{x-n}\right).$$

证 我们知道

$$\sin x=x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right),$$

取绝对值,再取对数得

$$\ln|\sin x|=\ln|x|+\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left|1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right|,$$

在$(0,\pi)$上逐项求导得(请读者思考一下为什么可以逐项求导)

$$\begin{aligned}\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x&=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2-n^2\pi^2}\\&=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x-n\pi}+\frac{1}{x+n\pi}\right).\end{aligned}$$

于是在 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上,由 $\tan x=\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$得

$$\begin{aligned}\tan x&=\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x-n\pi}+\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x+n\pi}\right]\\&=-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{x-\frac{2n-1}{2}\pi}+\frac{1}{x+\frac{2n-1}{2}\pi}\right]\end{aligned}$$

再利用

$$\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{2}\left(\tan\frac{x}{2}+\cot\frac{x}{2}\right),$$

就得到在 $x\in(0,\pi)$ 上成立

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{2}\Bigg\{&\frac{1}{\frac{x}{2}}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\frac{x}{2}-n\pi}+\frac{1}{\frac{x}{2}+n\pi}\right]\\&-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\frac{x}{2}-\frac{2n-1}{2}\pi}+\frac{1}{\frac{x}{2}+\frac{2n+1}{2}\pi}\right]\Bigg\}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x-2n\pi} + \frac{1}{x+2n\pi}\right)$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x-(2n-1)\pi} + \frac{1}{x+(2n+1)\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{x-n\pi} + \frac{1}{x+n\pi}\right)$$

从这个式子直接就可推出所需结果.

例 15.3.4 计算 $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$.

解

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{5}{4}-1}}{(1+x)^{\frac{5}{4}+\frac{3}{4}}}\mathrm{d}x = \mathrm{B}\left(\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right)$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{1!} = \frac{1}{4}\,\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}.$$

例 15.3.5 计算曲线 $r^4 = \sin^3\theta\cos\theta$ 所围图形的面积.

解 显然,它在第一象限的面积的两倍就是所要求的面积(见图 15.3.1).根据定积分中的计算面积公式得(用极坐标形式)

$$A = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{3}{2}}\theta\cos^{\frac{1}{2}}\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right)$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{2\Gamma(2)} = \frac{1}{8}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{8}.$$

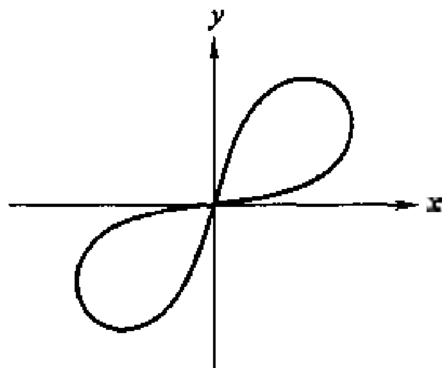


图 15.3.1

例 15.3.6 确定 $\alpha > 0, \beta > 0$,使得反常重积分

$$I = \iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{1+x^\alpha+y^\beta},\quad D = \{(x,y) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$$

收敛,并在收敛时计算的值.

解 因为若非负函数的反常重积分经过变量代换或化为累次积分后收敛,则它本身收敛,所以可以采用间接的方法.作变量代换 $x = u^{\frac{2}{\alpha}}, y = v^{\frac{2}{\beta}}$ 得

$$I = \frac{4}{\alpha\beta}\iint_{D'} \frac{u^{\frac{2}{\alpha}-1}v^{\frac{2}{\beta}-1}}{1+u^2+v^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

其中 $D' = \{u,v \mid u \geqslant 0, v \geqslant 0\}$. 再利用极坐标变换 $u = r\cos\theta$, $v = r\sin\theta$, 得

$$I = \frac{4}{\alpha\beta}\iint_{\substack{0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\\ 0\leqslant r<+\infty}} \frac{r^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}-1}}{1+r^2}\cos^{\frac{2}{\alpha}-1}\theta\sin^{\frac{2}{\beta}-1}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}x\theta$$

$$= \frac{4}{\alpha\beta}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{2}{\alpha}-1}\theta\sin^{\frac{2}{\beta}-1}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}x\theta\int_0^{+\infty}\frac{r^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}-1}}{1+r^2}\mathrm{d}r.$$

在最后一个积分中作变量代换 $r^2 = t$ 得

$$\int_0^{+\infty}\frac{r^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}-1}}{1+r^2}\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-1}}{1+t}\mathrm{d}t,$$

它仅在$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}<1$时收敛且等于$\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}, 1-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\right)$. 这时候显然 $\alpha > 1, \beta > 1$, 因此 $2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{2}{\alpha}-1}\theta\sin^{\frac{2}{\beta}-1}\theta\mathrm{d}\theta = \mathrm{B}\left(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta}\right)$.

于是当 α,β 满足$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}<1$ 时,反常重积分

$$I = \iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{1+x^\alpha+y^\beta}$$

收敛,且

$$I = \frac{1}{\alpha\beta}\mathrm{B}\left(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta}\right)\mathrm{B}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}, 1-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\alpha\beta}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)\Gamma\left(1-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\right).$$

最后给出一个关于 Gamma 函数的估计公式.

定理 15.3.4(Stirling 公式) Gamma 函数有如下的渐近估计

$$\Gamma(s+1) = \sqrt{2\pi s}\left(\frac{s}{\mathrm{e}}\right)^s\mathrm{e}^{\frac{\theta}{12s}}, s > 0, 0 < \theta < 1.$$

当 $s = n$ 为正整数时,此即为

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\mathrm{e}^{\frac{\theta}{12n}},\quad 0 < \theta < 1.$$

这个定理的证明比较复杂,故略去.

习 题

1. 计算下列积分:

(1) $\int_0^1 x^2\sqrt{a^2-\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$; (2) $\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3-\cos x}}$;

(3) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[n]{1-x^n}}$; (4) $\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n}, n>m>0$;

(5) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$; (6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\cos^{\frac{1}{2}} x\,\mathrm{d}x$;

(7) $\int_0^{+\infty} x^m \mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x,\ m,n>0$;

(8) $\int_0^1 x^{p-1}(1-x^n)^{q-1}\mathrm{d}x, p,q,n>0$.

2. 证明 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$($n$ 为正整数),并推出 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x=1$.

3. 证明 $\Gamma(s)$ 可导,并求 $\Gamma'(s)$.

4. 计算 $\int_0^1 \ln\Gamma(x)\mathrm{d}x$. **提示**:利用 $\int_0^1\ln\Gamma(1-x)\mathrm{d}x=\int_0^1\ln\Gamma(x)\mathrm{d}x$ 及余元公式.

5. 证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^\alpha x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^\alpha x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{\alpha+1}{2}\right)$ $(\alpha>0)$,并由此推出

1) 当 α 为奇数时

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^\alpha x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^\alpha x\mathrm{d}x=\frac{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots(\alpha-1)}{3\cdot5\cdot7\cdots\cdots\alpha};$$

2) 当 α 为偶数时

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^\alpha x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^\alpha x\mathrm{d}x=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(\alpha-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots\alpha}\frac{\pi}{2}.$$

6. 确定正数 α,β,γ,使得反常重积分

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{1+x^\alpha+y^\beta+z^\gamma}$$

收敛.在收敛时,计算 I 的值.其中 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x\geqslant0,y\geqslant0,z\geqslant0\}$.

7. 证明

$$\int_0^\pi\left(\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}\right)^{\alpha-1}\frac{\mathrm{d}\varphi}{1+k\cos\varphi}$$

$$= \frac{1}{1+k}\left(\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\right)^{\alpha} \frac{\pi}{\sin\frac{\alpha}{2}\pi}, \quad \alpha > 0, 0 < k < 1.$$

8. 设 $0 \leqslant h < 1$,正整数 $n \geqslant 3$. 证明

$$\int_0^h (1-t^2)^{\frac{n-3}{2}} \mathrm{d}t \geqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} h.$$

(**提示**:作变量代换 $t = hu$.)

第十六章 Fourier 级数

§1 函数的 Fourier 级数展开

Fourier 级数(三角级数)

古往今来,从阿基米德开始的众多大数学家,一直在孜孜不倦地寻找用简单函数较好地近似代替复杂函数的途径 —— 除了理论上的需要之外,它对实际应用领域的意义更是不可估量.但在微积分发明之前,这个问题一直没能获得本质上的突破.

人们最熟悉的简单函数无非两类:幂函数和三角函数.英国数学家 Taylor 在17世纪初找到了用幂函数的(无限)线性组合表示一般解析函数 $f(x)$ 的方法,即通过 Taylor 展开将它化成幂级数形式

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

经过理论上的完善之后,它很快成为微分学(乃至整个函数论)的基石之一.这方面内容已在前面有关章节中作了介绍.

在实际问题中,总是(也只能)使用Taylor级数的部分和,即 $f(x)$ 的 n 次 Taylor 多项式

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

这样做,要求 $f(x)$ 具有 $n+1$ 阶导数,对许多实际问题来说,这个条件是过于苛刻了(特别是在发现了许多不可导甚至不连续的重要函数之后);同时,Taylor 多项式仅在 x_0 附近与 $f(x)$ 吻合得较为理想,也就是说,它只有局部性质.

直到 18 世纪中叶,法国数学家和工程师 Fourier 在研究热传导问题时,才找到了用另一类简单函数 —— 三角函数的(无限)线性组合形式表示有限区间上的一般函数 $f(x)$ 的方法,即把 $f(x)$ 展开成所谓的 Fourier 级数(或称三角级数).

与 Taylor 展开相比,Fourier展开对于 $f(x)$ 的要求要宽容得多,并且它的部分和在整个区间都与 $f(x)$ 吻合得较为理想.因此,Fourier 级数是比幂级数更有力、适用性更广的工具,它在声学、光学、热力学、电学等研究领域极有价值,在微分方程求解方面更是起着基本的作用.可以说,Fourier 级数理论在整个现代分析学中占有核心的地位.

本章只介绍有关 Fourier 级数的一些基本知识,大致包括三个方面:

· 如何将一个给定的函数展开为 Fourier 级数(称为 **Fourier 展开**);

· Fourier 级数的收敛条件;

· Fourier 级数的性质及某些相关问题.

周期为 2π 的函数的 Fourier 展开

以下我们总是设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上有定义,可积且绝对可积,并已按它在 $[-\pi,\pi)$ 上的值周期延拓到 $(-\infty,\infty)$,换句话说,$f(x)$ 是定义在整个实数轴上的以 2π 为周期的周期函数(但在实际计算时,对 $f(x)$ 的延拓可以仅仅是观念上的.).

Fourier 展开的基础是三角函数的正交性.

在例 7.3.12 中已证明了函数族 $\{1,\sin x,\cos x,\sin 2x,\cos 2x,\cdots,\sin nx,\cos nx,\cdots\}$ 是任意一个长度为 2π 的区间上的正交函数列,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\mathrm{d}x=\pi\cdot\delta_{m,n}\quad(m,n\in\mathbf{N}_+)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cdot\sin nx\mathrm{d}x=0\quad(m=0,1,2,\cdots,n\in\mathbf{N}_+)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\cos mx\mathrm{d}x=2\pi\cdot\delta_{m,0}\quad(m=0,1,2,\cdots).$$

现**假定** $f(x)$ 可以形式地表示成如下级数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

且等式右边可以逐项积分,将两边同乘 $\cos mx(m=0,1,2,\cdots)$ 后在 $[-\pi,\pi]$ 上积分,并利用上面的正交性结果,

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\mathrm{d}x\\&=\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right]\cdot\cos mx\mathrm{d}x\\&=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\mathrm{d}x\\&=a_0\pi\delta_{m,0}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\pi\delta_{m,n}=a_m\pi,\end{aligned}$$

所以(将下标 m 改写为 n)

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

同理可得

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x\quad(n=1,2,\cdots),$$

这称为 **Euler-Fourier 公式**.

有了这个公式,不管最后得到的三角级数是否可以逐项积分,我们至少可以形式地将 $f(x)$ 展开为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

右端的三角级数称为 $f(x)$ 的 **Fourier 级数**,相应的 a_n 和 b_n 称为 $f(x)$ 的 **Fourier 系数**.

要特别指出的是,目前在 $f(x)$ 和它的 Fourier 级数之间不能用等号而只能用"$\sim$",因为我们不知道右端的三角级数是否收敛;即使收敛,也不知道它能否收敛到 $f(x)$ 本身(参见下面的有些例子). 这些问题我们将在下一节讨论.

例 16.1.1　将 $f(x)=\begin{cases}1, & x\in[-\pi,0)\\ 0, & x\in[0,\pi)\end{cases}$ 展开为 Fourier 级数.

解　先计算 $f(x)$ 的 Fourier 系数.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=1,$$

对 $n=1,2,\cdots$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{n\pi}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0}=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin nx\mathrm{d}x=-\frac{1}{n\pi}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}$$

$$=\frac{(-1)^n-1}{n\pi},$$

于是得到 $f(x)$ 的 Fourier 级数

$$f(x)\sim\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n}\sin nx$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots+\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}+\cdots\right).$$

$f(x)$ 的图形在电工学中称为方波(图 16.1.1(a)),上式表明它可以由一系列的正弦波(即函数 $A\sin(\omega x+\varphi)$ 表示的波形)叠加来得到. 但显然,当 $x=0$ 和 $\pm\pi$ 时,右端级数的和为$\frac{1}{2}$,不等于 $f(x)$ 的值.

图 16.1.1(b) 给出了在$[-\pi,\pi]$上,$f(x)$ 的 Fourier 级数的前若干项之和的逼近的情况,图中的 S_m 表示

$$S_m(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{m}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

这就是 $f(x)$ 的 **Fourier 级数的部分和**.

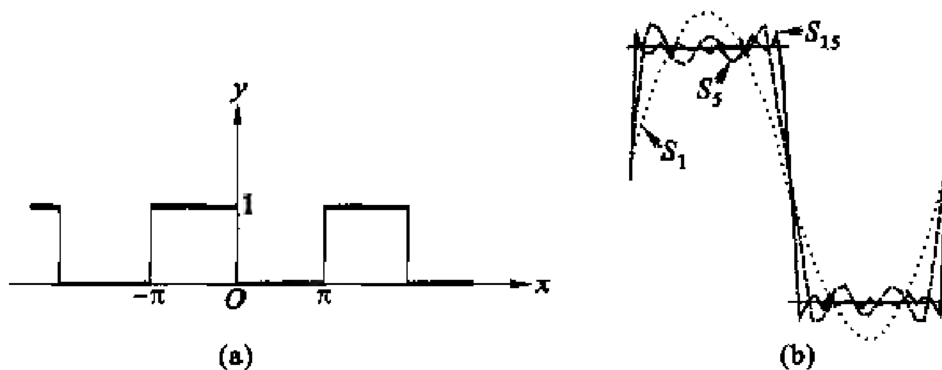


图 16.1.1

正弦级数和余弦级数

由定积分的性质,若 $f(x)$ 是奇函数,那么显然有 $a_n = 0$,而

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \quad (n = 1,2,\cdots),$$

这时,相应的 Fourier 级数为

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

称为**正弦级数**.如在例 16.1.1 中,令 $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}$(即 $f(x)$ 的图象往下移动$\frac{1}{2}$),则 $g(x)$ 是奇函数,从上面的结果看到,它的 Fourier 级数确为正弦级数.

同样,若 $f(x)$ 是偶函数,那么有 $b_n = 0$ 和

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,$$

相应的 Fourier 级数为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

称为**余弦级数**.

在实际问题中,出于某种特殊的用途,也经常需要将一个函数展开成正弦级数或余弦级数.

例 16.1.2 将 $f(x) = x(x \in [0,\pi])$ 分别展开为余弦级数和正弦级数.

解 先考虑余弦级数的情况.

按理说,这时应先进行偶延拓

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,\pi), \\ -x, & x \in [-\pi,0), \end{cases}$$

但实际上,只要按余弦级数的情况算 Fourier 系数,所得的自然就是偶延拓后

的函数 $\tilde{f}(x)$ 的三角级数.

算得

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\mathrm{d}x = \frac{x^2}{\pi}\Big|_0^{\pi} = \pi$$

而对 $n = 1,2,\cdots$,有

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos nx}{n^2}\Big|_0^{\pi}\right) = 2\cdot\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi} = \begin{cases}0, & n = 2k,\\ -\dfrac{4}{n^2\pi}, & n = 2k+1,\end{cases}$$

于是得到 $f(x)$ 的余弦级数

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}\cos nx$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots + \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} + \cdots\right).$$

这是由一系列的余弦波叠加出来的锯齿波(图 16.1.2(a)),从图 16.1.2(b) 看出,其逼近情况相当好.

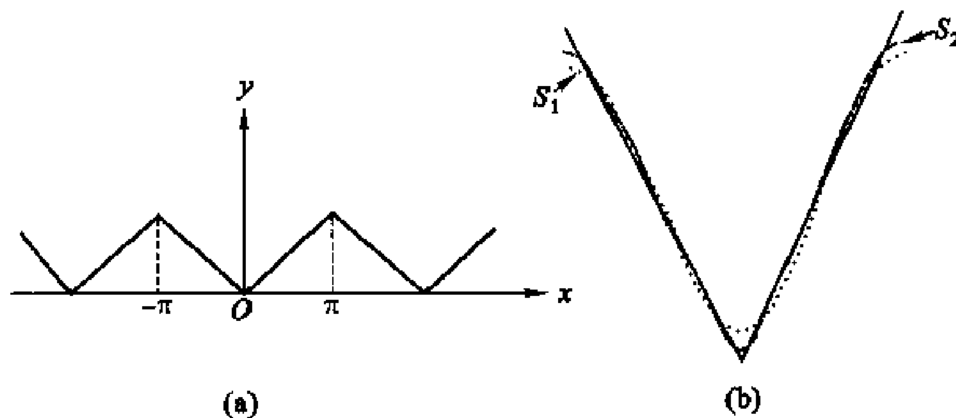


图 16.1.2

再看正弦级数的情况.

对 $n = 1,2,\cdots$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x\right)$$

$$= \frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{n},$$

于是得到 $f(x)$ 的正弦级数

$$f(x) \sim 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$
$$= 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n} + \cdots\right).$$

它的几何意义是由一系列的正弦波叠加出来的三角波(图 16.1.3(a)),其逼近情况见图 16.1.3(b). 与例 16.1.1 类似,它在 $x = \pm\pi$ 时的值是 0, 与 $f(x)$ 的值不相等.

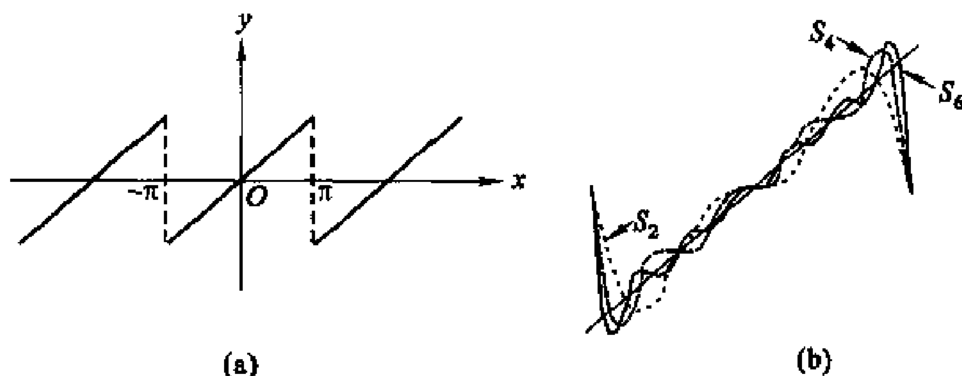


图 16.1.3

请注意,这两种级数的表达形式虽然大相径庭,但我们在下一节就会知道,若限制在$[0,\pi)$上,它们的确表示同一个函数.

任意周期的函数的 Fourier 展开

如果 $f(x)$ 的周期为 $2T$,在区间 $x \in [-T, T]$ 上作变换 $x = \frac{T}{\pi}t$,则

$$\varphi(t) = f\left(\frac{T}{\pi}t\right) = f(x)$$

就是定义在 $t \in (-\infty, \infty)$ 上的周期为 2π 的函数. 利用前面的结果,有

$$\varphi(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt + b_n\sin nt),$$

代回变量,就有

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{T}x + b_n\sin\frac{n\pi}{T}x\right),$$

相应的 Fourier 系数为

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos nt\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos\frac{n\pi}{T}x\,\mathrm{d}x \quad (n = 0,1,2,\cdots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin nt\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin\frac{n\pi}{T}x\,\mathrm{d}x \quad (n = 1,2,\cdots).$$

例 16.1.3　将 $f(x)=\begin{cases}0, & x\in[-1,0]\\ x^2, & x\in[0,1)\end{cases}$ 展开为 Fourier 级数.

解　在上面的公式中令 $T=1$,计算 $f(x)$ 的 Fourier 系数:

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3},$$

对 $n=1,2,\cdots$,利用分部积分法

$$a_n=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}f(x)\cos\frac{n\pi}{T}x\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2\cos n\pi x\mathrm{d}x=\frac{2\cdot(-1)^n}{n^2\pi^2},$$

$$b_n=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}f(x)\sin\frac{n\pi}{T}x\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2\sin n\pi x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}+\frac{2\cdot[(-1)^n-1]}{n^3\pi^3},$$

于是得到 $f(x)$ 的 Fourier 级数

$$f(x)\sim\frac{1}{6}+\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi x$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n}+2\frac{(-1)^n-1}{n^3\pi^2}\right]\sin n\pi x.$$

$f(x)$ 的图形及由一系列正弦波叠加的近似情况见图 16.1.4.

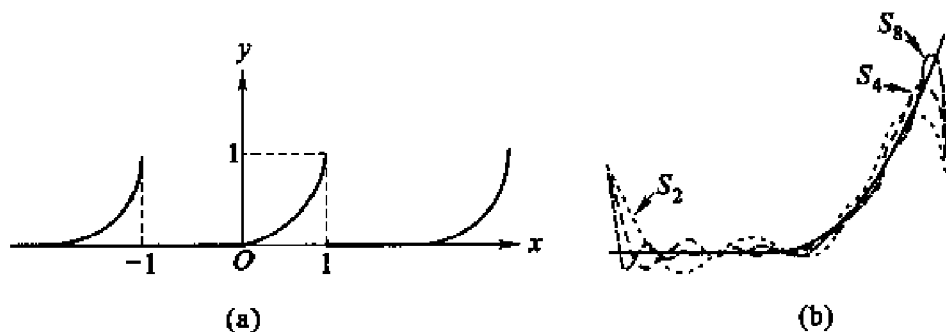


图 16.1.4

习　　题

1. 设交流电的变化规律为 $E(t)=A\sin\omega t$,将它转变为直流电的整流过程有两种类型:

(1) 半波整流(图 16.1.5(a))

$$f_1(t)=\frac{A}{2}(\sin\omega t+|\sin\omega t|);$$

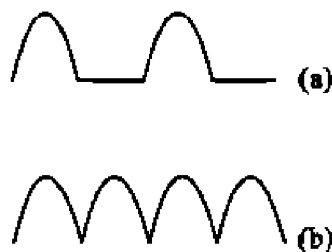


图 16.1.5

(2) 全波整流(图 16.1.5(b))

$$f_2(t) = A\,|\sin\omega t|;$$

现取 $\omega = 1$,试将 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 在$[-\pi,\pi]$上展开为 Fourier 级数.

2. 将下列函数在$[-\pi,\pi]$上展开成 Fourier 级数:

(1) $f(x) = \operatorname{sgn} x$;　　(2) $f(x) = 3\sin x + 4\cos x$;

(3) $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - \pi^2$　　(4) $f(x) = |\cos x|$;

(5) $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [-\pi, 0), \\ 0, & x \in [0, \pi); \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} ax, & x \in [-\pi, 0), \\ bx, & x \in [0, \pi). \end{cases}$

3. 将下列函数展开成正弦级数:

(1) $f(x) = 1, x \in [0,\pi]$;　　(2) $f(x) = e^{-2x}, x \in [0,\pi]$;

(3) $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}), \\ \pi, & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]; \end{cases}$

(4) $f(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{2}, & x \in [0, 1), \\ 0, & x \in [1, 2]. \end{cases}$

4. 将下列函数展开成余弦级数:

(1) $f(x) = x(\pi - x),\ x \in [0,\pi]$;　(2) $f(x) = e^x,\ x \in [0,\pi]$;

(3) $f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & x \in [0, \frac{\pi}{4}), \\ 1, & x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]; \end{cases}$

(4) $f(x) = x - \dfrac{\pi}{2} + \left|x - \dfrac{\pi}{2}\right|,\ x \in [0,\pi]$.

5. 推导定义在任意一个长度为 2π 的区间$[a, a + 2\pi]$上的函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数及其系数的计算公式.

6. 将下列函数在指定区间上展开成 Fourier 级数:

(1) $f(x)=\frac{\pi-x}{2},\quad x\in[0,2\pi]$;

(2) $f(x)=x^2,\ x\in[0,2\pi]$;

(3) $f(x)=\sin^2 x,\ x\in[0,\pi]$;

(4) $f(x)=x-[x],\ x\in[0,1]$;

(5) $f(x)=\begin{cases}e^{3x}, & x\in[-1,0),\\ 0, & x\in[0,1);\end{cases}$

(6) $f(x)=\begin{cases}C, & x\in[-T,0)\\ 0, & x\in[0,T)\end{cases}$ (C 是常数).

7. 某可控硅控制电路中的负载电流为

$$I(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t<T_0,\\ 5\sin\omega t, & T_0\leqslant t<T,\end{cases}$$

其中 ω 为圆频率,周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$.

现设初始导通时间 $T_0=\frac{T}{8}$(见图 16.1.6),求 $I(t)$ 在 $[0,T]$ 上的 Fourier 级数.

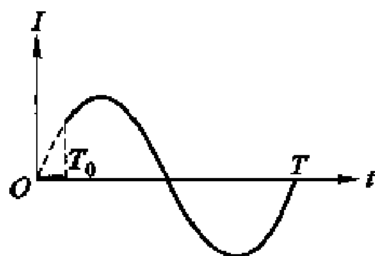


图 16.1.6

8. 设 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上可积且绝对可积,应分别对它进行怎么样的延拓,才能使它在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 级数的形式为

(1) $f(x)\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos(2n-1)x$;　　(2) $f(x)\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin 2nx$.

9. 设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积且绝对可积,证明:

(1) 若 $\forall x\in[-\pi,\pi]$,成立 $f(x)=f(x+\pi)$,则 $a_{2n-1}=b_{2n-1}=0$;

(2) 若 $\forall x\in[-\pi,\pi]$,成立 $f(x)=-f(x+\pi)$,则 $a_{2n}=b_{2n}=0$.

10. 设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 系数为 a_n 和 b_n,求下列函数的 Fourier 系数 $\tilde{a}_n$ 和 $\tilde{b}_n$:

(1) $g(x)=f(-x)$;　　(2) $h(x)=f(x+C)$ (C 是常数);

(3) $F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x-t)\mathrm{d}t$ (假定积分顺序可以交换).

§2 Fourier 级数的收敛判别法

Dirichlet 积分

仔细观察上一节中的几幅图象后可能会产生直觉：对于一般的以 2π 为周期的函数 $f(x)$，除了个别点之外(看来是不连续点)，当 $m\to\infty$ 时，它的 Fourier 级数的部分和

$$S_m(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{m}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

可望收敛于 $f(x)$，下面我们从理论上来探讨这个问题.

事实上，与 Taylor 级数相比，Fourier 级数尽管有对 $f(x)$ 的要求较弱，及它的部分和在整个区间与 $f(x)$ 逼近得较好等优点，但在收敛性问题上，Taylor 级数比较简单 —— 只要讨论余项的收敛情况，并确定收敛半径就行了，而 Fourier 级数却要复杂得多.

由于级数的收敛情况就是部分和式的极限情况，因此，下面的讨论就从部分和函数 $S_m(x)$ 入手.

将 Euler - Fourier 公式

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\mathrm{d}t,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\mathrm{d}t$$

代入 $S_m(x)$，得

$$\begin{aligned}S_m(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{m}\left[\left(\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\mathrm{d}t\right)\cos nx\right.\\&\quad\left.+\left(\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\mathrm{d}t\right)\sin nx\right]\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{m}(\cos nt\cos nx+\sin nt\sin nx)\right]\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{m}\cos n(t-x)\right]\mathrm{d}t\end{aligned}$$

当 $\theta\neq0$ 时，由三角函数的积化和差公式，有

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{m}\cos n\theta=\frac{\sin\dfrac{2m+1}{2}\theta}{2\sin\dfrac{\theta}{2}},$$

而当 $\theta=0$ 时，若将右端理解为 $\theta\to0$ 的极限，则等式依然成立. 因此，上式对

任意 $\theta \in [-\pi,\pi]$ 都是正确的.

于是

$$S_m(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{\sin\frac{2m+1}{2}(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}}\mathrm{d}t \quad (\text{作代换 } t-x=u)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}f(x+u)\frac{\sin\frac{2m+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+u)\frac{\sin\frac{2m+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u.$$

最后一个等式利用了"周期函数在任一个长度等于其周期的区间上的积分值相等"的性质.

这样,就把部分和转化成了积分形式.这个积分称为 **Dirichlet 积分**,是研究 Fourier 级数敛散性的重要工具.

将积分区间$[-\pi,\pi]$分成$[-\pi,0]$和$[0,\pi]$,稍加整理,就得到了 Dirichlet 积分的惯用形式

$$S_m(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+u)+f(x-u)]\frac{\sin\frac{2m+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u.$$

由前面的三角函数关系式,有

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\frac{2m+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\cos nu\right)\mathrm{d}u=1,$$

因此,对任意给定的函数 $\sigma(x)$,有

$$S_m(x)-\sigma(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+u)+f(x-u)-2\sigma(x)]\frac{\sin\frac{2m+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u.$$

这样,若记

$$\varphi_\sigma(u,x)=f(x+u)+f(x-u)-2\sigma(x),$$

则 $f(x)$ 的 Fourier 级数是否收敛于某个 $\sigma(x)$ 就等价于极限

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^{\pi}\varphi_\sigma(u,x)\frac{\sin\frac{2m+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u$$

是否存在且等于 0.

Riemann 引理及其推论

下面首先引进一个重要的结果.

定理 16.2.1(Riemann 引理)　设函数 $\psi(x)$ 在 $[a,b]$ 可积且绝对可积，则成立

$$\lim_{P\to+\infty}\int_a^b \psi(x)\sin px\,\mathrm{d}x = \lim_{P\to+\infty}\int_a^b \psi(x)\cos px\,\mathrm{d}x = 0.$$

证　先考虑 $\psi(x)$ 有界的情况.

$\forall\varepsilon>0$,因 $\psi(x)$ 可积,由定理 7.1.3,存在着一种分法

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

满足

$$\sum_{i=1}^n \omega_i\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2},$$

这里 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, ω_i 是 $\psi(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 中的振幅.

固定这种分法,记 m_i 是 $\psi(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 中的下确界,则 $\sum\limits_{i=1}^n |m_i|$ 是常数,因此,取实数 $P=\dfrac{4}{\varepsilon}\left(\sum\limits_{i=1}^n |m_i|\right)>0$,当 $p>P$ 时有

$$\frac{2}{p}\left(\sum_{i=1}^n |m_i|\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是,$\forall\varepsilon>0$,存在实数 $P>0$,当 $p>P$ 时,有

$$\left|\int_a^b \psi(x)\sin px\,\mathrm{d}x\right| = \left|\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}\psi(x)\sin px\,\mathrm{d}x\right|$$

$$= \left|\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}(\psi(x)-m_i)\sin px\,\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^n m_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}\sin px\,\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}|\psi(x)-m_i|\cdot|\sin px|\,\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^n |m_i|\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}\sin px\,\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}|\psi(x)-m_i|\,\mathrm{d}x + \left|\frac{-\cos px}{p}\Big|_{x_{i-1}}^{x_i}\right|\cdot\left(\sum_{i=1}^n |m_i|\right)$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^n \omega_i\Delta x_i + \frac{2}{p}\left(\sum_{i=1}^n |m_i|\right) < \varepsilon.$$

再考虑 $\psi(x)$ 无界且绝对可积的情况,不妨假设 b 是 $\psi(x)$ 的唯一奇点.由无界函数反常积分定义,$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$,当 $\eta<\delta$ 时,

$$\int_{b-\eta}^b |\psi(x)|\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2},$$

固定这个 η,对 $\psi(x)$ 在 $[a,b-\eta]$ 用上面的结论,则存在实数 $P>0$,当 $p>$

P 时，

$$\left|\int_a^{b-\eta}\psi(x)\sin px\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因此，

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b\psi(x)\sin px\,dx\right| &\leqslant \left|\int_a^{b-\eta}\psi(x)\sin px\,dx\right| + \int_{b-\eta}^b |\psi(x)\sin px|\,dx \\ &\leqslant \left|\int_a^{b-\eta}\psi(x)\sin px\,dx\right| + \int_{b-\eta}^b |\psi(x)|\,dx < \varepsilon.\end{aligned}$$

所以无论对哪一种情况，都有

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b\psi(x)\sin px\,dx = 0.$$

同理可证

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b\psi(x)\cos px\,dx = 0.$$

证毕

由 Riemann 引理可以得到如下的重要结论.

推论 1(局部性原理) 可积且绝对可积函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 x 处是否收敛只与 $f(x)$ 在区间 $(x-\delta, x+\delta)$ 上的性质有关，这里 δ 是一个任意小的正常数.

证 由于对任意的 $\delta > 0$，$\dfrac{f(x+u)+f(x-u)}{2\sin\frac{u}{2}}$ 在 $[\delta,\pi]$ 可积且绝对可积，由 Riemann 引理，

$$\lim_{m\to\infty}\int_\delta^\pi [f(x+u)+f(x-u)]\frac{\sin\frac{2m+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}du = 0.$$

因此，若将 $S_m(x)$ 的积分区间分成 $[0,\delta]$ 和 $[\delta,\pi]$ 两部分，则由积分和极限的性质，当 $m\to\infty$ 时 $S_m(x)$ 的敛散性显然只与

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\delta [f(x+u)+f(x-u)]\frac{\sin\frac{2m+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}du$$

有关，而这个积分只涉及 $f(x)$ 在区间 $(x-\delta, x+\delta)$ 上的性质.

证毕

推论 2 设函数 $\psi(u)$ 在 $[0,\delta]$ 可积且绝对可积，则成立

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^\delta\psi(u)\frac{\sin\frac{2m+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}du = \lim_{m\to\infty}\int_0^\delta\psi(u)\frac{\sin\frac{2m+1}{2}u}{u}du.$$

证 令

$$g(u)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sin\dfrac{u}{2}}-\dfrac{1}{u}, & u>0,\\ 0, & u=0,\end{cases}$$

容易验证 $g(u)$ 是$[0,\delta]$上的连续函数,由 Riemann 引理,当 $m\to\infty$ 时,有

$$\int_0^\delta\psi(u)\left[\frac{1}{2\sin\dfrac{u}{2}}-\frac{1}{u}\right]\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)u\,\mathrm{d}u$$
$$=\int_0^\delta\psi(u)g(u)\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)u\,\mathrm{d}u\to 0.$$

证毕

显然,这里的 δ 可以取大于零的任意常数.

Fourier 级数的收敛判别法

以上推论进一步告诉我们,如果能找到适当的 $\sigma(x)$,使得对于充分小的定数 $\delta>0$,有

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^\delta\frac{\varphi_\sigma(u,x)}{u}\cdot\sin\frac{2m+1}{2}u\,\mathrm{d}u=0,$$

则 $f(x)$ 的 Fourier 级数必定收敛于这个 $\sigma(x)$.

我们来粗略分析一下.显而易见,对 $x\in[-\pi,\pi]$,只要存在某个 $\delta>0$,使

$$\frac{\varphi_\sigma(u,x)}{u}=\frac{f(x+u)+f(x-u)-2\sigma(x)}{u}$$

在$[0,\delta]$可积且绝对可积(这被称为 **Dini 条件**),就可以由 Riemann 引理导出上面的结果.现假设 $f(x)$ 在$[-\pi,\pi]$至多只有第一类不连续点,而上述积分存在与否只涉及$\dfrac{\varphi_\sigma(u,x)}{u}$当$u\to 0$时的性质,显然,要满足 Dini 条件首先必须有

$$\lim_{u\to 0}[f(x+u)+f(x-u)-2\sigma(x)]=0.$$

或者说

$$\sigma(x)=\frac{f(x+)+f(x-)}{2},$$

于是,问题最终转化为研究使得

$$\lim_{p\to+\infty}\int_0^\delta\left[f(x+u)+f(x-u)-2\,\frac{f(x+)+f(x-)}{2}\right]\frac{\sin pu}{u}\mathrm{d}u=0$$

成立的条件 —— 这是探索 Fourier 级数收敛性的一把钥匙.

德国数学家 Dirichlet 在 1829 年 ——Fourier 级数问世约四分之一个世纪

之后，首先得到了一个函数的 Fourier 级数的收敛条件；又过了约半个世纪，另一位德国数学家 Lipschitz 得到了与之不同的收敛条件. 他们的结果经后人完善，可以表述为如下定理：

定理 16.2.2 设函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 可积且绝对可积，且满足下列两个条件之一，则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 x 收敛于 $\dfrac{f(x+)+f(x-)}{2}$.

(1) (**Dirichlet－Jordan 判别法**) $f(x)$ 在某个区间 $[x-\delta,x+\delta]$ $(\delta>0)$ 上是分段单调函数或若干个分段单调函数之和.

(2) (**Dini－Lipschitz 判别法**) $f(x)$ 在点 x 处满足下述的指数为 $\alpha\in(0,1]$ 的 Hölder 条件.

所谓"Hölder 条件"是这么定义的：

定义 16.2.1 设函数 $f(x)$ 在 x 连续或第一类间断，若对于充分小的正数 δ，存在常数 $L>0$ 和 $\alpha\in(0,1]$，使得成立

$$|f(x\pm u)-f(x\pm)|<Lu^{\alpha}\quad(0<u<\delta),$$

则称 $f(x)$ 在 x 满足 **Hölder 条件**（当 $\alpha=1$ 称为 **Lipschitz 条件**）.

我们先导出一个辅助命题.

定理 16.2.3（Dirichlet 引理） 设函数 $\psi(u)$ 在 $[0,\delta]$ 单调，则成立

$$\lim_{p\to+\infty}\int_0^{\delta}\frac{\psi(u)-\psi(0+)}{u}\sin pu\,\mathrm{d}u=0.$$

证 不妨设 $\psi(x)$ 单调增加. 于是，$\forall\,\varepsilon>0$，存在 $\eta\in(0,\delta)$，当 $u\in(0,\eta]$ 时，

$$0\leqslant\psi(u)-\psi(0+)<\varepsilon.$$

将积分分为两部分

$$\begin{aligned}&\int_0^{\delta}\frac{\psi(u)-\psi(0+)}{u}\sin pu\,\mathrm{d}u\\=&\int_0^{\eta}\frac{\psi(u)-\psi(0+)}{u}\sin pu\,\mathrm{d}u+\int_{\eta}^{\delta}\frac{\psi(u)-\psi(0+)}{u}\sin pu\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

对右边的第一项，由积分第二中值定理，$\exists\,\xi\in[0,\eta]$，

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{\eta}\frac{\psi(u)-\psi(0+)}{u}\sin pu\,\mathrm{d}u\right|&=[\psi(\eta)-\psi(0+)]\cdot\left|\int_{\xi}^{\eta}\frac{\sin pu}{u}\mathrm{d}u\right|\\&<\left|\int_{\xi}^{\eta}\frac{\sin pu}{u}\mathrm{d}u\right|\cdot\varepsilon,\end{aligned}$$

利用含参变量积分中已经得到的结论

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},$$

可知 $\left|\int_{\xi}^{\eta}\frac{\sin pu}{u}\mathrm{d}u\right|$ 一致有界，即存在常数 K，有

$$\left|\int_{\xi}^{\eta} \frac{\sin pu}{u} du\right| < K,$$

即

$$\left|\int_{0}^{\eta} \frac{\psi(u) - \psi(0+)}{u} \sin pu du\right| < K\varepsilon.$$

而对右边的第二项,由于$\frac{\psi(u) - \psi(0+)}{u}$在$[\eta, \delta]$上显然可积且绝对可积,由 Riemann 引理,存在常数 $P > 0$,当 $p > P$ 时,有

$$\left|\int_{\eta}^{\delta} [\psi(u) - \psi(0+)] \frac{\sin pu}{u} du\right| < \varepsilon.$$

综合上述,即知结论成立.

证毕

Dirichlet 引理也经常表述为等价形式

$$\lim_{p \to +\infty} \int_{0}^{\delta} \psi(u) \frac{\sin pu}{u} du = \frac{\pi}{2} \psi(0+).$$

如果 $\psi(u)$ 是分段单调函数或若干个分段单调函数之和,易知 Dirichlet 引理依然成立(留作习题).

下面证明定理 16.2.2.

证 当满足条件(1) 时,由 Dirichlet 引理,

$$\lim_{p \to +\infty} \int_{0}^{\delta} \frac{f(x+u) - f(x+)}{u} \sin pu du = 0,$$

$$\lim_{p \to +\infty} \int_{0}^{\delta} \frac{f(x-u) - f(x-)}{u} \sin pu du = 0,$$

两式相加,即有

$$\lim_{p \to +\infty} \int_{0}^{\delta} \left[f(x+u) + f(x-u) - 2\frac{f(x+) + f(x-)}{2} \right] \frac{\sin pu}{u} du = 0.$$

当 $f(x)$ 满足条件(2) 时,在$(0, \delta)$ 上,有

$$\frac{|f(x \pm u) - f(x \pm)|}{u} < \frac{L}{u^{1-\alpha}} \quad (0 < \alpha \leqslant 1),$$

所以,

$$\frac{\varphi_{\sigma}(u, x)}{u} = \frac{f(x+u) - f(x+)}{u} + \frac{f(x-u) - f(x-)}{u}$$

在$[0, \delta]$ 可积且绝对可积,由 Riemann 引理

$$\lim_{p \to +\infty} \int_{0}^{\delta} \left[f(x+u) + f(x-u) - 2\frac{f(x+) + f(x-)}{2} \right] \frac{\sin pu}{u} du = 0.$$

因此无论哪种情况,$f(x)$ 的 Fourier 级数在 x 均收敛于 $\frac{f(x+) + f(x-)}{2}$.

证毕

由于"可导"强于"满足 Lipschitz 条件"，且易于验证，因此实际中往往使用如下条件(2)的推论(请读者自证).

推论 若 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 可积且绝对可积，在点 x 处两个单侧导数 $f'_+(x)$ 和 $f'_-(x)$ 都存在，或更进一步，只要两个拟单侧导数

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x\pm h)-f(x\pm)}{h}$$

存在，则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 x 收敛于 $\dfrac{f(x+)+f(x-)}{2}$.

Dirichlet-Jordan 判别法和 Dini-Lipschitz 判别法都是 Fourier 级数收敛的充分条件，尽管在物理、化学、工程等领域的实际问题中，出现的函数一般都同时满足这两个判别法的条件(容易验证，上节例子和习题中的 $f(x)$ 均是如此)，但可以构造例子说明它们确实是互不包含的(参见本节习题 12). 附带指出，直至今天，还没有找到一个判别 Fourier 级数敛散性的既充分又必要的条件.

定理 16.2.2 告诉我们，若收敛条件满足，则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在连续点收敛于函数值本身，而在第一类不连续点收敛于它左右极限的算术平均值.

所以，对 $[-\pi,\pi]$ 上的连续函数 $f(x)$，应将 $f(x)$ 与它的(收敛的)Fourier 级数间的"～"改为"＝". 如例 16.1.2 中 $f(x)$ 的余弦级数可以直截了当地写成

$$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{\cos 3x}{3^2}\frac{\cos 5x}{5^2}+\cdots+\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}+\cdots\right)=x$$
$$(x\in[0,\pi]).$$

若 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上有第一类不连续点，那么展成 Fourier 级数后，要对这些点予以特别说明，画图时也要将它们的函数值标为其左右极限的算术平均值.

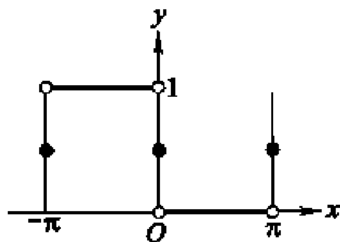


图 16.2.1

如例 16.1.1，应该写成

$$f(x)\sim\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\cdots+\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}+\cdots\right)$$

$$=\begin{cases}1, & x\in(-\pi,0),\\ \dfrac{1}{2}, & x=0,\pm\pi,\\ 0, & x\in(0,\pi).\end{cases}$$

Fourier 级数的图象为图 16.2.1.

因 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 属丁 Fourier 级数收敛范围,因此有

$$\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots+\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}+\cdots\right)\Bigg|_{x=\frac{\pi}{2}}$$

$$=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

整理后便有熟知的公式

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\cdots+(-1)^k\frac{1}{2k+1}+\cdots.$$

这样,在 Fourier 级数的研究中,我们殊途同归,得到了与在 $y=\arctan x$ 的幂级数展开中取 $x=1$ 时的相同结果.

例 16.1.2 中 $f(x)$ 的正弦级数应该写成

$$f(x)\sim 2\left(\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}+\cdots\right)$$

$$=\begin{cases}x, & x\in(-\pi,\pi),\\ 0, & x=0,\pm\pi.\end{cases}$$

Fourier 级数的图象为图 16.2.2. 它在$[0,\pi)$上与余弦级数表示的是同一个函数,这正是上一节中指出的结果.

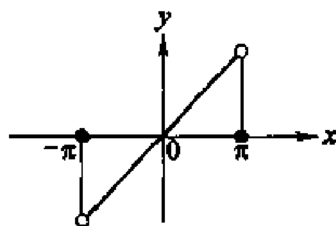


图 16.2.2

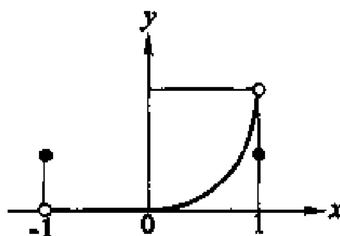


图 16.2.3

而例 16.1.3 的式子也应相仿地写成

$$f(x)\sim\frac{1}{6}+\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi x$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n}+2\frac{(-1)^n-1}{n^3\pi^2}\right]\sin n\pi x$$

$$
=\begin{cases} 0, & x \in (-1,0], \\ \dfrac{1}{2}, & x \pm 1, \\ x^2, & x \in (0,1). \end{cases}
$$

Fourier 级数的图象为图 16.2.3.

在证实了这个 Fourier 级数收敛的前提下，可以导出一个非常重要的结果.

令 $x = 1$，注意到这个点是 $f(x)$ 的不连续点，其 Fourier 级数应收敛于 $\dfrac{f(1+0)+f(1-0)}{2} = \dfrac{1}{2}$；而在上面级数的第一个和式中有 $\cos n\pi = (-1)^n$，第二个和式显然为零. 因此，稍加整理就可得到

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.
$$

由它还可以导出一系列类似级数的值，如

$$
1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{12},
$$

$$
1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}
$$

等(留作习题).

这些等式可以用来进行某些特殊的计算，如历史上曾有人用这些等式计算过 π 的近似值. 而对某些原函数并非初等函数的积分，如 $\int_0^1 \dfrac{\ln(1-x)}{x} dx$，将被积函数 Taylor 展开，易知对任意 $\varepsilon \in (0,1)$，该级数在$[0,1-\varepsilon]$可以逐项积分，略去令 $\varepsilon \to 0$ 的极限过程，即有

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx &= \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} \right) dx \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{n} dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n^2} \Big|_0^1 \right) \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6},
\end{aligned}
$$

这正是 §8.1 关于反常积分的数值计算中提到的结果.

这些等式也经常用来检验展开的 Fourier 级数的正确性. 比如，在例 16.1.2 的余弦级数中令 $x = 0$，

$$
\begin{aligned}
&\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots + \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} + \cdots \right) \Bigg|_{x=0} \\
&\qquad = f(0) = 0,
\end{aligned}
$$

就得到了上面的最后一个等式$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

还可以获得一些其它的有趣结果,如 $\cos x$ 的全部零点为$\pm\frac{\pi}{2}$、$\pm\frac{3\pi}{2}$、…、$\pm\frac{(2k-1)\pi}{2}$、…,而

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left[\frac{(2k-1)\pi}{2}\right]^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left[-\frac{(2k-1)\pi}{2}\right]^2}$$

$$=2\cdot\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=2\cdot\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{8}=1,$$

即 $\cos x$ 全部零点的倒数的平方和恰为 1!

习　　题

1. 改用 Riemann 引理的推论证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

2. 设 $\psi(x)$ 在$[0,+\infty)$连续且单调, $\lim\limits_{x\to+\infty}\psi(x)=0$,证明

$$\lim_{p\to+\infty}\int_0^{+\infty}\psi(x)\sin px\mathrm{d}x=0.$$

3. 设函数 $\psi(u)$ 在$(-\pi,\pi)$分段连续,当 $u=0$ 时连续且有单侧导数,证明

$$\lim_{p\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(u)\frac{\cos\frac{u}{2}-\cos pu}{2\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\psi(u)-\psi(-u)]\cot\frac{u}{2}\mathrm{d}u.$$

4. 证明 Dirichlet 引理对 $\psi(u)$ 是分段单调函数或若干个分段单调函数之和的情况依然成立.

5. 设函数 $\psi(u)$ 在$[-\delta,\delta]$单调,证明

$$\lim_{p\to+\infty}\int_{-\delta}^{\delta}\{\psi(u)-[\psi(0+)-\psi(0-)]\}\frac{\sin pu}{u}\mathrm{d}u=0.$$

6. 证明 Lipschitz 判别法的推论.

7. 对本章§1中的习题,验证它们满足收敛判别法的条件,写出与 Fourier 级数等价的函数形式并作图.

8. 利用$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$,证明:

(1) $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{12}$　(2) $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$.

9. 求 $\sin x$ 全部非零零点的倒数的平方和.

10. 证明下列关系式:

(1) 对 $0 < x < 2\pi$ 且 $a \neq 0$,有

$$\pi e^{ax} = (e^{2a\pi} - 1)\left[\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a\cos nx - n\sin nx}{a^2 + n^2}\right];$$

(2) 对 $0 < x < 2\pi$ 且 a 不是自然数,有

$$\pi\cos ax = \frac{\sin 2a\pi}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a\sin 2a\pi\cos nx + n(\cos 2a\pi - 1)\sin nx}{a^2 - n^2};$$

(3) 对(2),令 $x = \pi$,有

$$\frac{a\pi}{\sin a\pi} = 1 + 2a^2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 - n^2}$$

11. (1) 验证函数

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln\dfrac{|x|}{2\pi}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

满足 Dirichlet − Jordan 判别法条件,而不满足 Dini − Lipschitz 判别法条件.

(2) 验证函数

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\dfrac{\pi}{2x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

满足 Dini − Lipschitz 判别法条件.(今后会学到,它不满足 Dirichlet − Jordan 判别法条件,在此从略.)

§ 3 Fourier 级数的性质

Fourier 级数的分析性质

不失一般性,假定 $f(x)$ 的周期为 2π.

首先,利用 Riemann 引理可以直接得出

定理 16.3.1 设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积且绝对可积,则 $f(x)$ 的 Fourier 系数

$$a_n \to 0, \quad b_n \to 0\ (n \to \infty).$$

对于一个用级数形式表达的函数,总要讨论它能否逐项微分和逐项积分.对于逐项积分,Fourier 级数有非常好的性质.

定理 16.3.2(Fourier 级数的逐项积分定理) 设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积且绝对可积,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

则 $f(x)$ 的 Fourier 级数可以逐项积分，即 $\forall c, x \in [-\pi, \pi]$

$$\int_c^x f(t)\mathrm{d}t = \int_c^x \frac{a_0}{2}\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty}\int_c^x (a_n \cos nt + b_n \sin nt)\mathrm{d}t.$$

由于尚未具备足够的数学工具，这里仅对 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上只有有限个第一类不连续点的情况加以证明，$f(x)$ 为一般的可积且绝对可积函数的情况留待今后学习其他课程时解决.

证　考虑函数

$$F(x) = \int_c^x \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] \mathrm{d}t,$$

由定理 7.3.1，知 $F(x)$ 是周期为 2π 的连续函数，且在 $f(x)$ 的连续点，成立 $F'(x) = f(x) - \frac{a_0}{2}$. 同时易知 $\forall x \in [-\pi, \pi]$，$F(x)$ 的两个单侧导数

$$F'_{\pm}(x) = f(x\pm) - \frac{a_0}{2}$$

都存在，由 Dini-Lipschitz 判别法的推论，$F(x)$ 可展开为收敛的 Fourier 级数

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos nx + B_n \sin nx).$$

利用分部积分法，并分段使用 Newton - Leibniz 公式，即有

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}F(x)\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} F'(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x) - \frac{a_0}{2}\right]\sin nx\,\mathrm{d}x = -\frac{b_n}{n}. \end{aligned}$$

类似可得

$$B_n = \frac{a_n}{n}.$$

于是，

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{b_n}{n}\cos nx + \frac{a_n}{n}\sin nx\right),$$

令 $x = c$，有

$$0 = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{b_n}{n}\cos nc + \frac{a_n}{n}\sin nc\right),$$

两式相减并整理，即得到

$$F(x) = \int_c^x \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] \mathrm{d}t$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \frac{\sin nx - \sin nc}{n} + b_n \frac{-\cos nx + \cos nc}{n}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\int_c^x (a_n \cos nt + b_n \sin nt)\mathrm{d}t.$$

证毕

这就是说,只要 $f(x)$ 可以展成 Fourier 级数 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$,哪怕这个级数并不表示 $f(x)$,甚至根本不收敛,它的逐项积分级数也一定能收敛于 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

由定理 16.3.2,我们还顺便得到了判断一个三角级数是否为 Fourier 级数的另一个必要条件.

推论　$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 是某个可积且绝对可积函数的 Fourier 级数的必要条件是 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$ 收敛.

证明留作习题.

因此,并不是随便拿来一个收敛的三角级数就能说它一定是某个函数的 Fourier 级数,比如对

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n},$$

由级数收敛的 Dirichlet 判别法可知它是点点收敛的,但由于 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n \ln n}$ 发散,它不可能是任何可积且绝对可积函数的 Fourier 级数.

但是,Fourier 级数逐项微分的结果就远没有这么好了. 一般说来,Fourier 级数是不能逐项微分的,除非是加上特别的条件.

定理 16.3.3(Fourier 级数的逐项微分定理)　设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

$f(-\pi) = f(\pi)$,且除了有限个点外 $f(x)$ 可微,$f'(x)$ 可积且绝对可积,则 $f'(x)$ 的 Fourier 级数可由 $f(x)$ 的 Fourier 级数逐项微分得到,即

$$f'(x) \sim \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{a_0}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-a_n n\sin nx + b_n n\cos nx).$$

证　由所给条件,此时 $f'(x)$ 可展开为 Fourier 级数,记 $f'(x)$ 的 Fourier

系数为 a_n' 和 b_n',则有,

$$a_0' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}[f(\pi) - f(-\pi)] = 0,$$

$$a_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{f(x)\cos nx}{\pi}\Big|_{-\pi}^{\pi} +$$

$$\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = nb_n \quad (n = 1,2,\cdots),$$

$$b_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\mathrm{d}x = -na_n \quad (n = 1,2,\cdots),$$

于是,

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}(-a_n n\sin nx + b_n n\cos nx).$$

证毕

Fourier 级数的逼近性质

现在,我们来讨论 Fourier 级数的逼近性质.

定义 16.3.1 设 S 是一个定义了内积运算 $(\cdot,\cdot)$ 的线性空间,取 S 中的范数为

$$\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot,\cdot)},$$

T 是 S 的一个 n 维子空间,记 T 的一组正交基为 $\boldsymbol{\varphi}_1,\boldsymbol{\varphi}_2,\cdots,\boldsymbol{\varphi}_n$,即

$$T = \operatorname{span}\{\boldsymbol{\varphi}_1,\boldsymbol{\varphi}_2,\cdots,\boldsymbol{\varphi}_n\},$$

若对于 $x \in S$,有 $x_T = c_1\boldsymbol{\varphi}_1 + c_2\boldsymbol{\varphi}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{\varphi}_n \in T$,使得

$$\|x - x_T\| = \min_{y\in T}\|x - y\|,$$

则称 x_T 是 x 在 T 中的**最佳平方逼近元素**.

在线性代数中我们已经学过以下结论.

引理 16.3.1 在上述假定下

(1) $\forall x \in S$, x 在 T 中的最佳平方逼近元素 x_T 存在且唯一;

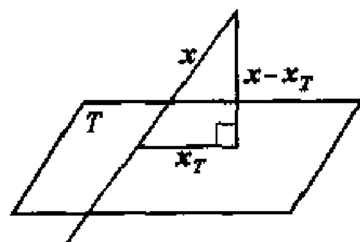


图 16.3.1

(2) $x_T \in T$ 是 x 在 T 中的最佳平方逼近元素的充分必要条件是 $x - x_T \perp$

$\boldsymbol{T}$，即

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_T,\boldsymbol{\varphi}_j)=0\ (j=1,2,\cdots,n),$$

或者等价地，$\boldsymbol{x}_T$ 的线性组合系数

$$c_j=\frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varphi}_j)}{(\boldsymbol{\varphi}_j,\boldsymbol{\varphi}_j)}\quad (j=1,2,\cdots,n);$$

(3) 最佳平方逼近的余项满足估计式

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_T\|^2=\|\boldsymbol{x}\|^2-\|\boldsymbol{x}_T\|^2=\|\boldsymbol{x}\|^2-\sum_{j=1}^{\infty}c_j^2\|\boldsymbol{\varphi}_j\|^2.$$

图 16.3.1 给出了引理结论的一个简单示意，请读者作为复习，自行将本引理的结论再证明一遍.

现在，具体地取

$\boldsymbol{S}$：$[-\pi,\pi]$ 上可积且平方可积函数 $f(x)$ 全体；

$\boldsymbol{S}$ 中的内积$(\cdot,\cdot)$和范数 $\|\cdot\|$：

$$(f,g)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

$$\|f\|=\sqrt{(f,f)};$$

$\boldsymbol{T}$：m 阶三角多项式$\dfrac{A_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{m}(A_n\cos nx+B_n\sin nx)$全体，利用前面已得到的正交性，可将 $\boldsymbol{T}$ 表示为

$$\boldsymbol{T}=\operatorname{span}\{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos mx,\sin mx\},$$

这时，有 $\|1\|^2=2$ 和

$$\|\cos jx\|^2=\|\sin jx\|^2=1\quad (j=1,2,\cdots,m);$$

由引理 16.3.1 及求 Fourier 系数的 Euler－Fourier 公式，即得下面的重要结论.

定理 16.3.3（Fourier 级数的平方逼近性质）　设 $f(x)$ 在$[-\pi,\pi]$上可积且平方可积，则 $f(x)$ 在 $\boldsymbol{T}$ 中的最佳平方逼近元素恰为 $f(x)$ 的 Fourier 级数的部分和

$$S_m(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{m}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

逼近的余项为

$$\|f-S_m\|^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x-\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{m}(a_n^2+b_n^2)\right].$$

证明请读者自己完成.

因为 $\|f-S_m\|^2\geqslant 0$，令余项中的 $m\to\infty$，即得到

推论（Bessel 不等式）　设 $f(x)$ 在$[-\pi,\pi]$可积且平方可积，则 $f(x)$ 的 Fourier 系数满足不等式

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x.$$

这表示 Fourier 系数的平方和组成了一个收敛的级数.

进一步的研究表明,上面的不等式实际上是一个等式,称为 Parseval 等式(又称**能量恒等式**),它在理论和实际问题中都具有很重要的作用.

定理 16.3.4(Parseval 等式) 设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 可积且平方可积,则成立等式

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x.$$

证明从略.

定义 16.3.2 若函数序列满足

$$\lim_{n\to\infty}\|f(x)-\psi_n(x)\|^2=0,$$

这里 $f(x)$ 是某一个固定函数,则称 $\{\psi_n(x)\}$ 按范数 $\|\cdot\|$ **平方收敛**于 $f(x)$,简称 $\psi_n(x)$ 平方收敛于 $f(x)$.

由 Parseval 等式,

$$\lim_{m\to\infty}\|f-S_m\|^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x-\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\right]=0,$$

即得到一个精彩而重要的结论.

推论(Fourier 级数的平方收敛性质) 设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 可积且平方可积,则 $f(x)$ 的 Fourier 级数平方收敛于 $f(x)$.

而对一致收敛,我们不加证明地引进一个同样精彩、同样重要的结论.

定理 16.3.5(Weierstrass 第二逼近定理) 对周期为 2π 的任意一个连续函数 $f(x)$,都存在 m 阶三角多项式序列

$$\left\{\psi_m(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{m}(A_n\cos nx+B_n\sin nx)\right\},$$

使得 $\psi_m(x)$ 一致收敛于 $f(x)(m\to\infty)$.

习　　题

1. 由例 16.1.2 的结果

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\quad(x\in(-\pi,\pi)),$$

用逐项积分法求 x^2 和 x^3 的 Fourier 级数.

2. 说明级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$ 和 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln\ln n}$ 点点收敛,但不可能是任何函数的 Fourier 级数.

3. 证明定理 16.3.2 的推论：$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 是某个可积且绝对可积函数的 Fourier 级数的必要条件是 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$ 收敛.

4. 证明引理 16.3.1.

5. 证明定理 16.3.3.

6. 对周期为 $2T$ 的可积且平方可积函数 $f(x)$，导出它在 $[-T,T]$ 上的正交三角多项式序列 $\left\{1,\cos\frac{\pi}{T}x,\sin\frac{\pi}{T}x,\cos\frac{2\pi}{T}x,\sin\frac{2\pi}{T}x,\cdots\right\}$ 下的 Parseval 等式.

7. 利用例 16.1.1 的结果

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in[-\pi,0)\\ 0, & x\in[0,\pi]\end{cases}\sim\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

和 Parseval 等式，重新证明等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

8. 利用例 16.1.2 的结果

$$f(x)=|x|=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos nx\quad(x\in[0,\pi]),$$

和 Parseval 等式，求

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}.$$

9. 设 $f(x),g(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 可积且平方可积，它们的 Fourier 系数分别为 a_n,b_n 和 $\tilde{a}_n,\tilde{b}_n$，则成立等式

$$\frac{a_0\tilde{a}_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\tilde{a}_n+b_n\tilde{b}_n)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

10. 证明对周期为 2π 的任意一个连续函数 $f(x)$，$\forall\varepsilon>0$，都存在 m 阶三角多项式

$$\psi_m(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{m}(A_n\cos nx+B_n\sin nx),$$

使得

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-\psi_m(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

§4 Fourier 变换和 Fourier 积分

Fourier 变换及其逆变换

以上关于 Fourier 级数的论述都是对周期函数而言的，那么对于不具备周

期性的函数,又该如何处理呢?

$(-\infty,\infty)$ 上可积的非周期函数 $f(x)$ 可以看成是周期函数的极限情况,处理思路是这样的:

(1) 先取 $f(x)$ 在 $[-T,T]$ 上的部分(即把它视为仅定义在 $[-T,T]$ 上的函数),以 $2T$ 为长度,将它周期延拓到整个实轴;

(2) 对得到的周期函数 $f_T(x)$ 作 Fourier 展开;

(3) 令 T 趋于无穷大.

下面来导出具体过程.将 Euler 公式

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2},$$

$$\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}=\frac{i}{2}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})$$

代入周期为 $2T$ 的函数 $f_T(x)$ 的 Fourier 级数,记 $\frac{\pi}{T}$ 是圆频率(下面就简称为频率),$\omega_n=\frac{n\pi}{T}$,得到

$$\begin{aligned}f_T(x)&\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\omega_n x+b_n\sin\omega_n x)\\&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n+ib_n}{2}e^{i\omega_n x}+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-i\omega_n x}\right).\end{aligned}$$

记

$$c_n=a_n-ib_n=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}f_T(t)e^{-i\omega_n t}dt=\bar{c}_{-n}\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

则得到

$$f_T(x)\sim\frac{c_0}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(c_ne^{i\omega_n x}+c_{-n}e^{-i\omega_n x})=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_ne^{i\omega_n x},$$

这称为 **Fourier 级数的复数形式**.将 c_n 的表达式代入,即有

$$f_T(x)\sim\frac{1}{2T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-T}^{T}f_T(x)e^{-i\omega_n t}dt\right]e^{i\omega_n x}.$$

记 $\Delta\omega=\omega_n-\omega_{n-1}=\frac{\pi}{T}$,于是当 $T\to+\infty$ 时 $\Delta\omega\to0$,即得到

$$f(x)=\lim_{T\to+\infty}f_T(x)\sim\lim_{\Delta\omega\to0}\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-T}^{T}f_T(t)e^{-i\omega_n t}dt\right]e^{i\omega_n x}\Delta\omega.$$

记 $\varphi_T(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}f_T(t)e^{-i\omega t}dte^{i\omega x}$,则上式可写成

$$f(x)\sim\lim_{\Delta\omega\to0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\varphi_T(\omega_n)\Delta\omega,$$

它看上去很像 Riemann 和的极限形式,不过由于 $\Delta\omega\to0$ 时函数 $\varphi_T(\omega)$ 将随之

趋于 $\varphi(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}$，因此这并非真正的 Riemann 和．但是，我们暂且不理会这些，就将它看成 $\varphi(\omega)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上的“积分”，于是（形式上）有

$$f(x)\sim\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega.$$

我们将方括号中带参变量 ω 的积分定义为 $f(x)$ 的 **Fourier 变换**，用 x 表示积分变量，符号“$\overset{\text{def}}{=\!=}$”表示“定义为”，即有

$$F[f]\overset{\text{def}}{=\!=}\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x,$$

再将 $\hat{f}(\omega)$ 代回原来的积分式，便可得到一个形式类似的表达式，我们称它为 $\hat{f}(\omega)$ 的 **Fourier 逆变换**，记为

$$F^{-1}[\hat{f}]\overset{\text{def}}{=\!=}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega$$

我们将

$$\begin{aligned}F^{-1}[F[f]]&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(x-t)}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

称为 $f(x)$ 的 **Fourier 积分**．容易想到，在一定条件下，它应与 $f(x)$ 相等，但研究这些条件已超出本课程的要求，我们不加证明地给出以下充分条件．

定理 16.4.1　*设 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上绝对可积，且在 x 处满足定理 16.2.2 所述的 Dirichlet-Jordan 判别法和 Dini-Lipschitz 判别法的条件之一，则 $f(x)$ 在这一点上的 Fourier 变换 $\hat{f}(\omega)$ 及其逆变换都存在，且有*

$$F^{-1}[F[f]]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(x-t)}\mathrm{d}t=\frac{f(x+)+f(x-)}{2}.$$

容易看出，它的条件和结论与 Fourier 级数是类似的．

例 16.4.1　求孤立矩形波

$$f(x)=\begin{cases}h, & |x|\leqslant\delta\\0, & |x|>\delta\end{cases}$$

（图 16.4.1）的 Fourier 变换和逆变换．

解　当 $\omega\neq0$ 时，

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x=h\int_{-\delta}^{\delta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x\\&=h\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}}{-\mathrm{i}\omega}\bigg|_{-\delta}^{\delta}=\frac{2h}{\omega}\sin(\omega\delta),\end{aligned}$$

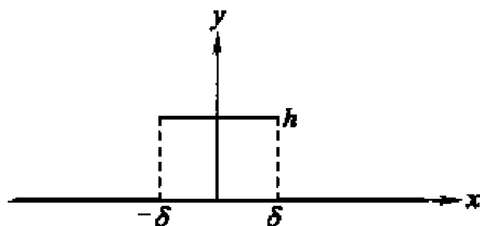


图 16.4.1

当 $\omega=0$ 时

$$\hat{f}(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=2h\delta\left(=\lim_{\omega\to 0}\hat{f}(\omega)\right).$$

而利用熟知的结果 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{sgn}(a)\frac{\pi}{2}$，可以求得它的逆变换为

$$F^{-1}[\hat{f}]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega=\frac{h}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(\omega\delta)}{\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{2h}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\omega\delta)}{\omega}\cos(\omega x)\mathrm{d}\omega=\begin{cases}h, & |x|<\delta,\\ \frac{h}{2}, & x=\pm\delta\\ 0, & |x|>\delta.\end{cases}$$

假设定理 16.4.1 条件成立，将 Fourier 积分的实部和虚部分开，

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega(x-t)\mathrm{d}t$$
$$+\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega(x-t)\mathrm{d}t,$$

因

$$g_s(\omega)\xlongequal{\text{def}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega(x-t)\mathrm{d}t$$

是奇函数，而

$$g_c(\omega)\xlongequal{\text{def}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega(x-t)\mathrm{d}t$$

是偶函数，由此得到 $f(x)$ 的 **Fourier 积分的三角形式**(也称为**实形式**).

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega(x-t)\mathrm{d}t.$$

当 $f(x)$ 本身是偶函数时，上式可化成

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}f(t)\cos\omega t\mathrm{d}t\right]\cos\omega x\mathrm{d}\omega$$

(留作习题)，它可以看成是由 **Fourier 余弦变换**

$$F_c[f] = \hat{f}_c(\omega) = \int_0^{+\infty} f(x)\cos\omega x\mathrm{d}x$$

及其逆变换

$$F_c^{-1}[\hat{f}] = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\hat{f}(\omega)\cos\omega x\mathrm{d}\omega$$

复合而成的.

当 $f(x)$ 本身是奇函数时,可以类似地得到

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty} f(t)\sin\omega t\mathrm{d}t\right]\sin\omega x\mathrm{d}\omega,$$

以及 **Fourier 正弦变换**

$$F_s[f] = \hat{f}_s(\omega) = \int_0^{+\infty} f(x)\sin\omega x\mathrm{d}x$$

和它的逆变换

$$F_s^{-1}[\hat{f}] = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\hat{f}(\omega)\sin\omega x\mathrm{d}\omega.$$

例 16.4.2 求 $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin x\,(x\in[0,+\infty))$ 的余弦变换.

解 由 Fourier 余弦变换公式,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\sin x\cos\omega x\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}[\sin(1+\omega)x + \sin(1-\omega)x]\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\mathrm{e}^{-x}[\sin(1+\omega)x + (1+\omega)\cos(1+\omega)x]}{1+(1+\omega)^2}\right.\\
&\quad\left. - \frac{\mathrm{e}^{-x}[\sin(1-\omega)x + (1-\omega)\cos(1-\omega)x]}{1+(1-\omega)^2}\right\}\Bigg|_0^{+\infty}\\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{1+\omega}{1+(1+\omega)^2} + \frac{1-\omega}{1+(1-\omega)^2}\right\} = \frac{2-\omega}{4+\omega^4}.
\end{aligned}$$

Fourier 变换的性质

Fourier 变换的下列性质对于理论分析和实际计算都很有用.

定理 16.4.2 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的 Fourier 变换都存在,则有

(1)(**线性性**)$F[c_1 f + c_2 g] = c_1\hat{f}(\omega) + c_2\hat{g}(\omega)$($c_1$、$c_2$ 是常数);

(2)(**时间尺度性**) $F[f(ax)] = \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$;

(3)(**频率尺度性**) $F\left[\frac{1}{a}f\left(\frac{x}{a}\right)\right] = \hat{f}(a\omega)$;

(4)(**时间平移性**) $F[f(x - x_0)] = \hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x_0}$;

(5)(**频率平移性**) $F[f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 x}] = \hat{f}(\omega - \omega_0)$.

证明留给读者作为习题.

为了导出 Fourier 变换与微分和积分有关的性质,先引入卷积的概念.

定义 16.4.1 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上定义,且积分

$$(f*g)(x) \xlongequal{\text{def}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\mathrm{d}t$$

存在,则称 $f*g$ 为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的**卷积**.

显然,卷积具有对称性,即 $f*g = g*f$.

定理 16.4.3(卷积的 Fourier 变换和 Fourier 变换的卷积) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上绝对可积,它们的 Fourier 变换都存在,则有

(1) $F[f*g] = F[f]\cdot F[g]$;

(2) $F[f\cdot g] = \dfrac{1}{2\pi}F[f]*F[g]$.

证 对(1),由定义,

$$F[f*g] = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x,$$

因为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 绝对可积,积分次序可以交换,即有

$$\begin{aligned}F[f*g] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t\\&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(x-t)}\mathrm{d}(x-t)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\\&= F[g]\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = F[f]\cdot F[g].\end{aligned}$$

利用 Fourier 逆变换的定义可以类似证明(2).

证毕

定理 16.4.4(导数的 Fourier 变换和 Fourier 变换的导数)

(1) 设 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的 Fourier 变换都存在,且 $f(\pm\infty) = 0$,则有

$$F[f'] = \mathrm{i}\omega\cdot F[f];$$

(2) 设 $f(x)$ 和 $xf(x)$ 的 Fourier 变换都存在,则有

$$F[-\mathrm{i}x\cdot f] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F[f].$$

证 对(1),由分部积分公式,

$$\begin{aligned}F[f'] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x\\&= f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \mathrm{i}\omega\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x\\&= \mathrm{i}\omega\cdot F[f].\end{aligned}$$

而对(2),则有

$$F[-\mathrm{i}x\cdot f]=\int_{-\infty}^{+\infty}-\mathrm{i}xf(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}[f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}]\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}F[f].$$

证毕

利用定理 16.4.3，可以得到 Fourier 变换的 Parseval 等式（也称能量恒等式）.

定理 16.4.5 设 $f(x)$ 的 Fourier 变换存在，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[f(x)]^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(\omega)|^2\mathrm{d}\omega$$

证明留作习题.

今后学习其它课程（如偏微分方程、控制理论、计算方法等）时会知道，定理 16.4.3 ~ 定理 16.4.5 的作用非常重要. 下面举一个简单例子.

例 16.4.1 设已知函数 $f(x)$ 满足定理 16.4.1 的条件，未知函数 $u(x)$ 满足定理 16.4.4 中(1) 的条件，求解微分方程

$$au''(x)-u(x)=f(x)\quad(a>0,x\in(-\infty,\infty)).$$

解 由定理 16.4.4.

$$F[u'']=\mathrm{i}\omega F[u']=-\omega^2F[u].$$

对方程两边作 Fourier 变换，整理后即有

$$F[u]=\frac{1}{a+\omega^2}F[f].$$

利用习题4(1) 的结果 $F[\mathrm{e}^{-a|x|}]=\left[\frac{1}{a+\omega^2}\right]$ $(a>0)$ 和定理16.4.3的结论，

$$u(x)=F^{-1}\left[\frac{1}{a+\omega^2}\cdot F[f]\right]=F^{-1}\left[\frac{1}{a+\omega^2}\right]*F^{-1}[F[f]]$$
$$=f*\mathrm{e}^{-a|x|}=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-a|x-t|}\mathrm{d}t.$$

下面我们指出几点：

1. 实形式

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega(x-t)\mathrm{d}t$$

本可以由实数形式的 Fourier 级数按上述思想直接导出（留作习题），这里之所以舍近求远，先化成复数形式再兜回来，是因为复数形式的 Fourier 级数和 Fourier 积分具有重要的实际应用价值. 在许多领域，如热学、声学、光学、电工学、核物理学等等，都需要对复函数的频率 $\omega_n=\frac{n\pi}{T}$ 和振幅 $|c_n|=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$

进行计算、分析(称为频谱分析)、叠加、滤波等处理,因而复数表达形式对于简化处理过程有着独到的优越性.

2. 周期函数实际上就是频率为 $\omega=\dfrac{\pi}{T}$ 的振荡函数. Fourier 级数

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x)=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{in\omega x}$$

揭示了,$f(x)$ 可以通过频率为 ω(称为基频)的正弦波 $\sin\omega x$ 和 $\cos\omega x$(称为基波)及其 n 次谐波 $\sin n\omega x$、$\cos n\omega x$ 叠加来得到,而谐频为 $n\omega$ 的谐波的振幅

$$\sqrt{a_n^2+b_n^2}=|c_n|=\frac{1}{T}\left|\int_{-T}^{T}f(x)e^{-in\omega x}dx\right|$$

可理解成该谐波在整体中的强度.

对于非周期函数,即 $T\to+\infty$ 的情况,这时基频 $\omega\to 0$,因此谐频由离散的 $\{n\omega\}$ 趋向于布满整个实数轴,或者可以说,此时任何一个实数(仍记为 ω)都是它的"谐频". 因此,Fourier 变换

$$f(x)\sim\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega x}d\omega=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\hat{f}(\omega)}{\pi}e^{i\omega x}d\omega$$

同样表示 $f(x)$ 可由频率为 ω 的"谐波"叠加而成,$\dfrac{\hat{f}(\omega)}{\pi}$ 也应是相应的振幅.

而换一个角度,从 Fourier 变换的定义来看,由于

$$\frac{|\hat{f}(\omega)|}{\pi}=\frac{1}{\pi}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx\right|=\lim_{T\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{T}\left|\int_{-T}^{T}f(x)e^{-i\omega x}dx\right|}{\Delta\omega},$$

与 $|c_n|$ 的表达式比较,说明它确实能看成相应于频率 ω 的谐波在整体中的某种"强度",与上面的结论相吻合.(请读者思考,这里用 $\Delta\omega$ 除一下的用意何在.)

上面的解释有助于理解 Fourier 变换的物理意义.

3. Fourier 级数和 Fourier 积分在理论及具体处理上同出一源,读者很容易发现它们之间的内在联系(见下表),我们应该将两者结合起来理解和记忆.

非周期函数	周期函数(设周期为 2π)
Fourier 变换 $\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx$	Fourier 系数 $c_n=a_n-ib_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx$

非周期函数	周期函数(设周期为 2π)
Fourier 逆变换 $f(x) \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega x}d\omega$	Fourier 级数 $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$ $= \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$
Fourier 积分;指数形式 $f(x) \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i\omega(x-t)}dt$ 三角形式 $f(x) \sim \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega(x-t)dt$	Fourier 级数的积分形式 $f(x) \sim \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\cos n(t-x)\right]dt$
Fourier 余弦变换 $\hat{f}_c(\omega) = \int_{0}^{+\infty}f(x)\cos\omega x dx$ 逆变换 $f(x) \sim \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\hat{f}_c(\omega)\cos\omega x d\omega$	Fourier 余弦级数系数, $a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx dx$, 余弦级数 $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$
Fourier 余弦积分 $f(x) \sim \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{0}^{+\infty}f(t)\cos\omega t dt\right]\cos\omega x d\omega$	(相当于将 a_n 表达式代入余弦级数)
Fourier 正弦变换 $\hat{f}(\omega) = \int_{0}^{+\infty}f(x)\sin\omega x dx$ 逆变换 $f(x) \sim \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\hat{f}_s(\omega)\sin\omega x d\omega$	Fourier 正弦级数系数 $b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nx dx$ 正弦级数 $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$
Fourier 正弦积分 $f(x) \sim \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{0}^{+\infty}f(t)\sin\omega t dt\right]\sin\omega x d\omega$	(相当于将 b_n 表达式代入正弦级数)

习　　题

1. 用实数形式的 Fourier 级数直接导出 Fourier 积分的三角形式

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega(x-t)dt.$$

2. 证明定理 16.4.2 给出的 Fourier 变换的性质.

3. (1) 证明 $f(x)$ 是偶函数时的 Fourier 积分

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t\right]\cos\omega x\,\mathrm{d}\omega$$

(2) 证明 $f(x)$ 是奇函数时的 Fourier 积分

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t\right]\sin\omega x\,\mathrm{d}\omega.$$

4. 求下列定义在$(-\infty,\infty)$的函数的 Fourier 变换:

(1) $f(x)=\mathrm{e}^{-a|x|}\quad(a>0)$; (2) $f(x)=\mathrm{e}^{-ax^2}\quad(a>0)$

(3) $f(x)=x\mathrm{e}^{-ax^2}\quad(a>0)$; (4) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$;

(5) $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-2x}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}$; (6) $f(x)=\mathrm{e}^{-|x|}\cos x$;

(7) $f(x)=\mathrm{e}^{-a|x|}\sin x(a>0)$; (8) $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & |x|<1,\\ 0, & |x|\geqslant 1;\end{cases}$

(9) $f(x)=\begin{cases}A\sin\omega_0 x, & |x|\leqslant\delta,\\ 0, & |x|>\delta\end{cases}$ ($\omega_0\neq 0$ 是常数, $\delta=\frac{\pi}{\omega_0}$).

5. 求 $f(x)=\mathrm{e}^{-ax}(x\in[0,\infty),a>0)$ 的正弦变换和余弦变换.

6. 利用定理 16.4.4 的结论导出 $F[\int f(x)\mathrm{d}x]$ 的表达式.

7. 证明 Fourier 变换的 Parseval 等式(定理 16.4.5).

§5 快速 Fourier 变换

离散 Fourier 变换

人们刚开始利用无线电技术传输信号时,是将连续信号进行某种调制处理后直接传送的(图 16.5.1),本质上传送的还是连续信号(也叫模拟信号).这样的传输方式抗干扰能力差,失真严重,尤其是经过长距离传送或多级传递后,信号可能面目全非,质量自然难尽人意.

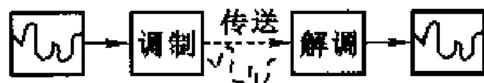


图 16.5.1

以后发展了离散的传输方法,它不是传送连续信号本身,而是每隔一段时间 Δt,从信号中提取一个数值脉冲(称为数值抽样),将连续信号转化成数据序列 $x(0),x(1),x(2),\cdots,x(N-1)$(图 16.5.2),再经编码后发送.只要抽取的时间间隔足够小,这列数据就能很好地反映原信号,接收方通过逆向处理,可以复原出所传递的信号(图 16.5.3).这种方法称为数字信号传输,具有

抗干扰能力强、信号还原质量高、易于加密和解密等优点,问世后便受到广泛的重视,至今方兴未艾.

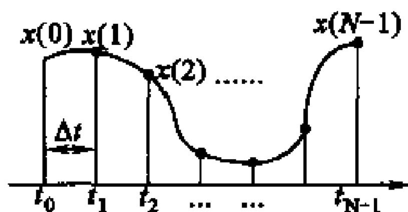


图 16.5.2

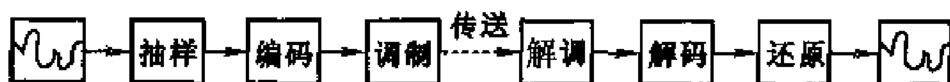


图 16.5.3

可以想见的是,为了保证接收的质量,Δt 必须取得很小,即 N 非常之大.因此,直接发送这列数据将会长时间地占用传输设备和线路,这不但需要支付昂贵的费用,在情况紧急时甚至会误事.

所以,在抽样之后需要对数据序列 $x(0), x(1), \cdots, x(N-1)$ 进行简化和压缩,但由于序列中数据的大小是散乱的,因此一方面我们不能随意舍弃某些数据,另一方面压缩的效果也比较差.

后来经研究发现,若对数据序列 $x(0), x(1), \cdots, x(N-1)$ 施以如下的**离散 Fourier 变换**

$$X(j) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} \frac{nj}{N}} \quad (j = 0,1,2,\cdots,N-1, \mathrm{i} = \sqrt{-1}),$$

就可以有效地解决上面的问题.(所以称它为"离散 Fourier 变换",在于它可以看成是 Fourier 变换 $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x} \mathrm{d}x$ 的一种离散的形式,见本节习题 1.)

利用正交关系式

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} \frac{nj}{N}} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \frac{nk}{N}} = \delta_{j,k} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

(请读者自证),可以导出**离散 Fourier 逆变换**

$$x(k) = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} X(j) \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \frac{jk}{N}}, \quad (k = 0,1,2,\cdots,N-1),$$

这是因为

$$\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}X(j)e^{2\pi i\frac{jk}{N}}=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-2\pi i\frac{nj}{N}}e^{2\pi i\frac{jk}{N}}$$
$$=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\left[\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}e^{-2\pi i\frac{nj}{N}}e^{2\pi i\frac{jk}{N}}\right]$$
$$=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\delta_{n,k}=x(k).$$

也就是说,若发送方将 $x(0),x(1),\cdots,x(N-1)$ 做了离散 Fourier 变换后传输出去,接收方可以对收到的数据进行离散 Fourier 逆变换,再现原始信号.

从表面看来,这么做似乎毫无必要,因为变换后的数据长度仍是 N,并没有缩短,况且还要额外支出两次变换的代价,其实不然.

从变换公式容易看出,变换后的序列中的每个 $X(j)$,都包含了原序列中所有信号的信息.因此,即使丢失了某些 $X(j)$,仍可望由其余数据基本正确地还原出原始数据.这当然使得传输过程的抗干扰能力进一步提高,但更重要的是,这可以让我们通过有意剔除某些其模较小的数据(通常这类数据数量很大)而使需传输的序列大为缩短.此外,$X(0),X(1),\cdots,X(N-1)$ 的排列将很有规律,模较大的数据往往集中在序列中一两个较狭窄的范围内,易于作高效的压缩处理.

例 16.5.1 对长度为64的序列 $\{x(k)\}$ 做离散 Fourier 变换,其取值如图16.5.4(a) 中的"+"所示,变换后的 $X(j)$ 的模用"o"表示(为了看得清楚,已做了适当比例的压缩).

从图中可以看到,$\{x(k)\}$ 的变化很大,有高低不同的四个起伏.但做了 Fourier 变换后,$\{|X(j)|\}$ 只是在序列的起首和终止处附近有两个高的起伏,而处于序列中部的数据,其模的波动范围是不大的.也就是说,$\{X(j)\}$ 排列确实很有规律,易于作进一步的处理.

此外,我们还发现,$\{X(j)\}$ 中约有三分之一的点(虚线以下)的模接近于零.现在我们将这些点全部强行置为零后,再对整个序列进行 Fourier 逆变换,这相当于在序列中删除了这些数据后再传输出去,让对方仅用剩下的那部分模较大的数据进行逆变换.图 16.5.4(b) 显示了所得的结果,这里 $\{x(k)\}$ 仍用"+"表示,逆变换后得到的相应值用"o"表示,我们发现,除了极个别点误差稍大之外,两者的近似程度是相当令人满意的.

快速 Fourier 变换

尽管早就发现离散 Fourier 变换有如此诱人的好处,但在一个相当长的时期中,人们还只基本上限于纸上谈兵.这是因为,做一次变换需要进行 N^2 次复数乘法和 $N(N-1)$ 次复数加法,而实际使用中的 N 总是极为巨大的,相应的高昂代价令人望而却步.

一直到20世纪60年代中期,Cooley和Tukey发现了计算离散Fourier变换的高效(同时又特别适合于计算机硬件操作)的方法 —— **快速 Fourier 变换**(简称 **FFT**—Fast Fourier

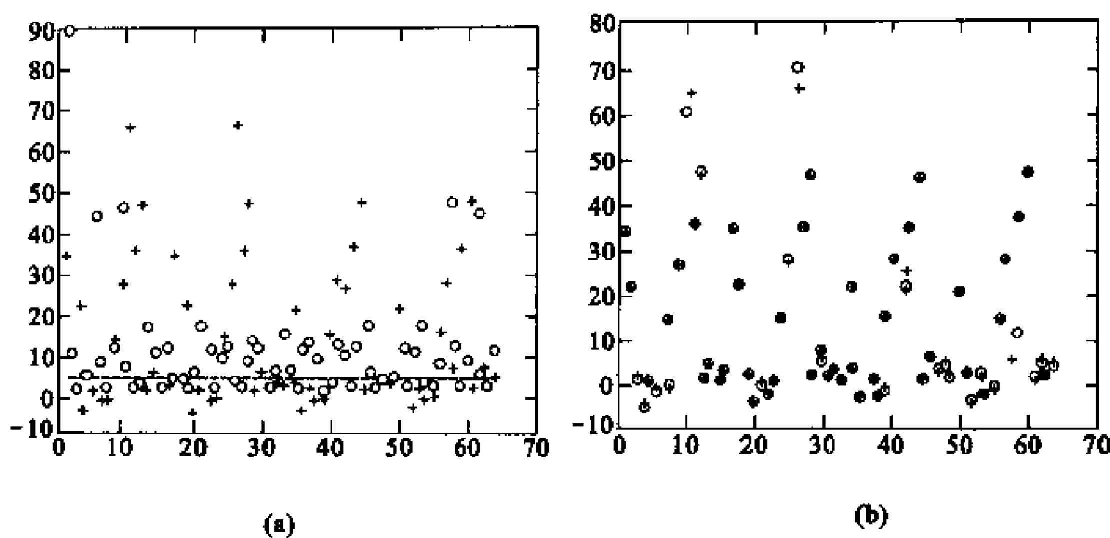


图 16.5.4

Transform) 之后，它才真正获得了生命力．可以毫不夸张地说，基于 FFT 的离散 Fourier 变换技术，是当今信息传输(图 16.5.5)、频谱分析、图象处理、数据压缩等领域中最重要的数学工具之一．目前，国际上任何一个综合的数学软件中，必定含有 FFT 的计算程序．

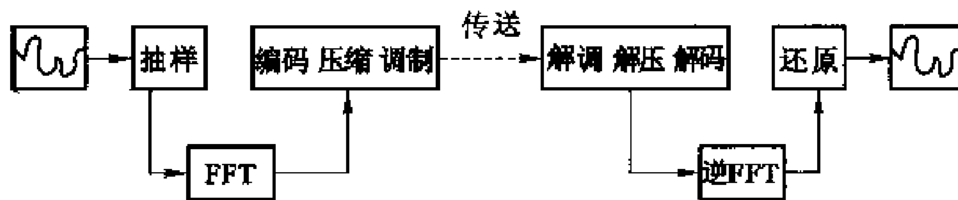


图 16.5.5

下面对 FFT 的思想作一简单介绍(由于逆 FFT 的形式与 FFT 完全相同，因此所有的方法和结论都可以平行地用到逆 FFT 上去)．

设 $N = 2m$，将 j 和 n 分别改写成

$$j = mj_1 + j_0, \quad \begin{cases} j_0 = 0,1,\cdots,m-1, \\ j_1 = 0,1 \end{cases}$$

和

$$n = 2n_1 + n_0, \quad \begin{cases} n_0 = 0,1, \\ n_1 = 0,1,\cdots,m-1, \end{cases}$$

记 $W_N = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$，则

$$W_N^2 = e^{-\frac{2\pi i}{m}} = W_m,\ W_N^m = e^{-\pi i} = -1,\ W_N^{2m} = W_N^N = 1.$$

而

$$\begin{aligned} e^{-2\pi i\frac{nj}{N}} &= (W_N)^{nj} = (W_N)^{(2n_1+n_0)(mj_1+j_0)} \\ &= (W_N)^{2mn_1j_1}(W_N)^{mn_0j_1}(W_N)^{2n_1j_0}(W_N)^{n_0j_0} \end{aligned}$$

$$= (-1)^{n_0 j_1} \cdot (W_m)^{n_1 j_0} \cdot (W_N)^{n_0 j_0}.$$

将上式代入离散 Fourier 变换公式,并记 $X(j)$ 为 $X(j_1, j_0)$,

$$\begin{aligned} X(j) = X(j_1, j_0) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-2\pi i \frac{nj}{N}} \\ &= \sum_{n_1=0}^{m-1} \sum_{n_0=0}^{1} x(2n_1 + n_0)(-1)^{n_0 j_1} \cdot (W_m)^{n_1 j_0} \cdot (W_N)^{n_0 j_0} \\ &= \sum_{n_0=0}^{1} (-1)^{n_0 j_1} \left[(W_N)^{n_0 j_0} \sum_{n_1=0}^{m-1} x(2n_1 + n_0)(W_m)^{n_1 j_0} \right], \end{aligned}$$

将方括号中的部分记为 $z(n_0, j_0)$,则计算 $X(j)(j = 0,1,2,\cdots,N-1)$ 可分解为两个步骤进行:

$$\begin{cases} z(n_0, j_0) = (W_N)^{n_0 j_0} \sum\limits_{n_1=0}^{m-1} x(2n_1 + n_0)(W_m)^{n_1 j_0} \\ \qquad\qquad (n_0 = 0,1, \quad j_0 = 0,1,\cdots,m-1), \\ X(j_1, j_0) = \sum\limits_{n_0=0}^{1} (-1)^{n_0 j_1} \cdot z(n_0, j_0) \\ \qquad\qquad (j_1 = 0,1, \quad j_0 = 0,1,\cdots,m-1). \end{cases}$$

实际处理数据时,因子 $(W_m)^{n_1 j_0}$ 和 $(W_N)^{n_0 j_0}$ 都是事先算好存储在计算机内的.因此,在第一式中,每一个 $z(n_0, j_0)$ 需要进行 m 次复数乘法和 $m-1$ 次复数加法,第二式中,每一个 $X(j_1, j_0)$ 只需要做 $m-1$ 次复数加法而不需要做复数乘法,所以总共需要做 mN 次复数乘法和 $2(m-1)N$ 次复数加法.

若 $N = 2^k$,则 $m = 2^{k-1}$ 仍是偶数,因此可对第一式中的

$$\sum_{n_0=0}^{m-1} x(2n_1 + n_0)(W_m)^{n_1 j_0}$$

继续进行上述处理,以进一步减少计算量.这样一种反复递减,直到 $m = 2$ 为止的过程称为以 2 为底的快速 Fourier 变换.(附带说明,任何一个大于 1 的自然数都可以作为快速 Fourier 变换的底,在同一个计算过程中还可以混合使用多个底数,参见习题.)

容易推导出,对 $N = 2^k$,执行一个以 2 为底的完整的 FFT,只需要进行 $\frac{kN}{2} = \frac{1}{2}N \log_2 N$ 次复数乘法和 $kN = N\log_2 N$ 次复数加法.由于

$$\frac{\log_2 N}{N} \to 0 \ (N \to \infty),$$

因此它比原来需要 N^2 次运算的直接算法在数量级上有了重大改进,节省的工作量相当惊人,比如,对 $N = 2^{10} = 1\,024$(对于实际问题来讲,这仅是一个很小的数字),原算法的复数乘法次数就超过 FFT 的 200 倍!

FFT 还为离散 Fourier 变换开拓出了许多新的用途,计算数列的卷积就是一个典型的例子.

设 $\{x(k)\}_{k=0}^{N-1}$ 和 $\{y(k)\}_{k=0}^{N-1}$ 都是实的或复的数列,定义它们的卷积为

$$x(k)*y(k)\xlongequal{\text{def}}\sum_{j=0}^{N-1}x(j)y(k-j)=z(k)\quad(k=0,1,\cdots,N-1),$$

(当序号不属 0 到 $N-1$ 范围时,规定 $x(k\pm N)=x(k)$ 和 $y(k\pm N)=y(k)$.) 这与上一节中定义的函数的卷积是很相似的.

显然,若直接按上式计算,要得到 $\{z(k)\}_{k=0}^{N-1}$ 总共约需做$2N^2$次运算,其中加法和乘法基本上各占一半.这与用直接方法做一次离散 Fourier 变换的计算量是相同的,并非是一种有效的方法.

考虑到函数的卷积与Fourier变换的关系,可以猜想,数列的卷积可能与离散Fourier变换会有类似的关系.若果真是这样,那么 FFT 就可以在其中找到用武之地.

设$\{x(k)\}$ 和$\{y(k)\}$ 的离散 Fourier 变换分别为$\{X(j)\}_{j=0}^{N-1}$ 和$\{Y(j)\}_{j=0}^{N-1}$,即

$$X(j)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)(W_N)^{nj},\quad Y(j)=\sum_{m=0}^{N-1}y(m)(W_N)^{mj},$$

则它们对应项相乘为

$$X(j)Y(j)=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}x(n)y(m)(W_N)^{(n+m)j},$$

利用

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(W_N)^{nj}(W_N)^{-nk}=\delta_{j,k},$$

于是,数列$\{X(j)Y(j)\}_{j=0}^{N-1}$ 的离散 Fourier 逆变换为

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}X(j)Y(j)e^{2\pi i\frac{jk}{N}}\\
=&\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\Big[\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}x(n)y(m)(W_N)^{(m+n)j}\Big](W_N)^{-kj}\\
=&\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}x(n)y(m)\Big[\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}(W_N)^{(m+n)j}(W_N)^{-kj}\Big]\\
=&\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}x(n)y(m)\delta_{m+n,k}\\
=&\sum_{n=0}^{N-1}x(n)y(k-n)=z(k).
\end{aligned}$$

这就是说,**两个数列卷积的离做 Fourier 变换,等于由这两个数列的离数 Fourier 变换的对应项乘积构成的数列**,请读者与定理 16.4.3 的结论加以比较.

于是,计算$\{x(k)\}$ 和$\{y(k)\}$ 的卷积$\{z(k)\}$ 的过程可以分成三步:

(1) 分别做$\{x(k)\}$ 和$\{y(k)\}$ 的离散 Fourier 变换$\{X(j)\}$ 和$\{Y(j)\}$;

(2) 求 $X(j)Y(j)$ $(j=0,1,\cdots,N-1)$;

(3) 做$\{X(j)Y(j)\}$ 的离散 Fourier 逆变换,得到$\{z(k)\}$.

上述过程需要两次离散 Fourier 变换和一次离散 Fourier 逆变换(步骤(2) 中的乘法计算量可以忽略不计),若用直换计算的方法做变换,总计算量将达到直接求卷积时的三倍,无疑是大大地划不来.因此尽管这个结果早就为人所知,但在 FFT 问世之前,就实际问题计算而言,从来就是无人问津的.

有了FFT之后情况立即改观.因(1)和(3)用FFT做,总共只需$4.5N\log_2 N$次运算,其中仅三分之一为乘法,而(2)只需$2N$次运算,所以虽说是绕了一个圈子,计算量反倒大为减少,并且,当N很大时,减少的数目是相当可观的.

由FFT方法出发,产生了很大一类基于卷积计算的快速算法.比如,要计算两个n次多项式$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$和$q_n(x)=\sum_{k=0}^{n}b_kx^k$的乘积

$$r_{2n}(x)=p_n(x)q_n(x)=\sum_{k=0}^{2n}c_kx^k$$

(次数不一样时,可将高次幂的系数视为0),直接求系数

$$c_k=\sum_{j=0}^{n}a_jb_{k-j}\quad(k=0,1,\cdots,2n),$$

将是事倍功半的.若观察到c_k的形式与卷积非常相象,进而令数列$\{A(k)\}$和$\{B(k)\}$分别为

$$A(k)=\begin{cases}a_k, & 0\leqslant k\leqslant n,\\ 0, & n<k\leqslant 2n,\end{cases}$$

$$B(k)=\begin{cases}b_k, & 0\leqslant k\leqslant n,\\ 0, & n<k\leqslant 2n,\end{cases}$$

则不难验证$\{c_k\}$正是$\{A(k)\}$和$\{B(k)\}$的卷积,于是前面关于卷积的高效的计算方案可以毫不走样地全部照搬——这就是求多项式乘积的快速算法.

求两个级数的Cauchy乘积的处理是类似的,某些类型的矩阵乘法也可以从卷积入手导出快速算法,这里不再一一介绍了.

习　题

1. 说明离散 Fourier 变换 $X(j)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-2\pi i\frac{nj}{N}}$ 可以看成 Fourier 变换

$$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx$$

的离散近似形式的推广.

(提示:先将圆频率ω写成频率形式$2\pi s$,再对充分大的N,在区间$[-N,N]$以间隔Δx对被积函数抽样(参见图16.5.2),在每个小区间内利用矩形公式近似代替积分,则

$$\hat{f}(\omega)=\int_{-N}^{N}f(x)e^{-2\pi sxi}dx\approx\sum_{n=-M}^{M}f(n\Delta x)e^{-2\pi s(n\Delta x)i}\Delta x,$$

再适当代换整理,就可以得到离散 Fourier 变换形式.)

2. 证明正交关系式

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}e^{-2\pi i\frac{nj}{N}}e^{2\pi i\frac{nk}{N}}=\delta_{j,k}.$$

3. 对离散 Fourier 变换导出并证明类似定理 16.4.2 的性质.

4. 证明离散 Fourier 变换的 Parseval 等式

$$\sum_{k=0}^{N-1} |x(k)|^2 = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} |X(j)|^2.$$

5. 设 $N = pq\ (p, q \in N)$,构造只需 $O((p+q)N)$ 次运算的 Fourier 变换算法.

6. 对 $N = 2^3$,具体写出以 2 为底的 FFT 的计算流程.

计算实习题

(在教师的指导下,编制程序在电子计算机上实际计算)

1. 利用现成的数学通用软件(如MATLAB、Mathematica、Maple等),对于 $N = 32, 64, 128$:

(1) 生成实数序列 $\{x(k)\}_{k=0}^{N-1}$;

(2) 用 FFT 计算 $\{x(k)\}_{k=0}^{N-1}$ 的离散 Fourier 变换序列 $\{X(j)\}_{j=0}^{N-1}$;

(3) 作出 $\{x(k)\}$ 和 $\{|X(j)|\}$ 的图并进行分析(参见图 16.5.4);

(4) 设定 $\delta_0 > 0$,将 $\{|X(j)|\}$ 中满足 $|X(j)| < \delta_0$ 的数据全部置为零,再进行离散 Fourier 逆变换,将得到的数据与 $\{x(k)\}$ 比较;

(5) 改变 δ_0 的值,重复(4),分析不同的 δ_0 对逆变换所得到的数据的影响.

2. 对于 $N = 32, 64, 128$,

(1) 产生两个实数序列 $\{x(k)\}_{k=0}^{N-1}$ 和 $\{y(k)\}_{k=0}^{N-1}$;

(2) 用直接方法计算 $\{x(k)\}$ 和 $\{y(k)\}$ 的卷积 $\{z(k)\}_{k=0}^{N-1}$;

(3) 改用离散 Fourier 变换的思想,用 FFT 计算 $\{z(k)\}$;

(4) 结合 N 比较两种算法所用的时间.

3. 用 FFT 计算多项式 $\sum\limits_{n=0}^{m}\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{m}\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ 的乘积,并与 $\dfrac{\sin 2x}{2}$ 的 Taylor 级数的相应项比较.

索　引

（名词后面所标数字分别为首次出现的章和节）

B

C

D

第一章

第 1 节

4.（1）$\{x \mid -2 < x \le 3\}$；

（2）$\{(x, y) \mid x > 0 \text{且} y > 0\}$；

（3）$\{x \mid 0 < x < 1 \text{且} x \in Q\}$；

（4）$\left\{x \mid x = k\pi + \dfrac{\pi}{2}, k \in Z\right\}$.

7.（1）不正确。$x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \text{或者} x \notin B$；

（2）不正确。$x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \text{并且} x \notin B$.

第 2 节

2.（1）$f : [a,b] \to [0,1]$

$$x \mapsto y = \frac{x-a}{b-a}.$$

（2）$f : (0,1) \to (-\infty,+\infty)$

$$x \mapsto \tan[(x - \frac{1}{2})\pi]$$

3.（1）$y = \log_a(x^2 - 3)$，定义域：$\left(-\infty,-\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3},+\infty\right)$，值域：$(-\infty,+\infty)$；

（2）$y = \arcsin 3^x$，定义域：$\left(-\infty,0\right]$，值域：$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$；

（3）$y = |\tan x|$，定义域：$\bigcup\limits_{k \in Z}\left(k\pi - \dfrac{\pi}{2}, k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)$，值域：$[0,+\infty)$；

（4）$y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$，定义域：$\left(-\infty,-1\right) \cup \left[1,+\infty\right)$，值域：$[0,1) \cup (1,+\infty)$.

5.（1）定义域：$\bigcup\limits_{k \in Z}\left(2k\pi,(2k+1)\pi\right)$，值域：$\left(-\infty,0\right]$；

（2）定义域：$\bigcup\limits_{k \in Z}\left[2k\pi - \dfrac{\pi}{2}, 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right]$，值域：$[0,1]$；

（3）定义域：$[-4,1]$，值域：$\left[0,\frac{5}{2}\right]$；

（4）定义域：$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，值域：$\left[\frac{3\sqrt[3]{2}}{2},+\infty\right)$.

7．（1）$f(x)=2x^3-21x^2+77x-97$；

（2）$f(x)=\frac{2x+1}{4x-1}$。

8．（1）$f\circ f(x)=\frac{x+1}{x+2}$；

$f\circ f\circ f(x)=\frac{x+2}{2x+3}$；

$f\circ f\circ f\circ f(x)=\frac{2x+3}{3x+5}$。

9．$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}$，$\frac{f(x)+f(-x)}{2}$是偶函数，$\frac{f(x)-f(-x)}{2}$是奇函数.

10．$y=\begin{cases}-4x+3 & x\in[0,1]\\ \frac{3}{2}x-\frac{5}{2} & x\in(1,3]\\ -2x+8 & x\in(3,4]\end{cases}$

11．$y=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2 & x\in[1,2]\\ -\frac{1}{2}x^2+2x-1 & x\in(1,2]\end{cases}$

12．$P(x)=\begin{cases}78.4x & x\in[0,5]\\ 98x-98 & x\in(5,9]\\ 1332.8x-11211.2 & x\in(9,11]\end{cases}$

13．$f(x)=\begin{cases}x & x\text{为有理数}\\ 1-x & x\text{为无理数}\end{cases}$

第二章

第 1 节

1．（1）反证法。若$\sqrt{6}$是有理数，则可写成既约分数$\sqrt{6}=\frac{m}{n}$。由$m^2=6n^2$，可知m是偶数，设$m=2k$，于是有$3n^2=2k^2$，从而得到n是偶数，这与$\frac{m}{n}$是既约分数矛盾.

（2）提示：利用（1）的结论.

第 2 节

1．（5）提示：$\frac{n^2}{3^n}<\frac{n^2}{(1+2)^n}<\frac{n^2}{2^3C_n^3}$；

（6）提示：当$n>5$，有 $\frac{3^n}{n!}\le\frac{3^5}{5!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}$；

（7）提示：记$\frac{n}{2}$的整数部分为m，则有$\frac{n!}{n^n}<\left(\frac{1}{2}\right)^m$；

（8）提示：证明不等式$0<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n}<\frac{1}{n}$.

6．提示：证明并利用不等式$\left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right|\le\sqrt{|x-a|}$.

8．（1）1；（2）1；（3）2；（4）0，提示：应用不等式$2k>\sqrt{(2k-1)(2k+1)}$.

9．（1）3；（2）$\frac{1}{2}$；（3）$\frac{1}{3}$；（4）0；（5）$\frac{1}{2}$；（6）$-\frac{1}{2}$；（7）0；（8）$\frac{1}{2}$；（9）1；

（10）3，提示：设 $x_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$，则 $2x_n=1+\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}\cdots+\frac{2n-1}{2^{n-1}}$，

两式相减，得到 $x_n=1+2(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}})-\frac{2n-1}{2^n}$.

11．提示：$\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}}$.

12．（1）提示：设$a_1+a_2+\cdots+a_n=S_n$，则$\sum_{k=1}^{n}ka_k=nS_n-\sum_{k=1}^{n-1}S_k$，再利用例 2.2.6 的结论；

（2）提示：利用定理 1.2.2 与（1）.

13．提示：令$a_n=a+\alpha_n,b_n=b+\beta_n$.

14．提示：注意有 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n}=a$.

第 3 节

2．（1）提示：设 $\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty$，则 $\forall G>0,\exists N_1>0,\forall n>N_1:a_n>3G$。对固定的 N_1，

$\exists N>2N_1,\forall n>N:\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}}{n}\right|<\frac{G}{2}$，于是

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geq\frac{a_{N_1+1}+a_{N_1+2}+\cdots+a_n}{n}-\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}}{n}\right|>\frac{3G}{2}-\frac{G}{2}=G\text{ 。}$$

7．提示：记 $k=\lambda^{-1}$，则 $a_n+\lambda a_{n-1}+\cdots+\lambda^n a_0=\frac{k^n a_n+k^{n-1}a_{n-1}+\cdots+a_0}{k^n}$，再利用 Stolz 定理.

8．提示：作代换 $a_k=A_k-A_{k-1}$，得到

$$\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n}{p_n}=A_n-\frac{A_1(p_2-p_1)+A_2(p_3-p_2)+\cdots+A_{n-1}(p_n-p_{n-1})}{p_n},$$

再对后一分式应用 Stolz 定理.

第 4 节

1．（1）$\frac{1}{e}$；（2）e；（3）$\sqrt{e}$；（4）1；（5）e；提示：当 $n\geq 2$ 时，有

$$\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^n\leq\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

2．（1）依次证明 $x_n<2$，$\{x_n\}$ 单调增加，$\lim_{n\to\infty}x_n=2$；

（2）依次证明 $x_n<2$，$\{x_n\}$ 单调增加，$\lim_{n\to\infty}x_n=2$；

（3）依次证明 $x_n>-1$，$\{x_n\}$ 单调减少，$\lim_{n\to\infty}x_n=-1$；

（4）依次证明 $x_n<4$，$\{x_n\}$ 单调增加，$\lim_{n\to\infty}x_n=4$；

（5）依次证明 $0<x_n<1$，$\{x_n\}$ 单调减少，$\lim_{n\to\infty}x_n=0$；

（6）依次证明 $0<x_n<1$，$\{x_n\}$ 单调增加，$\lim_{n\to\infty}x_n=1$.

4．$\sqrt{2},-\sqrt{2}$；提示：对 $x_1=1$，依次证明对任意 n 有 $x_n>0$，当 $n\geq 2$ 时 $x_n\geq\sqrt{2}$ 及

$x_{n+1}-x_n=-\dfrac{x_n}{2}+\dfrac{1}{x_n}\le 0$，即$\{x_n\}$单调减少有下界；对$x_1=-2$，依次证明对任意$n$有

$x_n\le-\sqrt{2}$及$x_{n+1}-x_n=-\dfrac{x_n}{2}+\dfrac{1}{x_n}\ge 0$，即$\{x_n\}$单调增加有上界.

5．$\dfrac{a+2b}{3}$；提示：先求数列$\{x_{n+1}-x_n\}$的通项公式$x_{n+1}-x_n=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}(b-a)$，再利用

$x_n=x_1+(x_2-x_1)+(x_3-x_2)+\cdots+(x_n-x_{n-1})$.

6.（1）提示：$a\le x_n<x_{n+1}<y_{n+1}<y_n\le b$；

（2）提示：$n\ge 2$时，$\dfrac{2ab}{a+b}\le y_n<y_{n+1}<x_{n+1}<x_n\le\dfrac{a+b}{2}$.

7．$\sqrt{2}-1$；提示：数列$\{x_{2k}\}$单调增加，数列$\{x_{2k+1}\}$单调减少.

13.（2）提示：证明不等式$\left|\sum\limits_{k=n+1}^{m}(-1)^{k+1}\dfrac{1}{k}\right|<\dfrac{1}{n+1}$.

14.（1）反例：$x_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$；

（2）提示：$\forall m>n$，利用不等式$|x_m-x_n|\le|x_m-x_{m-1}|+|x_{m-1}-x_{m-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|$.

15．提示：利用 Cauchy 收敛原理.

16．提示：采用反证法。不妨设$\{x_n\}$是单调增加的有界数列。假设它不收敛，则

$\exists\varepsilon_0>0$，$\forall N>0$，$\exists m,n>N$：$|x_m-x_n|>\varepsilon_0$.

取$N_1=1,\exists m_1>n_1>N_1:x_{m_1}-x_{n_1}>\varepsilon_0$;

取$N_2=m_1,\exists m_2>n_2>N_2:x_{m_2}-x_{n_2}>\varepsilon_0$;

……

取$N_k=m_{k-1},\exists m_k>n_k>N_k:x_{m_k}-x_{n_k}>\varepsilon_0$;

…….

于是$x_{m_k}-x_{n_1}>k\varepsilon_0\to+\infty\ (k\to\infty)$，与数列$\{x_n\}$有界矛盾.

第三章

第 1 节

2.（1）$\frac{2}{3}$；（2）$\frac{1}{2}$；（3）$\frac{2}{3}$；（4）5；（5）n；（6）$\frac{1}{2}nm(n-m)$；（7）$\cos a$；（8）2；

（9）4；（10）$\frac{1}{2}$.

3.（1）提示：当$\frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n}$，则$\frac{n}{n+1}<x\left[\frac{1}{x}\right]\le 1$；

$$\text{当}-\frac{1}{n}<x\le-\frac{1}{n+1}\text{，则}1\le x\left[\frac{1}{x}\right]<\frac{n+1}{n}.$$

（2）提示：当$n\le x<n+1$，则$n^{\frac{1}{n+1}}<x^{\frac{1}{x}}<(n+1)^{\frac{1}{n}}$.

4.（1）提示：$0<\frac{x^k}{a^x}<\frac{([x]+1)^k}{a^{[x]}}$，利用$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^k}{a^n}=0$；

（2）提示：令$\ln x=t$，再利用（1）的结论.

5.（1）$\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=\frac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to 2-}f(x)=4$，$\lim\limits_{x\to 2+}f(x)=4$；

（2）$\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=-1$，$\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=1$；

（3）$D(x)$在任意点无单侧极限；

（4）$\lim\limits_{x\to\frac{1}{n}-}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to\frac{1}{n}+}f(x)=1$.

6.（1）0；（2）不存在；（3）$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\alpha}\sin\frac{1}{x}=\begin{cases}0 & \alpha<1\\ 1 & \alpha=1\\ +\infty & \alpha>1\end{cases}$；

（4）不存在；（5）1；（6）不存在.

7．存在；提示：$\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=1$.

10.（1）$\exists\varepsilon_0>0,\forall N,\exists n>N:|x_n|\ge\varepsilon_0$；

（2）$\exists G_0>0,\forall N,\exists n>N:x_n\le G_0$；

（3）$\exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0,\exists x\in(x_0,x_0+\delta):|f(x)-A|\ge\varepsilon_0$；

（4）$\exists G_0>0,\forall\delta>0,\exists x\in(x_0-\delta,x_0):f(x)\le G_0$；

（5）$\exists\varepsilon_0>0,\forall X>0,\exists x\in(-\infty,-X):\left|f(x)-A\right|\ge\varepsilon_0$；

（6）$\exists G_0>0,\forall X>0,\exists x\in(X,+\infty):f(x)\ge -G_0$.

15．提示：$\forall x_0\in(0,+\infty)$， 利用 $f(x_0)=f(2^n x_0)$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}f(2^n x_0)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

第 2 节

2.（1）$\bigcup\limits_{k\in Z}\left(\dfrac{k\pi}{2},\dfrac{(k+1)\pi}{2}\right)$；（2）$\bigcup\limits_{k\in Z}\left(2k\pi-\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$；（3）$(-1,1]\cup[3,+\infty)$；

（4）$\{x\mid x>-1,x\notin \mathrm{N}^+\}$；（5）$\{(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\}\setminus\left\{\dfrac{1}{k}\mid k\in Z,k\ne 0\right\}$；

（6）$\bigcup\limits_{k\in Z}(k\pi,(k+1)\pi)$.

5．提示： $\max\{f,g\}=\dfrac{1}{2}\{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|\}$；

$\min\{f,g\}=\dfrac{1}{2}\{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|\}$.

7.（1）1，（2）e^2，（3）$e^{\cot a}$，（4）e^{x+1}，（5）e^2.

8.（1）$x=1,-2$，第二类不连续点；

（2）$x=k\ (k\in Z,k\ne 0)$，第一类不连续点； $x=0$，第二类不连续点；

（3）$x=k\pi\ (k\in Z,k\ne 0)$，第二类不连续点； $x=0$，第二类不连续点；

（4）$x=\dfrac{1}{2}k\ (k\in Z)$，第一类不连续点；

（5）$x=0$，第二类不连续点；

（6）$x=0$，第二类不连续点；

（7）$x=0$，第一类不连续点； $x=1$，第二类不连续点； $x=-1$，第二类不连续点；

（8）$x=0$，第二类不连续点；

（9）非整数点，第二类不连续点；

（10）非整数有理点，第二类不连续点.

9．提示：$\forall x\in(0,+\infty)$，利用 $f(x)=f(x^{\frac{1}{2^n}})$， $\lim\limits_{n\to\infty}x^{\frac{1}{2^n}}=1$ 及 $f(x)$ 的连续性，得到

$f(x)\equiv f(1)$.

第 3 节

1.（1）$u(x)\sim 2x^3\ (x\to 0)$；$u(x)\sim x^5\ (x\to\infty)$；

（2）$u(x) \sim -2x^{-1}\ (x \to 0)$；$u(x) \sim \dfrac{1}{3}x\ (x \to \infty)$；

（3）$u(x) \sim x^{\frac{2}{3}}\ (x \to 0+)$；$u(x) \sim x^{\frac{3}{2}}\ (x \to +\infty)$；

（4）$u(x) \sim x^{\frac{1}{8}}\ (x \to 0+)$；$u(x) \sim x^{\frac{1}{2}}\ (x \to +\infty)$；

（5）$u(x) \sim \dfrac{5}{6}x\ (x \to 0)$；$u(x) \sim \sqrt{3}x^{\frac{1}{2}}\ (x \to +\infty)$；

（6）$u(x) \sim \dfrac{1}{2}x^{-1}\ (x \to +\infty)$；

（7）$u(x) \sim x^{\frac{1}{2}}\ (x \to 0+)$；

（8）$u(x) \sim -2x\ (x \to 0+)$；

（9）$u(x) \sim -\dfrac{3}{2}x^2\ (x \to 0)$；

（10）$u(x) \sim x\ (x \to 0)$.

2.（1）$\ln^k x$ $(k>0)$，x^α $(\alpha>0)$，a^x $(a>1)$，$[x]!$，x^x；

(2) $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{x}}$，$\dfrac{1}{\left[\dfrac{1}{x}\right]!}$，$a^{-\frac{1}{x}}$ $(a>1)$，x^α $(\alpha>0)$，$\ln^{-k}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ $(k>0)$.

3.（1）$\dfrac{1}{6}$，（2）0，（3）$\dfrac{1}{2}$，（4）1，（5）$a^\alpha \ln a$，（6）$\alpha a^{\alpha-1}$，

（7）1，（8）$\dfrac{1}{a}$，（9）e^2，（10）e^{-1}，（11）$\ln x$，（12）$\ln x$.

第 4 节

8．提示：

（1） 在$(0,1)$上，令$x_n' = \dfrac{1}{n\pi}$，$x_n'' = \dfrac{1}{n\pi + \dfrac{\pi}{2}}$，$x_n' - x_n'' \to 0$，但$\left|\sin\dfrac{1}{x_n'} - \sin\dfrac{1}{x_n''}\right| = 1$；

在$(a,1)$上，利用不等式$\left|\sin\dfrac{1}{x_1} - \sin\dfrac{1}{x_2}\right| \le \left|\dfrac{1}{x_1} - \dfrac{1}{x_2}\right| \le \dfrac{|x_1 - x_2|}{a^2}$.

（2） 在$-\infty,+\infty)$上，令$x_n' = \sqrt{n\pi + \dfrac{\pi}{2}}$，$x_n'' = \sqrt{n\pi}$，$x_n' - x_n'' \to 0$，但

$\left|\sin(x_n')^2 - \sin(x_n'')^2\right| = 1$；

在$[0,A]$上，利用不等式$\left|\sin x_1^2-\sin x_2^2\right|\le\left|x_1^2-x_2^2\right|\le 2A\left|x_1-x_2\right|$.

（3） 利用不等式$\left|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right|\le\sqrt{\left|x_1-x_2\right|}$.

（4） 利用不等式$\left|\ln x_1-\ln x_2\right|=\left|\ln\left(1+\dfrac{x_1-x_2}{x_2}\right)\right|\le\left|x_1-x_2\right|$.

（5） 利用不等式$\left|\cos\sqrt{x_1}-\cos\sqrt{x_2}\right|\le\left|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right|\le\sqrt{\left|x_1-x_2\right|}$.

9．提示：过P点作弦，设弦与x轴的夹角为θ，P点将弦分成长度为$l_1(\theta)$和$l_2(\theta)$的两线段。则$f(\theta)=l_1(\theta)-l_2(\theta)$在$[0,\pi]$连续，满足$f(0)=-f(\pi)$，于是在$[0,\pi]$必有 ·个零点.

10．提示：令$F(x)=f(x+1)-f(x)$，则$F(1)=-F(0)$，于是$F(x)$在$[0,1]$必有一个零点.

14．提示：$\min\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}\le\dfrac{1}{n}\left[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\right]\le\max\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$.

15．提示：由$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，$\forall\varepsilon>0,\exists X>a,\forall x',x''>X:\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon$。由于$f(x)$在$[a,X+1]$连续，所以一致连续，也就是$\exists 0<\delta<1,\forall x',x''\in[a,X+1](\left|x'-x''\right|<\delta)$:

$\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon$。于是 $\forall x',x''\in[a,+\infty)(\left|x'-x''\right|<\delta):\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon$

第四章

第 1 节

1．1.12 克.

第 2 节

1．（1）$-f'(x_0)$；（2）$f'(x_0)$；（3）$2f'(x_0)$.

3．提示：证明 $f(1)=0$，$f'(1)=2$.

6．（1）不可导点：$x=k\pi\ (k\in Z)$，$f'_-(k\pi)=-1$，　$f'_+(k\pi)=1$；

（2）不可导点：$x=2k\pi\ (k\in Z)$，$f'_-(2k\pi)=-\sqrt{2}$，　$f'_+(2k\pi)=\sqrt{2}$；

（3）不可导点：$x=0$，$f'_-(0)=1$，　$f'_+(0)=-1$；

（4）不可导点：$x=0$，$f'_-(0)=-1$，　$f'_+(0)=1$.

7．（1）可导；（2）$a=b=0$时可导，其他情况不可导；（3）不可导；（4）$a<0$时可导，$a\geq 0$ 时不可导.

10．（1）不一定；反例：$f(x)=\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}$，$\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=\infty$，$f'(x)=\dfrac{1}{x^2}(-1+\sin\dfrac{1}{x})$，

$\lim\limits_{x\to 0+}f'(x)=\infty$不成立.

（2）不一定；反例：$f(x)=\sqrt{x}$.

第 3 节

3．（1）$3\cos x+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$；

（2）$\cos x-x\sin x+2x$；

（3）$(2x+7)\sin x+(x^2+7x-5)\cos x$；

（4）$2x(3\tan x+2\sec x)+x^2(3\sec^2 x+2\tan x\sec x)$；

（5）$e^x(\sin x+\cos x)+4\sin x-\dfrac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}}$；

（6）$(1+2\cos x-2^x\ln 2)x^{-\frac{2}{3}}-\dfrac{2}{3}(x+2\sin x-2^x)x^{-\frac{5}{3}}$；

（7）$\dfrac{\sin x-1}{(x+\cos x)^2}$；

（8）$\dfrac{2(x\sin x+x^2\cos x-2)(\sqrt{x}+1)-\sqrt{x}(x\sin x-2\ln x)}{2x(\sqrt{x}+1)^2}$；

（9）$\dfrac{(3x^2-\csc^2 x)x\ln x-x^3-\cot x}{x\ln^2 x}$；

（10）$\dfrac{-2(x+\sin x\cos x)}{(x\sin x-\cos x)^2}$；

（11）$(e^x+\dfrac{1}{x\ln 3})\arcsin x+(e^x+\dfrac{\ln x}{\ln 3})\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

（12）$-x^2\text{sh}x(\cot x\csc x+\dfrac{3}{x})+x(\csc x-3\ln x)(2\text{sh}x+x\text{ch}x)$；

（13）$\dfrac{(1+\tan x\sec x)(x-\csc x)-(x+\sec x)(1+\cot x\csc x)}{(x-\csc x)^2}$；

（14）$\dfrac{(1+x^2)(1+\cos x)\arctan x-(x+\sin x)}{(1+x^2)\arctan^2 x}$.

5．提示：设切点为(x_0,x_0)，$f(x)=\log_a x$，利用$f(x_0)=x_0$与$f'(x_0)=1$解出x_0与a.

6．$\lim\limits_{n\to\infty} y(x_n)=\dfrac{1}{e}$.

7．$S_1=\{(x,y)\,|\,a(ax^2+bx+c-y)>0\}$,

$S_2=\{(x,y)\,|\,ax^2+bx+c-y=0\}$,

$S_3=\{(x,y)\,|\,a(ax^2+bx+c-y)<0\}$.

第4节

1．（1）$2(2x^2-x+1)(4x-1)$；

（2）$e^{2x}(3\cos 3x+2\sin 3x)$；

（3）$-\dfrac{3}{2}x^2(1+x^3)^{-\frac{3}{2}}$；

（4）$\dfrac{1-\ln x}{2x^2}\left(\dfrac{x}{\ln x}\right)^{\frac{1}{2}}$；

（5）$3x^2\cos x^3$；

（6）$-\dfrac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$；

（7）$\dfrac{x-1-\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}(x+\sqrt{1+x})}$；

（8）$\dfrac{-2x}{\sqrt{e^{2x^2}-1}}$；

（9）$\dfrac{2(x^4+1)}{x(x^4-1)}$；

（10）$\dfrac{-2(4x+\cos x)}{(2x^2+\sin x)^3}$；

（11）$\dfrac{2(1-x^2)\ln x-(1+\ln^2 x)(1-2x^2)}{x^2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$；

（12）$\dfrac{1+\csc x^2+x^2\csc x^2\cot x^2}{(1+\csc x^2)^{\frac{3}{2}}}$；

（13）$-\dfrac{8}{3}x(2x^2-1)^{-\frac{4}{3}}-\dfrac{27}{4}x^2(3x^3+1)^{-\frac{5}{4}}$；

（14）$-\sin 2x\cdot e^{-\sin^2 x}$；

（15）$\dfrac{2x^4-3a^2x^2+a^4+a^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

2.（1）$\cot x$；（2）$\csc x$；（3）$\begin{cases}\sqrt{a^2-x^2} & a>0\\ -\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} & a<0\end{cases}$；（4）$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$；（5）$\sqrt{x^2-a^2}$.

3.（1）$\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}f'(x^{\frac{2}{3}})$；（2）$-\dfrac{1}{x\ln^2 x}f'(\dfrac{1}{\ln x})$；（3）$\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$；（4）$\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}$；

（5）$2xe^{x^2}f'(e^{x^2})f'(f(e^{x^2}))$；（6）$\cos(f(\sin x))f'(\sin x)\cos x$；

（7）$-\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}f'\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$；（8）$-\dfrac{f'(f(x))f'(x)}{\left(f(f(x))\right)^2}$.

4．（1）$(1+\ln x)x^x$；

（2）$(x^3+\sin x)^{\frac{1}{x}}\left[\dfrac{3x^2+\cos x}{x(x^3+\sin x)}-\dfrac{\ln(x^3+\sin x)}{x^2}\right]$；

（3）$(\ln\cos x-x\tan x)\cos^x x$；

（4）$\left[\ln\ln(2x+1)+\dfrac{2x}{(2x+1)\ln(2x+1)}\right]\ln^x(2x+1)$；

（5）$\dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^3}}\left[\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{1-x^2}-\dfrac{3x^2}{2(1+x^3)}\right]$；

（6）$\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)\cdot\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x-x_i}$；

（7）$\dfrac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}x^{\sqrt{x}}\cos x^{\sqrt{x}}$.

5．（1）$\dfrac{1+y^2}{y^2}$；（2）$-\dfrac{e^y}{1+xe^y}$；（3）$\dfrac{1+2(\sin y-x)}{2(\sin y-x)\cos y-\sin y}$；（4）$\dfrac{y^2+y}{1-x-xy}$；

（5）$-\dfrac{2xe^{x^2+y}-y^2}{e^{x^2+y}-2xy}$；（6）$\dfrac{\sec^2(x+y)-y}{x-\sec^2(x+y)}$；（7）$-\dfrac{2y^2\cos x+y\ln y}{x+2y\sin x}$；

（8）$\dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}$.

8．（1）$\dfrac{3bt}{2a}$；（2）$\dfrac{3t^2-1}{2t}$；（3）$\dfrac{-t\sin t+2\cos t}{t\cos t+2\sin t}$；（4）$-\dfrac{b}{a}e^{2t}$；（5）$-\tan t$；

（6）$\dfrac{b\operatorname{sh}bt}{a\operatorname{ch}at}$；（7）$-1$；（8）$-\sqrt{\dfrac{1+t}{1-t}}$；（9）$\dfrac{(\sin t-\cos t)\tan t}{\sin t+\cos t}$；（10）$\dfrac{t}{2}$.

13．（1）$[f'(u)g(u)h(u)+f(u)g'(u)h(u)+f(u)g(u)h'(u)]\varphi'(x)dx$；

（2）$\dfrac{f'(u)g(u)h(u)+f(u)g'(u)h(u)-f(u)g(u)h'(u)}{(h(u))^2}\varphi'(x)dx$；

（3）$h(u)^{g(u)}\left[g(u)\dfrac{h'(u)}{h(u)}+g'(u)\ln h(u)\right]\varphi'(x)dx$；

（4）$\dfrac{h(u)g'(u)\ln h(u)-h'(u)g(u)\ln g(u)}{h(u)g(u)\ln^2 h(u)}\varphi'(x)dx$；

（5）$\dfrac{f'(u)h(u)-f(u)h'(u)}{f^2(u)+h^2(u)}\varphi'(x)dx$；

（6）$-\dfrac{f(u)f'(u)+h(u)h'(u)}{(f^2(u)+h^2(u))^{\frac{3}{2}}}\varphi'(x)dx$.

第 5 节

1.（1）$y'''=6$；

（2）$y''=7x^2+12x^2\ln x$；

（3）$y''=\dfrac{3x^2+8x+8}{4(1+x)^{\frac{5}{2}}}$；

（4）$y''=\dfrac{6\ln x-5}{x^4}$；

（5）$y''=6x\cos x^3-9x^4\sin x^3$；

$y'''=-54x^3\sin x^3-(27x^6-6)\cos x^3$；

（6）$y''=(6x-\dfrac{1}{4}x^2)\cos\sqrt{x}-\dfrac{11}{4}x^{\frac{3}{2}}\sin\sqrt{x}$；

$y'''=(6-\dfrac{15}{8}x)\cos\sqrt{x}+(\dfrac{1}{8}x^{\frac{3}{2}}-\dfrac{57}{8}x^{\frac{1}{2}})\sin\sqrt{x}$；

（7）$y'''=(27x^2+54x+18)e^{3x}$；

（8）$y''=\left[2(2x^2-1)\arcsin x+\dfrac{x(4x^2-3)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\right]e^{-x^2}$；

（9）$y^{(80)}=2^{80}\left[x(x^2-4740)\cos 2x+(120x^2-61620)\sin 2x\right]$；

（10）$y^{(99)}=(2x^2+19405)\text{ch}x+396x\text{sh}x$.

2.（1）$y^{(n)}=2^{n-1}\omega^n\sin(2\omega x+\dfrac{n-1}{2}\pi)$；

（2）$y^{(n)}=2^x\left[\ln^n 2\cdot\ln x+\sum_{k=1}^{n}C_n^k\ln^{n-k}2\cdot\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}\right]$；

（3）$y^{(n)}=e^x\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$；

（4）$y^{(n)}=(-1)^n n!\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(x-2)^{n-k+1}(x-3)^{k+1}}$；

（5）$y^{(n)}=e^{\alpha x}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\alpha^{n-k}\beta^k\cos(\beta x+\frac{k\pi}{2})$；

（6）$y=\frac{3}{4}+\frac{\cos 4x}{4}$，$y^{(n)}=4^{n-1}\cos(4x+\frac{n\pi}{2})\quad(n\geq 1)$.

4.（1）$[f(x^2)]'''=8x^3f'''(x^2)+12xf''(x^2)$；

（2）$[f(\frac{1}{x})]'''=-\frac{f'''\left(\frac{1}{x}\right)+6xf''\left(\frac{1}{x}\right)+6x^2f'\left(\frac{1}{x}\right)}{x^6}$；

（3）$[f(\ln x)]''=\frac{f''(\ln x)-f'(\ln x)}{x^2}$；

（4）$[\ln f(x)]''=\frac{f''(x)f(x)-(f'(x))^2}{f^2(x)}$；

（5）$[f(e^{-x})]'''=-e^{-3x}f'''(e^{-x})-3e^{-2x}f''(e^{-x})-e^{-x}f'(e^{-x})$；

（6）$[f(\arctan x)]''=\frac{f''(\arctan x)-2xf'(\arctan x)}{(1+x^2)^2}$.

5.（1）提示：由 $y'(1+x^2)=1$，两边求 n 阶导数，$\sum_{k=0}^{n}C_n^k y^{(n-k+1)}(1+x^2)^{(k)}=0$，以 $x=0$

代入，得到递推公式 $y^{(n+1)}(0)=-n(n-1)y^{(n-1)}(0)$，从而得到

$$y^{(n)}(0)=\begin{cases}(-1)^{\frac{n-1}{2}} & n\text{为奇数}\\ 0 & n\text{为偶数}\end{cases}；$$

（2）提示：利用 $xy'=(1-x^2)y''$，类似（1）得到

$$y^{(n)}(0)=\begin{cases}[(n-2)!!]^2 & n\text{为奇数}\\ 0 & n\text{为偶数}\end{cases}.$$

6．（1）$y''=\dfrac{4xy'+2y-e^{x^2+y}[2+4x^2+4xy'+(y')^2]}{e^{x^2+y}-x^2}$，其中 $y'=\dfrac{2x(y-e^{x^2+y})}{e^{x^2+y}-x^2}$；

（2）$y''=\dfrac{2\sec(x+y)\tan(x+y)(1+y')^2-2y'}{x-\sec^2(x+y)}$，其中 $y'=\dfrac{\sec^2(x+y)-y}{x-\sec^2(x+y)}$；

（3）$y''=\dfrac{2y^3\sin x-4y^2y'\cos x-2yy'+x(y')^2}{xy+2y^2\sin x}$，其中 $y'=-\dfrac{2y^2\cos x+y\ln y}{x+2y\sin x}$；

（4）$y''=\dfrac{2x+2y(y')^2-2ay'}{ax-y^2}$，其中 $y'=\dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}$.

7．（1）$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{3b}{4a^2t}$；

（2）$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{t^2+2}{a(t\sin t-\cos t)^3}$；

（3）$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{2+t^2-2\sin t-t\cos t}{(1-\sin t-t\cos t)^3}$；

（4）$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{2b}{a^2}e^{3t}$；

（5）$\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{2}{(1-t)^{\frac{3}{2}}}$；

（6）$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{b(a\sin at\sin bt+b\cos at\cos bt)}{a^2\cos^3 at}$.

9．（1）$d^2y=\dfrac{2(1-\sec^2x)^2+6\sec^2x\tan x(x-\tan x)}{9(\tan x-x)^{\frac{5}{3}}}dx^2$；

（2）$d^4y=(x^4-16x^3+72x^2-96x+24)e^{-x}dx^4$；

（3）$d^2y=\dfrac{3x^2+2}{x^3(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx^2$；

(4) $d^2 y = \dfrac{\sec x[(x^2-1)^2(1+2\tan^2 x) - 2x(x^2-1)\tan x + 2x^2+1]}{(x^2-1)^{\frac{5}{2}}}dx^2$；

(5) $d^3 y = -27(\sin 3x + x\cos 3x)dx^3$；

(6) $d^2 y = x^x[(1+\ln x)^2 + \dfrac{1}{x}]dx^2$；

(7) $d^n y = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\left[\ln x - \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\right]dx^n$；

(8) $d^n y = (n!)^2 \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{2^k x^k \cos(2x + \frac{k\pi}{2})}{(k!)^2 (n-k)!}dx^n$.

11.（1）$[f''(u)\sec^4 x + 2f'(u)\sec^2 x\tan x]dx^2$；

（2）$\dfrac{g''(u)\ln^{\frac{1}{2}} x - g'(u)(1+2\ln x)}{4x^2\ln^{\frac{3}{2}} x}dx^2$；

（3）$[f'(u)g(u) + f(u)g'(u)]d^2u + [f''(u)g(u) + 2f'(u)g'(u) + f(u)g''(u)]du^2$；

（4）$\dfrac{g'(u)}{g(u)}d^2u + \dfrac{g''(u)g(u) - (g'(u))^2}{g^2(u)}du^2$；

（5）$\dfrac{f'(u)g(u) - f(u)g'(u)}{g^2(u)}d^2u +$

$\dfrac{f''(u)g^2(u) - f(u)g(u)g''(u) - 2f'(u)g'(u)g(u) + 2f(u)(g'(u))^2}{g^3(u)}du^2$.

第五章

第 1 节

5．提示：令 $F(x)=\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix}(x-a)-(b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f(x) \\ g(a) & g(x) \end{vmatrix}$，在 $[a,b]$ 上对 $F(x)$ 应用 Rolle 定理.

7．提示：利用 Lagrange 中值定理 $\arctan\dfrac{a}{n}-\arctan\dfrac{a}{n+1}=\dfrac{1}{1+\xi^2}(\dfrac{a}{n}-\dfrac{a}{n+1})$，其中 $\xi\in(\dfrac{a}{n+1},\dfrac{a}{n})$；注：也可利用 $\arctan x-\arctan y=\arctan\dfrac{x-y}{1+xy}$.

9．提示：证明 $f(x)$ 在每一点的导数为零.

12．（4）提示：令 $f(x)=\tan x+2\sin x-3x$，则

$$f'(x)=\sec^2 x+2\cos x-3\geq 3\sqrt[3]{\sec^2 x\cos x\cos x}-3=0.$$

（5）提示: 令 $f(x)=x^p+(1-x)^p$, 证明 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{2}$ 取到最小值 $\dfrac{1}{2^{p-1}}$.

（6）提示：令 $f(x)=\sin x\tan x-x^2$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. 则 $f'(x)=\sin x+\sin x\sec^2 x-2x$，$f''(x)=\cos x+\dfrac{1}{\cos x}+\dfrac{2\sin^2 x}{\cos^3 x}-2$. 显然 $f''(x)>0$. 由 $f'(0)=0$，可知 $f'(x)>0$. 再由 $f(0)=0$，得到 $f(x)>0$.

14．$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{2}$；提示：$\{x_n\}$ 单调减少，且当 $n\geq 2$ 时，$x_n<\dfrac{2}{3}$.

15．（2）提示：在 $[0,\xi]$ 上对 $e^{-\lambda x}[f(x)-x]$ 应用 Rolle 定理.

17．提示：令 $g(x)=x^2$，对 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上应用 Cauchy 中值定理.

18．提示：令 $f(x)=\dfrac{1}{x}e^x$，$g(x)=\dfrac{1}{x}$，对 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上应用 Cauchy 中值定理.

19．提示：令 $g(x)=\dfrac{1}{x}$，对 $\dfrac{1}{x}f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上应用 Cauchy 中值定理.

20．提示：对 $x\in[1,2]$，$e^{-x}f(x)$ 显然是有界的；对 $x>2$，有

$\left|e^{-x}f(x)\right| < \left|e^{-x}(f(x)-f(1))\right| + e^{-2}\left|f(1)\right| < \dfrac{2\left|f(x)-f(1)\right|}{e^{x}-e^{1}} + e^{-2}\left|f(1)\right|$，其中

$\dfrac{\left|f(x)-f(1)\right|}{e^{x}-e^{1}} = 2e^{-\xi}\left|f'(\xi)\right|$是有界的.

21．提示：注意$\sqrt{x}f'(x)$在$(0,a]$有界，并考虑$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}}$.

22．提示：视$\dfrac{f(x)}{x^n}$为$\dfrac{f(x)-f(0)}{x^n-0^n}$，应用 Cauchy 中值定理，并逐次进行下去.

24．提示：利用数学归纳法，注意

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) = f\left((\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i)\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i} + \lambda_n x_n\right) \le \left(\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i\right) f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i}\right) + \lambda_n f(x_n).$$

26．提示：利用$\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{f(x_0)}{x} + \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\dfrac{x-x_0}{x}$.

27．提示：在区间$\left[\dfrac{a+b}{2},b\right]$上对$g(x)=f(x)-f(x-\dfrac{b-a}{2})$应用 Lagrange 中值定理.

第 2 节

2．（1）2；（2）$-\dfrac{3}{5}$；（3）$-\dfrac{1}{8}$；（4）$\dfrac{m}{n}a^{m-n}$；（5）1；（6）$\dfrac{1}{3}$；（7）1；（8）1；

（9）$\dfrac{1}{2}$；（10）0；（11）1；（12）$\dfrac{2}{3}$；（13）$\dfrac{1}{2}$；（14）$+\infty$；（15）2；（16）$e^{-\frac{2}{\pi}}$；

（17）1；（18）$\dfrac{1}{2}$；（19）1；（20）e^{-1}.

4．5； 提示：$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x^2}$.

5．连续；提示：$\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}{x}=-\dfrac{1}{2}$.

6．提示：$\lim\limits_{x\to 0+}f(x)\ln x=\lim\limits_{x\to 0+}\left[\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\cdot(x\ln x)\right]=0$.

7．提示：$\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x f(x)}{e^x}$.

第 3 节

1．提示：$\theta(x)=\dfrac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$.

2．提示：由 $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\dfrac{1}{2!}f''(x)h^2+\cdots+\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)h^n$

$=f(x)+f'(x)h+\dfrac{1}{2!}f''(x)h^2+\cdots+\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(x)h^n+\dfrac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x)h^{n+1}+\circ(h^{n+1})$，

得到 $\theta\cdot\dfrac{f^{(n)}(x+\theta h)-f^{(n)}(x)}{\theta h}=\dfrac{1}{n+1}f^{(n+1)}(x)+\circ(1)$.

第 4 节

1．（1）$1+\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{9}x^2+\dfrac{14}{81}x^3+\dfrac{35}{243}x^4+\circ(x^4)$；

（2）$\cos\alpha-\sin\alpha\cdot x-\dfrac{\cos\alpha}{2!}x^2+\dfrac{\sin\alpha}{3!}x^3+\dfrac{\cos\alpha}{4!}x^4+\circ(x^4)$；

（3）$\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}x-\dfrac{\sqrt{2}}{32}x^2-\dfrac{13\sqrt{2}}{384}x^3+\circ(x^3)$；

（4）$1+x+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{8}x^4+\circ(x^4)$；

（5）$x+\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{2}{15}x^5+\circ(x^5)$；

（6）$-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{12}x^4-\dfrac{1}{45}x^6+\circ(x^6)$；

（7）$1-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{12}x^2-\dfrac{1}{720}x^4+\circ(x^4)$

（8）$-\dfrac{1}{6}x^2-\dfrac{1}{180}x^4+\circ(x^4)$；

（9）$\dfrac{1}{6}x^2+x^3+\circ(x^3)$.

2．（1）$-1-3(x-1)^2-2(x-1)^3$；

（2）$1+\dfrac{1}{e}(x-e)-\dfrac{1}{2e^2}(x-e)^2+\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{ne^n}(x-e)^n+\circ\left((x-e)^n\right)$;

（3）$(x-1)-\dfrac{1}{2}(x-1)^2+\dfrac{1}{3}(x-1)^3-\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n+\circ\left((x-1)^n\right)$;

（4）$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(x-\frac{\pi}{6})-\frac{1}{4}(x-\frac{\pi}{6})^2-\frac{\sqrt{3}}{12}(x-\frac{\pi}{6})^3+\cdots+\frac{1}{n!}\sin(\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{6})^n$

$+\circ\left((x-e)^n\right)$；

（5）$\sqrt{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}(x-2)-\frac{1}{16\sqrt{2}}(x-2)^2+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^{2n-\frac{1}{2}}n!}(x-2)^n$

$+\circ\left((x-2)^n\right)$.

6.（1）$\frac{1}{3}$；（2）$\ln^2 a$；（3）0；（4）$\frac{2}{5}$；（5）$\frac{1}{2}$；（6）$\frac{1}{3}$；（7）$-\frac{1}{4}$；（8）$\frac{1}{6}$.

8.（1）$y=x-1, x=-1$；（2）$y=0$；（3）$y=\pm\sqrt{6}(x-\frac{2}{3})$；（4）$y=x+3, x=0$；

（5）不存在；（6）$x=1, x=-1$；（7）$y=x+\pi, y=x$；（8）$y=x$；

（9）$y=\pi$；（10）$y=-\frac{1}{12}x$；（11）$y=\frac{1}{6}x-\frac{1}{18}$，$x=0$；（12）$y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{24}$，$x=0$。

9．提示：分别对极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n^2}}$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{y_n}}$ 应用 Stolz 定理.

10. 提示：设 $f(x_0)=\frac{1}{4}$，则 $f'(x_0)=0$，以 $x=0$ 和 $x=1$ 代入 $f(x)$ 在点 x_0 的 Taylor 公式 $f(x)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2$，得到 $|f(0)|+|f(1)|\le\frac{1}{2}+\frac{1}{2}[x_0^2+(1-x_0)^2]\le 1$.

11．提示：任取 $x_0\in[0,1]$，以 $x=0$ 和 $x=1$ 代入 $f(x)$ 在点 x_0 的 Taylor 公式得到

$$f(0)=f(x_0)-f'(x_0)x_0+\frac{1}{2}f''(\xi){x_0}^2,$$
$$f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\frac{1}{2}f''(\eta)(1-x_0)^2,$$

两式相减，得到

$$|f'(x_0)|\le|f(0)|+|f(1)|+[{x_0}^2+(1-x_0)^2].$$

12. 提示：设 $f(x_0)=-1$，则 $f'(x_0)=0$，以 $x=0$ 和 $x=1$ 代入 $f(x)$ 在点 x_0 的 Taylor 公式 $f(x)=-1+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2$，得到 $\max\limits_{0\le x\le 1}f''(x)\ge\frac{1}{x_0^2}+\frac{1}{(1-x_0)^2}\ge 8$.

13．提示：设 $|f(x_0)|=\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)|$，若 $x_0=a$ 或 b，则结论自然成立；

设$a<x_0<b$，以$x=a$和$x=b$代入$f(x)$在点x_0的Taylor公式

$$f(x)=f(x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2,$$

得到$\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)|\le\frac{1}{2}\max\limits_{a\le x\le b}|f''(x)|\left[(x_0-a)^2+(b-x_0)^2\right]$.

第5节

1.（1）极值点：$x=-1,2$；单调区间：$(-\infty,-1]$增加，$[-1,2]$减少，$[2,+\infty)$增加.

（2）无极值点；单调区间：$(-\infty,+\infty)$增加.

（3）极值点：$x=\frac{1}{e^2}$；单调区间：$(0,\frac{1}{e^2}]$减少，$[\frac{1}{e^2},+\infty)$增加.

（4）n是偶数时，极值点：$x=0,n$；单调区间：$(-\infty,0]$减少，$[0,n]$增加，$[n,+\infty)$减少. n是奇数时，极值点：$x=n$；单调区间：$(-\infty,n]$增加，$[n,+\infty)$减少.

（5）极值点：$x=-1,5$；单调区间：$(-\infty,-1]$增加，$[-1,2)$减少，$(2,5]$减少，$[5,+\infty)$增加.

（6）极值点：$x=1\pm\sqrt{2}$；单调区间：$(-\infty,1-\sqrt{2}]$增加，$[1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}]$减少，$[1+\sqrt{2},+\infty)$增加.

（7）极值点：$x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$；单调区间：$(-\infty,-\frac{2}{\sqrt{3}}]$增加，$[-\frac{2}{\sqrt{3}},0)$减少，$(0,\frac{2}{\sqrt{3}}]$减少，$[\frac{2}{\sqrt{3}},+\infty)$增加.

（8）极值点：$x=0$；单调区间：$[0,+\infty)$增加，$(-1,0]$减少.

（9）极值点：$x=k\pi+\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{\pi}{2}\quad k\in\mathrm{Z}$；单调区间：$[2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{4}]$减少，$[2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{\pi}{2}]$增加，$[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\pi]$减少，$[2k\pi+\pi,2k\pi+\frac{5\pi}{4}]$增加，$[2k\pi+\frac{5\pi}{4},2k\pi+\frac{3\pi}{2}]$减少，$[2k\pi+\frac{3\pi}{2},2k\pi+2\pi]$增加.

（10）没有极值点. 单调区间：$(-\infty,+\infty)$减少.

（11）极值点：$x=-\frac{1}{2}\ln 2$；单调区间：$(-\infty,-\frac{1}{2}\ln 2]$ 减少，$[-\frac{1}{2}\ln 2,+\infty)$ 增加.

（12）极值点：$x=1$；单调区间：$(-\infty,1]$ 增加，$[1,+\infty)$ 减少.

（13）极值点：$x=\frac{12}{5}$；单调区间：$(-\infty,\frac{12}{5}]$ 增加，$[\frac{12}{5},+\infty)$ 减少.

（14）极值点：$x=e$；单调区间：$(0,e]$ 增加，$[e,+\infty)$ 减少.

2.（1）拐点：$(1,2)$．保凸区间：$(-\infty,1]$ 下凸，$[1,+\infty)$ 上凸.

（2）拐点：$(k\pi,k\pi)$　$k\in \mathrm{Z}$．保凸区间：$[2k\pi,2k\pi+\pi]$ 上凸，$[2k\pi-\pi,2k\pi]$ 下凸.

（3）没有拐点.　保凸区间：$(-\infty,+\infty)$ 下凸.

（4）拐点：$(2,\frac{2}{e^2})$．保凸区间：$(-\infty,2]$ 上凸，$[2,+\infty)$ 下凸.

（5）拐点：$\left(5-3\sqrt{3},\frac{\sqrt[3]{6}}{2}(1-\sqrt{3})\right)$，$\left(5+3\sqrt{3},\frac{\sqrt[3]{6}}{2}(1+\sqrt{3})\right)$．保凸区间：$(-\infty,5-3\sqrt{3}]$ 下凸，$[5-3\sqrt{3},2)$ 上凸，$(2,5+3\sqrt{3}]$ 下凸，$[5+3\sqrt{3},+\infty)$ 上凸.

（6）拐点：$(-1,1)$，$\left(2-\sqrt{3},\frac{1}{4}(1+\sqrt{3})\right)$，$\left(2+\sqrt{3},\frac{1}{4}(1-\sqrt{3})\right)$．保凸区间：$(-\infty,-1]$ 下凸，$[-1,2-\sqrt{3}]$ 上凸，$[2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}]$ 下凸，$[2+\sqrt{3},+\infty)$ 上凸.

（7）没有拐点.　保凸区间：$(-1,+\infty)$ 下凸.

（8）拐点：$(0,0)$．保凸区间：$(-\infty,0]$ 下凸，$[0,+\infty)$ 上凸.

（9）没有拐点.　保凸区间：$(-\infty,+\infty)$ 下凸.

（10）拐点：$(-1,\ln 2)$，$(1,\ln 2)$．保凸区间：$(-\infty,-1]$ 上凸，$[-1,1]$ 下凸，$[1,+\infty)$ 上凸.

（11）拐点：$\left(\frac{1}{2},e^{\arctan\frac{1}{2}}\right)$．保凸区间：$(-\infty,\frac{1}{2}]$ 下凸，$[\frac{1}{2},+\infty)$ 上凸.

（12）没有拐点.　保凸区间：$[1,+\infty)$ 上凸.

4. 当 n 是奇数时，$x=a$ 不是 $f(x)$ 的极值点；当 n 是偶数，$\varphi(a)>0$ 时，$x=a$ 是

$f(x)$的极小值点，当n是偶数，$\varphi(a)<0$时，$x=a$是$f(x)$的极大值点.

5. 当n是奇数时，$x=a$不是$f(x)$的极值点；当n是偶数，$f^{(n)}(a)>0$时，$x=a$是$f(x)$的极小值点，当n是偶数，$f^{(n)}(a)<0$时，$x=a$是$f(x)$的极大值点.

6. $h=\dfrac{\sqrt{2}}{2\sigma}$.

7. 拐点：$\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{4}\right)$. 切线方程：$3\sqrt{3}x-8y-1=0$，$3\sqrt{3}x+8y-5=0$.

9. (1) $n=14$. (2) $n=3$.

10. 提示：由函数$y=\dfrac{x}{1+x}$的单调增加性，得到

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\le\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}\le\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

11. 提示：设$f(x)=e^x-\left(x^2-2ax+1\right)$，则$f(0)=0$，$f'(x)=e^x-2x+2a$. 证明$f'(x)$在$x=\ln 2$取最小值，最小值为$f'(\ln 2)=2-2\ln 2+2a>0$.

12. 提示: 设$f(x)=\arctan x-kx$，则$f(0)=0$，$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-k$.

当$k\ge 1$时，$f'(x)<0$，$x\in(0,+\infty)$. 所以在$(0,+\infty)$上$f(x)<0$;

当$0<k<1$时，由$f'(0)>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$，可知$f(x)=0$必有正实根.

13. $\xi=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$.

15. $S_{\max}=\dfrac{ah}{4}$.

16. 矩形的边长分别为$\sqrt{2}a$与$\sqrt{2}b$.

17. $\theta=2\pi\left(1-\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

18. $R:H=b:a$.

19. 提示：参考例题 5.5.5。

第六章

第 1 节

1．（1）$\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^2-\frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$；

（2）$3e^x-\cos x+C$；

（3）$\frac{1}{a+1}x^{a+1}+\frac{1}{\ln a}a^x+C$；

（4）$x-\cot x+C$；

（5）$-2\cot x-\sec x+C$；

（6）$\frac{1}{7}x^7-\frac{6}{5}x^5+4x^3-8x+C$；

（7）$\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{x}+2x+C$；

（8）$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x+2x^{\frac{1}{2}}+3x^{\frac{1}{3}}-6x^{-\frac{1}{6}}+C$；

（9）$\frac{4^x}{\ln 4}-\frac{1}{9^x\ln 9}+\frac{2}{\ln\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^x+C$；

（10）$2x-\frac{5}{\ln\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^x+C$；

（11）$\sin x-\cos x+C$；

（12）$2\arctan x-3\arcsin x+C$；

（13）$\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}-\frac{4}{15}x^{\frac{15}{4}}+C$；

（14）$-2\csc 2x+C$．

2．曲线方程：$y=\ln|x|-2$．

3．（1）$y=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-x+C$；

（2）曲线方程：$y=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-x+\frac{5}{4}$．

第 2 节

1．（1）$\frac{1}{4}\ln|4x-3|+C$；

（2）$\frac{\sqrt{2}}{2}\arcsin\sqrt{2}x+C$；

（3）$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|+C$；

（4）$\frac{1}{3}e^{3x+2}+C$；

（5）$\frac{4^x}{\ln 4}+\frac{9^x}{\ln 9}+\frac{2\cdot 6^x}{\ln 6}+C$；

（6）$\frac{\sqrt{10}}{10}\arctan\frac{\sqrt{10}}{2}x+C$；

（7）$-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\cos x+C$；

（8）$\frac{1}{11}\tan^{11} x+C$；

（9）$-\frac{1}{16}\cos 8x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$；

（10）$\frac{1}{2}x+\frac{1}{20}\sin 10x+C$；

（11）$-\frac{1}{x^2+4x+5}+C$；

（12）$-2\cos\sqrt{x}+C$；

（13）$-\frac{2}{9}(1-2x^3)^{\frac{3}{4}}+C$；

（14）$-\cot\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+C$；

（15）$\frac{3}{2}(\sin x-\cos x)^{\frac{2}{3}}+C$；

（16）$-\frac{1}{\arcsin x}+C$；

（17）$\arctan(x-1)+C$；

（18）$\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{3}+\frac{1}{4}\sqrt{9-4x^2}+C$；

(19) $-\ln\left|\cos\sqrt{1+x^2}\right|+C$;

(20) $\frac{1}{2}\arctan(\sin^2 x)+C$.

2. (1) $\ln(\sqrt{1+e^{2x}}-1)-x+C$;

(2) $\ln\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{|x|}+C$;

(3) $(\arctan\sqrt{x})^2+C$;

(4) $-\frac{1}{x\ln x}+C$;

(5) $\frac{(x+2)^{22}}{22}-\frac{(x+2)^{21}}{7}+C$;

(6) $\frac{(x+1)^{n+3}}{n+3}-\frac{2(x+1)^{n+2}}{n+2}+\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}+C$;

(7) $\frac{1}{x}(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{3x^3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+C$;

(8) $\sqrt{x^2-9}-3\arccos\frac{3}{x}+C$;

(9) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C$;

(10) $\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}+C$;

(11) $\sqrt{x^2-a^2}-a\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$;

(12) $-\frac{3a+x}{2}\sqrt{x(2a-x)}+3a^2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}}+C$;

(13) $\sqrt{2x}-\ln(1+\sqrt{2x})+C$;

(14) $-\frac{3}{10}(1-x)^{\frac{10}{3}}+\frac{6}{7}(1-x)^{\frac{7}{3}}-\frac{3}{4}(1-x)^{\frac{4}{3}}+C$;

(15) $\arccos\frac{1}{x}+C$;

(16) $-\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$;

（17） $-\frac{1}{3a^2x^3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$；

（18） $\arcsin x-\tan(\frac{1}{2}\arcsin x)+C$；

（19） $-\frac{1}{8(x^4-1)^2}-\frac{3}{4(x^4-1)}+\frac{3}{4}\ln\left|x^4-1\right|+\frac{x^4}{4}+C$；

（20） $\frac{1}{n}\ln\left|\frac{x^n}{x^n+1}\right|+C$.

3. （1） $\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C$；

（2） $\frac{x^2}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{4}(x+1)^2+C$；

（3） $-\frac{(9x^2-2)\cos 3x}{27}+\frac{2x\sin 3x}{9}+C$；

（4） $-x\cot x+\ln|\sin x|+C$；

（5） $\frac{x^2}{4}+\frac{x\sin 2x}{4}+\frac{\cos 2x}{8}+C$；

（6） $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$；

（7） $x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$；

（8） $\frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)+C$；

（9） $x\tan x+\ln|\cos x|-\frac{1}{2}x^2+C$；

（10） $-2\sqrt{1-x}\arcsin x+4\sqrt{1+x}+C$；

（11） $x(\ln x-1)^2+x+C$；

（12） $\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+C$；

（13） $-\frac{e^{-x}(5\cos 5x+\sin 5x)}{26}+C$；

（14） $\frac{1}{10}e^x(5-2\sin 2x-\cos 2x)+C$；

（15） $-\dfrac{\ln^3 x+3\ln^2 x+6\ln x+6}{x}+C$；

（16） $\dfrac{x}{2}(\sin\ln x+\cos\ln x)+C$；

（17） $x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C$；

（18） $2e^{\sqrt{x}}(x-2\sqrt{x}+2)+C$；

（19） $2e^{\sqrt{x+1}}(\sqrt{x+1}-1)+C$；

（20） $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C$.

4． $\dfrac{(\cos x-\sin^2 x)^2}{2(1+x\sin x)^4}+C$；提示：对$\int f(x)f'(x)dx$采用分部积分.

5． $-\ln|1-x|-x^2+C$.

6． $-(e^{-x}+1)\ln(1+e^x)+x+C$.

7．提示：令$A=\int\dfrac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$， $B=\int\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$，计算$A+B, A-B$.

8．（1） $I_0=x+C, I_1=-\cos x+C,\ I_n=\dfrac{1}{n}[(n-1)I_{n-2}-\sin^{n-1}x\cos x]$；

（2） $I_0=x+C, I_1=-\ln|\cos x|+C,\ I_n=\dfrac{1}{n-1}\tan^{n-1}x-I_{n-2}$；

（3） $I_0=x+C, I_1=\ln|\sec x+\tan x|+C,\ I_n=\dfrac{1}{n-1}[(n-2)I_{n-2}+\dfrac{\sin x}{\cos^{n-1}x}]$；

（4） $I_0=-\cos x+C, I_1=\sin x-x\cos x+C,$

$$I_n=nx^{n-1}\sin x-x^n\cos x-n(n-1)I_{n-2};$$

（5） $I_0=e^x+C, I_1=\dfrac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C,$

$$I_n=\frac{1}{n^2+1}[n(n-1)I_{n-2}+e^x\sin^{n-1}x(\sin x-n\cos x)];$$

（6） $I_0=\dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C,$

$$I_n=\frac{1}{\alpha+1}(x^{\alpha+1}\ln^n x-nI_{n-1});$$

（7） $I_0=\arcsin x+C, I_1=-\sqrt{1-x^2}+C,$

$$I_n=\frac{1}{n}[(n-1)I_{n-2}-x^{n-1}\sqrt{1-x^2}]\text{；}$$

（8）$I_0=2\sqrt{1+x}$， $I_1=\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right|+C$， $I_n=-\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}-\frac{\sqrt{1+x}}{(n-1)x^{n-1}}$。

10．（1）$\frac{5}{3}(x^2+x+2)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{4}(x+\frac{1}{2})\sqrt{x^2+x+2}+\frac{7}{16}\ln|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+2}|+C$；

（2）$\frac{1}{3}(x^2+2x-5)^{\frac{3}{2}}-(x+1)\sqrt{x^2+2x-5}+6\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x-5}|+C$；

（3）$\sqrt{x^2+x+1}-\frac{3}{2}\ln|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}|+C$；

（4）$-\sqrt{5+x-x^2}+\frac{5}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{21}}+C$.

11．提示：证明

$$\int\frac{a_i}{x^i}e^x dx=-\frac{a_i}{i-1}\cdot\frac{e^x}{x^{i-1}}-\frac{a_i}{(i-1)(i-2)}\cdot\frac{e^x}{x^{i-2}}-\cdots-\frac{a_i}{(i-1)!}\cdot\frac{e^x}{x}+\frac{a_i}{(i-1)!}\int\frac{e^x}{x}dx.$$

第 3 节

1．（1）$\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{1}{2(x+1)}+C$；

（2）$-\frac{1}{4}\ln|x+1|+\frac{5}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\frac{3}{2}\arctan x+C$；

（3）$-\frac{1}{8}\ln|x+1|-5\ln|x+2|+\frac{41}{8}\ln|x+3|-\frac{2}{x+2}-\frac{13}{4(x+3)}-\frac{3}{4(x+3)^2}+C$；

（4）$-\frac{1}{x+2}-\frac{3}{2}\arctan(x+2)-\frac{x+2}{2(x^2+4x+5)}+C$；

（5）$\frac{1}{2}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$；

（6）$\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{\sqrt{3}x}{1-x^2}+C$；

（7）$\frac{x^3}{3}-\frac{5}{2}x^2+21x-80\ln|x+4|+C$；

（8）$x+\frac{1}{8}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+6}-\frac{43}{4\sqrt{23}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{23}}+C$；

（9） $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-\frac{1}{2}\arctan x+C$；

（10） $\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}x+1)+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}x-1)+C$；

（11） $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$；

（12） $-\ln|x|+\frac{2}{3}\ln|x-1|+\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$；

（13） $\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{x+1}{x^2+x+1}+C$；

（14） $\ln|x|-\frac{2}{7}\ln|1+x^7|+C$；

（15） $-\frac{x^5+2}{10(x^{10}+2x^5+2)}-\frac{1}{10}\arctan(x^5+1)+C$；

（16） $-\frac{x^n}{2n(x^{2n}+1)}+\frac{1}{2n}\arctan x^n+C$.

4．（1） $\frac{1}{6}(x-1)\sqrt{2+4x}+C$；

（2） $2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C$；

（3） $-\frac{1}{4}(2x+3)\sqrt{1+x-x^2}+\frac{7}{8}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C$；

（4） $\ln\left|\frac{x^2-1+\sqrt{x^4+1}}{x}\right|+C$；

（5） $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$；

（6） $\ln\left(1+\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)-\ln\left|\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1\right|+\sqrt{x^2-1}+C$；

（7） $2\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})+C$；

（8） $\frac{2x^2-1}{3x^3}\sqrt{x^2+1}+C$；

（9）$2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln(\sqrt[4]{x}+1)+C$；

（10）$\frac{3}{25}\left(\frac{x-4}{x+1}\right)^{\frac{5}{3}}+C$；

（11）$-\frac{3}{2}\ln(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-2})-\sqrt{3}\arctan\frac{\sqrt[3]{x+1}+2\cdot\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{x+1}}+C$；

（12）$\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^4}-1}{\sqrt[4]{1+x^4}+1}\right|+\frac{1}{2}\arctan\sqrt[4]{1+x^4}+C$.

5．提示：令 $\sqrt{a+x}=t$，则 $\int R(x,\sqrt{a+x},\sqrt{b+x})dx=\int R_1(t,\sqrt{t^2+c})dt$，再令

$\sqrt{t^2+c}=t+u$.

6.（1）$\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+3}{\tan\frac{x}{2}-3}\right|+C$；

（2）$\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}+C$；

（3）$\frac{\sqrt{3}}{6}\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2})+\frac{\sqrt{3}}{6}\arctan(\sqrt{3}\tan\frac{x}{2})+C$；

（4）$\ln\left|\tan\frac{x}{2}+1\right|+C$；

（5）$\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+C$；

（6）$\frac{1}{6}\ln\frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^3}+C$；

（7）$\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|-\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+C$

（8）$\frac{1}{\cos(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+a)}{\cos(x+b)}\right|+C$；

（9）$\cot a\cdot\ln\left|\frac{\cos x}{\cos(x+a)}\right|-x+C$；

（10） $\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8})\right|+C$；

（11） $-2\cot 2x+C$；

（12） $x-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)+C$.

7．（1） $\frac{1}{x+1}e^{x}+C$；

（2） $\frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}}-\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$；

（3） $x\ln^2(1+\sqrt{1+x^2})-2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+2x+C$；

（4） $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln^2 x-\frac{8}{9}x^{\frac{3}{2}}\ln x+\frac{16}{27}x^{\frac{3}{2}}+C$；

（5） $\frac{1}{2}e^{x}\left[(x^2-1)\sin x-(x-1)^2\cos x\right]+C$；

（6） $x\ln(1+x^2)-2x+2\arctan x+C$；

（7） $\frac{1}{4}(\arcsin x)^2-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\arcsin x+\frac{1}{4}x^2+C$；

（8） $-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\sqrt{\frac{3x+3}{x-3}}+C$；

（9） $(x+1)\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+C$；

（10） $4\sqrt{x}\sin\sqrt{x}-2(x-2)\cos\sqrt{x}+C$；

（11） $x\tan\frac{x}{2}+C$；

（12） $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{2}}\right|+C$；

（13） $\frac{1}{2}\sec x\tan x-\frac{1}{2}\ln\left|\sec x+\tan x\right|+C$；

（14） $(x-\sec x)e^{\sin x}+C$；

（15） $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right|+C$；

（16） $\frac{1}{ab}\arctan\frac{a\tan x}{b}+C$；

（17）$6\ln\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x}+1}+C$；

（18）$\frac{x^2-1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+x+C$；

（19）$-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}(\arcsin x)^2+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\arcsin x+C$；

（20）$x+\frac{1}{1+e^x}-\ln(1+e^x)+C$.

第七章

第 1 节

5. (1) 可积. (2) 不可积. (3) 不可积. (4) 可积.

6. 提示: $\omega_i(\frac{1}{f}) \le \frac{1}{m^2}\omega_i(f)$.

8. 提示:

充分性: 设$|f(x)| \le M$. $\forall \varepsilon = \sigma > 0$, 存在划分$P$, 使得振幅$\omega_i \ge \varepsilon$的小区间的长度之和小于$\varepsilon$, 于是$\sum_{i=1}^{n}\omega_i \Delta x_i < [2M + (b-a)]\varepsilon$;

必要性：如果存在$\varepsilon_0 > 0$与$\sigma_0 > 0$，对任意划分P，振幅$\omega_i \ge \varepsilon_0$的小区间的长度之和不小于$\sigma_0$，于是$\sum_{i=1}^{n}\omega_i \Delta x_i \ge \sigma_0 \varepsilon_0$，则当$\lambda = \max_{1 \le i \le n}(\Delta x_i) \to 0$时，$\sum_{i=1}^{n}\omega_i \Delta x_i$不趋于零.

9. 提示: 由于$g(u)$在$[A,B]$连续, 所以一致连续, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall u', u'' \in [A,B]$, 只要$|u' - u''| < \delta$, 成立$|g(u') - g(u'')| < \varepsilon$. 另外设 $|g(u)| \le M$.

由于$f(x)$在$[a,b]$可积, 由习题 8, 对上述$\varepsilon > 0$与$\delta > 0$, 存在划分P, 使得振幅$\omega_i(f) \ge \delta$的小区间的长度之和小于ε, 于是

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i(g \circ f)\Delta x_i < [2M + (b-a)]\varepsilon.$$

第 2 节

4. (1) $\int_0^1 x dx > \int_0^1 x^2 dx$. (2) $\int_1^2 x dx < \int_1^2 x^2 dx$.

(3) $\int_{-2}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^x dx > \int_0^1 2^x dx$. (4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx$.

7. 提示: 原式可化为$\frac{2}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}}[f(x) - f(b)]dx = 0$，由此推出在$(a, \frac{a+b}{2})$上至少有一点$\eta$，满足$f(\eta) - f(b) = 0$. 再对$f(x)$在$[\eta, b]$上应用 Rolle 定理.

8. 提示：令 $x=\dfrac{t}{a}$，$\varphi(ax)=\psi(x)$，不等式化为 $f\left(\int_0^1\psi(x)dx\right)\le\int_0^1 f\left(\psi(x)\right)dx$. 对区间 $[0,1]$ 作划分 P，任取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，由 $f''(x)\ge 0$，利用 Jensen 不等式(第 5.1 节习题 24)，得到 $f\left(\sum\limits_{i=1}^n\psi(\xi_i)\Delta x_i\right)\le\sum\limits_{i=1}^n f\left(\psi(\xi_i)\right)\Delta x_i$，再令 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\left(\Delta x_i\right)\to 0$，即得到所要证明的不等式.

9. 提示：设 $\int_0^1 f(x)dx=f(\xi)$，$\xi\in(0,1)$. 令 $F(\alpha)=\int_0^\alpha f(x)dx-\alpha\int_0^1 f(x)dx$，则 $F'(\alpha)=f(\alpha)-f(\xi)$. 当 $0<\alpha<\xi$ 时，$F(\alpha)$ 单调增加，当 $\xi<\alpha<1$ 时，$F(\alpha)$ 单调减少，由于 $F(0)=0$，$F(1)=0$，可知当 $\alpha\in[0,1]$ 时，

$$F(\alpha)=\int_0^\alpha f(x)dx-\alpha\int_0^1 f(x)dx\ge 0.$$

10. 提示：令 $F(a)=\int_0^a f(x)dx+\int_0^b f^{-1}(y)dy-ab$，则 $F'(a)=f(a)-b$. 设 $f(T)=b$，则当 $0<a<T$ 时，$F(a)$ 单调减少，当 $a>T$ 时，$F(a)$ 单调增加，于是 $F(a)$ 在 $a=T$ 取最小值，而最小值为零，所以

$$F(a)=\int_0^a f(x)dx+\int_0^b f^{-1}(y)dy-ab\ge 0.$$

11. 提示：对任意划分 P，设 $\delta=\min\limits_{1\le i\le n}\left(\Delta x_i\right)$. 当 $0<h<\delta$ 时，取 $\xi_i=x_{i-1}$；当 $-\delta<h<0$ 时，取 $\xi_i=x_i$. 于是 $\sum\limits_{i=1}^n\left|f_h(\xi_i)-f(\xi_i)\right|\Delta x_i\le\sum\limits_{i=1}^n\omega_i(f)\Delta x_i$.

12. 提示：(1) 由 $\int_a^b[\lambda f(x)-g(x)]^2dx\ge 0$，得到对一切实数 λ，成立

$$\lambda^2\int_a^b f^2(x)dx-2\lambda\int_a^b f(x)g(x)dx+\int_a^b g^2(x)dx\ge 0,$$

所以该两次三项式的判别式不大于零.

(2) 不等式两边平方，利用(1)的结果.

13. 提示：设 $0<m\le g(x)\le M<+\infty$，$\max\limits_{a\le x\le b}f(x)=f(\xi)=A$，不妨设 $A>0$ $(A=0$ 时等式显然成立). 对任意的 $0<\varepsilon<A$，取 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$，使得 $\xi\in[\alpha,\beta]$，且当 $x\in[\alpha,\beta]$ 时，成立 $0<A-\varepsilon<f(x)\le A$，于是

$$\left[m(\beta-\alpha)(A-\varepsilon)^n\right]^{\frac{1}{n}} < \left\{\int_a^b [f(x)]^n g(x)dx\right\}^{\frac{1}{n}} \le \left[M(b-a)A^n\right]^{\frac{1}{n}}.$$

令 $n\to\infty$，得到 $A-\varepsilon \le \left\{\int_a^b [f(x)]^n g(x)dx\right\}^{\frac{1}{n}} \le A$，由 ε 的任意性，即得到所要证明的等式.

第 3 节

1. （1）$F'(x)=-f(x)$.（2）$F'(x)=\dfrac{f(\ln x)}{x}$.（3）$F'(x)=\dfrac{4\sin^2 x}{4+(x-\sin x\cos x)^2}$.

2. （1）1.（2）$2e$.（3）$\dfrac{\pi^2}{4}$.（4）0.

3. 提示：$\int_0^x tf(t)dt < x\int_0^x f(t)dt$.

4. 当 $x=1$，$f(x)$ 取极小值 $-\dfrac{17}{12}$.

5. （1）0.（2）0.

6. （1）$\dfrac{71}{105}$.（2）$\ln 2-\dfrac{1}{2}$.（3）$\dfrac{15}{2\ln 2}+\dfrac{70}{\ln 6}+\dfrac{40}{\ln 3}$.（4）$\dfrac{1}{88}$.（5）$\dfrac{1}{16}$.（6）$\dfrac{1}{2}\pi-1$.

   （7）0.（8）$\dfrac{1}{4}\pi-\dfrac{1}{32}\pi^2-\dfrac{1}{2}\ln 2$.（9）$\dfrac{1}{5}\left(3e^{\frac{\pi}{2}}-2\right)$.（10）$\dfrac{e}{2}(\sin 1-\cos 1)+\dfrac{1}{2}$.

   （11）$\dfrac{1}{12}(\pi+2\ln 2-2)$.（12）$\dfrac{2}{9}e^3+\dfrac{1}{2}e^2$.（13）$\dfrac{1}{4}(1-\ln 2)$.

   （14）$\dfrac{2\sqrt{2}-1}{2}e^{2\sqrt{2}}-\dfrac{1}{2}e^2$.（15）$\ln\left(\sqrt{1+e^2}-1\right)+\ln(\sqrt{2}+1)-1$.（16）$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

   （17）$\dfrac{17}{3}-8\ln 2$；提示：令 $t=x+1$.

   （18）$\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi$；提示：令 $t=x-\dfrac{1}{x}$，则 $\int_0^1\dfrac{x^2+1}{x^4+1}dx=\int_{-\infty}^0\dfrac{dt}{2+t^2}$.

   （19）$\ln(2+\sqrt{2})-\ln(\sqrt{3}+1)$. 提示：令 $x=\dfrac{1}{t}$ 或 $x=\tan t$.

   （20）$\dfrac{3}{4}\pi-2$. 提示：令 $x=1+\sin t$.

7. （1）$\dfrac{1}{2}$.（2）$\dfrac{1}{p+1}$.（3）$\dfrac{2}{\pi}$.

8. （1）$\begin{cases} 0 & n\text{为奇数} \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\pi & n\text{为偶数} \end{cases}$.　（2）$\begin{cases} 0 & n\text{为奇数} \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot 2\pi & n\text{为偶数} \end{cases}$.

（3）$a^{2n+1}\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$.（4）$\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{(20)!!}{(21)!!}-\dfrac{(22)!!}{(23)!!}\right)$. (5) $\dfrac{(-1)^m m!}{(n+1)^{m+1}}$.

（6）$\begin{cases} \dfrac{1}{2}(e^2-1) & n=0 \\ \dfrac{1}{2}e^2\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^k P_n^k+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\cdot n! & n>0 \end{cases}$，其中 P_n^k 为排列数.

提示: 利用递推公式 $I_n=\dfrac{1}{2}e^2-\dfrac{n}{2}I_{n-1}$ 及 $I_0=\dfrac{1}{2}(e^2-1)$.

10. (1) $\dfrac{3}{16}\pi^2$. (2) $\dfrac{1}{4}\pi^2$. (3) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi^2$.

11. (1) 285. (2) 0. (3) $\begin{cases} \dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}a & a\le 0 \\ \dfrac{1}{3}a^3-\dfrac{1}{2}a+\dfrac{1}{3} & 0<a<1 \\ \dfrac{1}{2}a-\dfrac{1}{3} & a\ge 1 \end{cases}$. (4) $14-\ln(7!)$.

13. $\ln\dfrac{e+1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2e^4}$.

14. $f''(1)=2, f'''(1)=5$；提示: $f(x)=\dfrac{x^2}{2}\int_0^x g(t)dt-x\int_0^x tg(t)dt+\dfrac{1}{2}\int_0^x t^2 g(t)dt$.

15. $\dfrac{1}{e}$；提示: 对等式的两边求定积分，得到

$$\int_1^e f(x)dx=\int_1^e \ln x dx-(e-1)\int_1^e f(x)dx.$$

16. $\dfrac{5}{4}$； 提示：作变量代换 $u=2x-t$，将等式化为

$$2x\int_{2x-1}^{2x} f(u)du-\int_{2x-1}^{2x} uf(u)du=\frac{1}{2}\arctan x^2,$$

等式两边对 x 求导，再以 $x=1$ 代入.

17. $n^2\pi$.

18. $\dfrac{2}{\pi}$.

19. 提示: $g'(x) = af(ax) - f(x) \equiv 0$，令 $x=1$，得到对任何 a，有 $f(a) = \dfrac{f(1)}{a}$.

20. 提示：积分 $\int_1^4 f\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}\right)\dfrac{\ln x - \ln 2}{x}dx$

$$= \int_1^2 f\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)\frac{\ln x - \ln 2}{x}dx + \int_2^4 f\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)\frac{\ln x - \ln 2}{x}dx$$

对上面两积分中任意一个作变量代换 $x = \dfrac{4}{t}$.

21. 提示: $\max|f(x)| = (\max|f(x)| - \min|f(x)|) + \min|f(x)|$.

设 $\max|f(x)| = |f(\xi)|$，$\min|f(x)| = |f(\eta)|$，则

$$\max|f(x)| - \min|f(x)| = |f(\xi)| - |f(\eta)| \le |f(\xi) - f(\eta)| = \left|\int_\eta^\xi f'(x)dx\right| \le \int_a^b |f'(x)|dx;$$

设 $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(\varsigma)$，则 $\min|f(x)| \le |f(\varsigma)| = \left|\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$.

22. 提示: 令 $F(x) = \int_0^x f(u)(x-u)du - \int_0^x \left\{\int_0^u f(x)dx\right\}du$，显然 $F(0)=0$，只须证明

$F'(x) \equiv 0$.

23. 提示:

$$f(x) = f\left(\frac{a}{2}\right) + f'\left(\frac{a}{2}\right)\left(x-\frac{a}{2}\right) + \frac{1}{2}f''(\xi)\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 \ge f\left(\frac{a}{2}\right) + f'\left(\frac{a}{2}\right)\left(x-\frac{a}{2}\right),$$

对不等式两边积分.

注. 本题也可直接利用 7.2 节习题 8 的结果，取 $\varphi(t) = t$.

24. 提示:

$$f(x) = f\left(\frac{1}{3}\right) + f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}f''(\xi)\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 \le f\left(\frac{1}{3}\right) + f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right),$$

将 x 换成 x^2，再对不等式两边积分.

注. 本题也可直接利用当 $f''(x) \le 0$ 时与 7.2 节习题 8 相对应的结果，取

$a=1$ ，$\varphi(t) = t^2$.

25. 提示: $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{(2k+1)\pi}{n}} f(x)\sin nxdx + \int_{\frac{(2k+1)\pi}{n}}^{\frac{(2k+2)\pi}{n}} f(x)\sin nxdx\right)$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}\left(f\left(\frac{2k\pi+t}{n}\right)-f\left(\frac{(2k+1)\pi+t}{n}\right)\right)\sin tdt\geq 0.$$

26. 提示：设 $g(x)=\int_0^x f(x)dx$，则 $g(0)=0,\ g(\pi)=0$．再令 $h(x)=\int_0^x g(x)\sin xdx$，则 $h(0)=0$，$h(\pi)=\int_0^{\pi} g(x)\sin xdx=\int_0^{\pi} f(x)\cos xdx=0$．对 $h(x)$ 应用 Rolle 定理，可知存在 $\eta\in(0,\pi)$，使得 $h'(\eta)=g(\eta)\sin\eta=0$，即 $g(\eta)=0$．再对 $g(x)$ 应用 Rolle 定理，可知存在 $\xi_1\in(0,\eta)$，$\xi_2\in(\eta,\pi)$，使得 $f(\xi_1)=0$，$f(\xi_2)=0$．

第 4 节

1. （1）$\frac{3}{2}-\ln 2$．（2）$\frac{16}{3}$．（3）$\frac{\pi}{2}$．（4）$e+\frac{1}{e}-2$．（5）$\frac{99}{10}\ln 10-\frac{81}{10}$．

   （6）$\frac{8}{15}$．（7）$\frac{3}{8}\pi a^2$．（8）$\frac{4}{3}\pi^3 a^2$．（9）$\frac{1}{4}\left(e^{4\pi}-1\right)a^2$．（10）$\frac{1}{2}\pi a^2+\pi b^2$．

   （11）π．（12）a^2．（13）$\frac{1}{2}\pi a^2$．

   （14）$\frac{3}{2}a^2$；提示：令 $x=\frac{at}{1+t^3}$，$y=\frac{at^2}{1+t^3}$，$t:0\to+\infty$．

   （15）$\sqrt{2}\pi a^2$；提示：将曲线方程化成极坐标方程 $r^2=\frac{2a^2}{2-\sin^2 2\theta}$．

2. 提示：取焦点 $(a,0)$ 为极点，x 轴为极轴，则抛物线的极坐标方程为 $r=\frac{2a}{1-\cos\theta}$．求面积函数 $A(\theta)=\frac{1}{2}\int_{\theta}^{\theta+\pi}\frac{4a^2}{(1-\cos\theta)^2}d\theta$ 的极值点，由 $A'(\theta)=0$ 可得到 $\theta=\frac{\pi}{2}$．

3. (1) $\frac{80\sqrt{10}-8}{27}$. (2) $\frac{1}{4}(e^2+1)$. (3) $\ln(\sec a+\tan a)$. (4) $6a$. (5) $2\pi^2 a$. (6) $8a$.

   (7) $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right)$. (8) $\frac{3\pi a}{2}$.

4. $\left(\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a,\frac{3}{2}a\right)$.

5. (1) $\frac{\pi h}{6}(2AB+2ab+Ab+aB)$. (2) $\frac{4}{3}\pi abc$. (3) $\frac{16}{3}a^3$. (4) $\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{8}{9}\right)a^3$.

6. 提示: (1) 作区间$[a,b]$的划分$P: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，则关于小区域$\{(x,y)|x_{i-1}\le x\le x_i, 0\le y\le f(x)\}$ 绕y轴旋转所得的体积有

$$\Delta V_i \approx \pi(x_i^2-x_{i-1}^2)f(x_i)\approx 2\pi x_i f(x_i).$$

(2) 设$x=r(\theta)\cos\theta$，$y=r(\theta)\sin\theta$，$a=r(\alpha)\cos\alpha$，$b=r(\beta)\cos\beta$. 则

$$\begin{aligned}V&=\int_b^a \pi y^2dx-\frac{1}{3}\pi ar^2(\alpha)\sin^2\alpha+\frac{1}{3}\pi br^2(\beta)\sin^2\beta\\&=\int_b^a\pi y^2dx+\frac{1}{3}\pi\int_a^b d(y^2x)\\&=\int_\beta^\alpha \pi r^2\sin^2\theta(r'\cos\theta-r\sin\theta)d\theta\\&\quad+\frac{1}{3}\pi\int_\alpha^\beta\left(3r^2r'\sin^2\theta\cos\theta+2r^3\sin\theta\cos^2\theta-r^3\sin^3\theta\right)d\theta\\&=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\sin\theta d\theta.\end{aligned}$$

7. (1) $\frac{4}{3}\pi ab^2$. (2) (i) $\frac{1}{2}\pi^2$, (ii) $2\pi^2$. (3) $\frac{32}{105}\pi a^3$. (4) (i) $6\pi^2a^3$, (ii) $7\pi^2a^3$.
(5) $2\pi^2a^2b$. (6) $\frac{8}{3}\pi a^3$. (7) $\frac{\pi}{15}(e^{3\pi}+1)a^3$. (8) $\frac{\pi}{4}\left[\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)-\frac{2}{3}\right]a^3$.

8. $2a^5-10a^2c^3+15ac^4-6c^5=0$.

9. $a=1$.

10. $b\sqrt{1-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}}$.

11. (1) $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$(S_1+S_2)_{\min}=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{6}$； (2) $\frac{1}{30}(\sqrt{2}+1)\pi$.

12. 提示:（1）对$xf'(x)=f(x)+\frac{3a}{2}x^2$两边关于$x$在$[0,1]$上积分，由$\int_0^1 f(x)dx=2$，得到 $f(1)=4+\frac{a}{2}$. 又因为 $xf'(x)=f(x)+\frac{3a}{2}x^2$ 可化为 $(\frac{f}{x})'=\frac{3a}{2}$，结合$f(1)=4+\frac{a}{2}$，解得 $f(x)=\frac{3a}{2}x^2+(4-a)x$，其中常数$a\in[-8,4]$.

(2) $\pi\int_0^1 f^2(x)dx=\frac{\pi}{30}(a^2+10a+160)$，可知当$a=-5$时区域$S$绕$x$轴旋转所得的旋转体体积最小.

13. (1) $\frac{2\pi\sqrt{p}}{3}\left[(2a+p)^{\frac{3}{2}}-p^{\frac{3}{2}}\right]$. (2) $2\sqrt{2}\pi+2\pi\ln(\sqrt{2}+1)$.

(3) $\begin{cases} 2\pi b^2 + \dfrac{2\pi a^2 b}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\dfrac{b+\sqrt{b^2-a^2}}{a} & a<b \\ 4\pi ab & a=b \\ 2\pi b^2 + \dfrac{2\pi a^2 b}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} & a>b \end{cases}$.

(4) $\frac{12}{5}\pi a^2$. (5) $\frac{32}{5}\pi a^2$. (6) (i) $(4-2\sqrt{2})\pi a^2$; (ii) $2\sqrt{2}\pi a^2$.

14. $\frac{11\sqrt{5}-1}{6}\pi$.

16. (1) $K=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $R=2\sqrt{2}$. (2) $K=\frac{\sqrt{2}}{4a}$, $R=2\sqrt{2}a$.

17. (1) $K=\frac{\sqrt{p}}{(2x+p)^{\frac{3}{2}}}$, $R=\frac{(2x+p)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}}$.

(2) $K=\frac{a^4 b}{\left[(a^2+b^2)x^2-a^4\right]^{\frac{3}{2}}}$, $R=\frac{\left[(a^2+b^2)x^2-a^4\right]^{\frac{3}{2}}}{a^4 b}$.

(3) $K=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{|axy|}}$, $R=3\cdot\sqrt[3]{|axy|}$.

(4) $K=\frac{1}{at}$, $R=at$.

18. $(x-3)^2+(y+2)^2=8$.

第 5 节

1. 75 mg.

2. $\frac{5\sqrt{5}-1}{6}q$.

3. 5.4×10^7 N.

4. $2\pi^2 b\rho\sqrt{a^2+b^2}$.

5. 1.04×10^9 J.

6. $\frac{4}{3}\pi g r^4(2\rho-\rho_{水})$.

7. $\frac{4}{3}\pi\rho\omega^2 r^4$.

8. 9 J.

9. $-\left(\frac{729}{7}T^7-\frac{243}{5}T^5+9T^3-T-\frac{2224}{35}\right)k$.

10. $\frac{1}{3\sqrt{g}}\times 10^5\,\mathrm{s}=1.06\times 10^4\,\mathrm{s}$.

11. 容器改为由曲线 $y=cx^4$ 绕 y 轴旋转所得的旋转曲面.

12. $Q=Q_0\cdot 2^{-\frac{t-t_0}{1600}}$.

13. $y(t)=\sqrt{\frac{18}{400}t+\frac{1}{25}}$, $(0\le t\le\frac{64}{3})$. 提示: 设 B 物质的浓度为 $y(t)$, 则

$dy=\frac{k}{y}dt$, 解得 $y(t)=\sqrt{2kt+c}$. 由 $y(0)=\frac{1}{5}$ 与 $y(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$, 得到 $k=\frac{9}{400}, c=\frac{1}{25}$.

14. $P(t)=P_{\max}-(P_{\max}-P(t_0))e^{-\lambda(t-t_0)}$.

提示: $P(t)$ 满足方程 $dP=\lambda(P_{\max}-P(t))dt$.

15. 提示: 由 $dN=kNdt$ 与 $N(0)=N_0$, 解得 $N(t)=N_0e^{kt}$.

16. $1000\ln 2\,\mathrm{m}$. 提示: 设废气浓度为 $y(t)$, 则 $dy=-\frac{1}{1000}y(t)dt$, 解得

$y(t)=\frac{a}{100}e^{-\frac{t}{1000}}$.

第九章

第 1 节

1．（1）$S=\frac{3}{4}$.（2）发散.（3）$S=\frac{1}{4}$.（4）$S=\frac{1}{2}$.（5）发散.（6）$S=3\frac{9}{20}$.

（7）$S=-\sqrt{2}+1$．提示：$S_n=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}-\sqrt{2}+1$.

（8）$S=1$．提示：设$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{3^k}$，则$3S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{3^{k-1}}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2k+1}{3^k}$，再两式相减.

（9）$S=\frac{1-q\cos\theta}{1-2q\cos\theta+q^2}$．提示：由$\sum_{n=0}^{\infty}q^n e^{in\theta}=\frac{1}{1-qe^{i\theta}}$，利用 Euler 公式

$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，对上式两边取实部.

2．（1）$(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$．（2）$(-\infty,0)$．（3）$(-1,1]$.

4．$\sum_{n=1}^{\infty}x_n=\frac{1}{6}$．提示：$x_n=\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n+2}+\frac{1}{n+3}$.

5．(1) $S_n=\frac{4}{3}{a_n}^3$，其中$a_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{a_n}=\frac{4}{3}$.

第 2 节

1．（1）$\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n=\frac{1}{2}$，$\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n=-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{5}$．（2）$\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n=+\infty$，$\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n=0$.

（3）$\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n=-\infty$，$\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n=-\infty$．（4）$\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（5）$\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n=5$，$\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n=-5$.

第 3 节

1．（1）收敛.（2）发散.（3）发散.（4）收敛.（5）收敛.（6）收敛.
（7）发散.（8）发散.（9）收敛.（10）收敛.（11）收敛.（12）收敛.
（13）发散.（14）收敛.（15）收敛.（16）收敛.（17）收敛.

3．(1) $\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=a$，所以当$a>1$时，级数收敛，当$0<a<1$时，级数发散；

当$a=1$，$x_n=\frac{1}{n+1}$，级数发散.

(2) $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=\ln 3>1$，级数收敛.

(3) $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=\ln 2<1$，级数发散.

4．(1) 收敛. (2) 发散. (3) 收敛.

8．提示：$\frac{\sqrt{x_n}}{n^p}\le\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{n^{2p}}\right)$；反例：$x_n=\frac{1}{n\ln^2 n}$.

9．(1) $S=A-f(1)$. (2) 提示: $0\le f'(n)<f'(\xi)=f(n)-f(n-1)$.

10．提示: $a_n+a_{n+2}=\frac{1}{n+1}$.

11．提示: 证明数列$\{nx_{n+1}\}$单调增加，于是存在$\alpha>0$，使得$nx_{n+1}\ge\alpha$.

12．提示: 设$S_n=\sum_{k=1}^{\infty}x_k$，令$y_1=\sqrt{S_1}$，$y_n=\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}$　$(n=2,3,4,\cdots)$.

13．提示: 利用不等式$\frac{x_n}{{S_n}^2}\le\frac{S_n-S_{n-1}}{S_nS_{n-1}}=\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}$.

14. 提示: 注意 Fibonacci 数列的性质 $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$ 与 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}<2$ (见例 2.4.4). 由 D'Alembert 判别法可知级数收敛. 设$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$，则$2S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{2^n}$，两式相加得到 $3S=a_1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+2}}{2^n}=4S-a_1-a_2$.

第 4 节

1．（1）发散.（2）条件收敛.（3）当$x\ne0$时条件收敛；当$x=0$时绝对收敛.
（4）发散.（5）条件收敛.（6）条件收敛.
（7）当$x\in(k\pi-\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{\pi}{6})$时绝对收敛；当$x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}$时条件收敛；其他情况下发散.
（8）当$x=\frac{k\pi}{2}$时绝对收敛；设$x\ne\frac{k\pi}{2}$，当$p>1$ 绝对收敛，当$p\le1$时发散.
（9）当$|x|<2$时绝对收敛，当$|x|\ge2$时发散.（10）条件收敛.
（11）当$|x|<1$时绝对收敛；

当 $x=1$ 时，$\begin{cases} p>1\text{或}p=1, q>1 & \text{绝对收敛} \\ \text{其他情况} & \text{发散} \end{cases}$；

当 $x=-1$ 时，$\begin{cases} p>1\text{或}p=1, q>1 & \text{绝对收敛} \\ p=1, q\le 1\text{或}0<p<1\text{或}p=0, q>0 & \text{条件收敛} \\ \text{其他情况} & \text{发散} \end{cases}$；

当 $|x|>1$ 时发散.

（12）当 $a>1$ 时绝对收敛；当 $0<a\le 1$ 时条件收敛.

3. 提示：当 $n\to\infty$ 时，$\frac{n}{2}x_n < x_{\left[\frac{n}{2}\right]} + x_{\left[\frac{n}{2}\right]+1} + \cdots + x_n \to 0$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 不一定收敛. 反例：$x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$，$y_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x_n$ 不一定收敛. 反例：$x_n = \begin{cases} \frac{1}{k} & n=2k \\ \frac{1}{k^2} & n=2k-1 \end{cases}$.

7. 收敛；提示：$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha > 0$.

8. 提示：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n^{\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x_n}{n^{\alpha_0}}\cdot\frac{1}{n^{\alpha-\alpha_0}}\right)$，利用 Abel 判别法.

9. 提示：令 $a_n = x_n, b_n = 1$，则 $B_k = k$，利用 Abel 变换得到

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = nx_n - \sum_{k=1}^{n-1} k(x_{k+1}-x_k).$$

10. 提示：由于 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 收敛，$\forall\varepsilon>0, \exists N, \forall n>N, \forall p\in \mathrm{N}^+$：$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} y_k\right| < \varepsilon$. 由于 $\sum_{n=2}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛，所以收敛，于是可知 $\{x_n\}$ 有界. 设 $\sum_{n=2}^{\infty}|x_{n+1}-x_n| = A$，$|x_n|\le B$，令 $B_k = y_{n+1}+y_{n+2}+\cdots+y_{n+k}$，利用 Abel 变换得到

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} x_k y_k\right| = \left|x_p B_p - \sum_{k=n+1}^{n+p}(x_{k+1}-x_k)B_k\right| < (A+B)\varepsilon.$$

11. 提示：首先有 $f(0)=0$，$f'(0)=0$，于是 $f\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{f''(0)}{2}\cdot\frac{1}{n^2}$.

12．提示： 反证法．令 $y_n=(1+\frac{1}{n})x_n$，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ 收敛，则由 Abel 判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n=$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}y_n$ 收敛.

13. 提示：由 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)>0$，可知数列 $\{x_n\}$ 当 n 充分大时是单调减少的；同时存在 $\beta>\alpha>0$，当 n 充分大时，成立 $\frac{x_n}{x_{n+1}}>1+\frac{\beta}{n}>(1+\frac{1}{n})^{\alpha}$，这说明数列 $\{n^{\alpha}x_n\}$ 当 n 充分大时也是单调减少的，于是 $n^{\alpha}x_n\le A$，从而数列 $\{x_n\}$ 趋于零.

14. $\frac{3}{2}\ln 2$. 提示： 设 $b_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$，$c_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 的更序级数 $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$，则有 $S_{3n}=b_{4n}-b_n-\frac{1}{2}c_n+2\ln 2$. 再利用 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\gamma$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\ln 2$.

第 5 节

1．（1）收敛.（2）发散.（3）收敛.（4）收敛.（5）当 $x>1$ 时收敛，当 $x\le 1$ 时发散.（6）收敛.（7）当 $|x|<2$ 时收敛，当 $|x|\ge 2$ 时发散.（8）收敛.（9）收敛.

（10）当 $\min(p,2q)>1$ 时收敛，当 $\min(p,2q)\le 1$ 时发散.

2. (1) $\frac{1}{2}$； 提示：$\prod\limits_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}$.

(2) $\frac{1}{3}$； 提示：$\prod\limits_{k=2}^{n}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{n+2}{n}$.

(3) $\frac{2}{3}$； 提示：$\prod\limits_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{n^2+n+1}{n(n-1)}$.

3. 提示： 设 $\cos x_n=1-\alpha_n$，则 $0<\alpha_n<\frac{1}{2}{x_n}^2$.

4. 提示： 设 $\tan(\frac{\pi}{4}+a_n)=1+\alpha_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|\alpha_n|}{|a_n|}=2$.

5．提示：利用$\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$发散到0的充分必要条件是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln p_n$发散到$-\infty$.

6．提示：$$\prod_{k=1}^{2n}(1+q^k)=\frac{\prod\limits_{k=1}^{2n}(1-q^{2k})}{\prod\limits_{k=1}^{2n}(1-q^k)}=\frac{\prod\limits_{k=1}^{2n}(1-q^{2k})}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1-q^{2k})\cdot\prod\limits_{k=1}^{n}(1-q^{2k-1})}=\frac{\prod\limits_{k=n+1}^{2n}(1-q^{2k})}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1-q^{2k-1})}.$$

第十章

第 1 节

1.（1）(i) 非一致收敛. (ii) 一致收敛.

（2）一致收敛.

（3）(i) 非一致收敛. (ii) 一致收敛.

（4）(i) 非一致收敛. (ii) 一致收敛.

（5）一致收敛.

（6）非一致收敛.

（7）(i) 一致收敛. (ii) 非一致收敛.

（8）(i) 非一致收敛. (ii) 非一致收敛.

（9）非一致收敛.

（10）(i) 非一致收敛. (ii) 一致收敛.

（11）(i) 非一致收敛. (ii) 一致收敛.

（12）(i) 非一致收敛. (ii) 一致收敛.

4. 不成立; $\lim\limits_{n\to\infty} S_n'(1)=\dfrac{1}{2}\neq S'(1)$.

5. (1) $\alpha<1$. (2) $\alpha<2$. (3) $\alpha<0$.

6. 提示: $\forall\eta>0$，证明$\{S_n(x)\}$在$[a+\eta,b-\eta]$上一致收敛于$S'(x)$. 取$0<\alpha<\eta$，

则$S'(x)$在$[a+\alpha,b-\alpha]$上一致连续，即$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，$\forall x',x''\in[a+\alpha,b-\alpha]$，

只要$|x'-x''|<\delta$，就成立$|S'(x')=S'(x'')|<\varepsilon$. 取$N=\max\left\{\left[\dfrac{1}{\delta}\right],\left[\dfrac{1}{\eta-\alpha}\right]\right\}$，

当$n>N$且$x\in[a+\eta,b-\eta]$时,$x+\dfrac{1}{n}\in[a+\alpha,b-\alpha]$，于是$|S_n(x)-S'(x)|=$

$|S'(\xi)-S'(x)|<\varepsilon$.

7. 提示: 设$|S_0(x)|\le M$，则$|S_n(x)|\le M\dfrac{x^n}{n!}$.

8. 提示：设$|S(x)|\le M$. 由$S(1)=0$，得到$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当$x\in[1-\delta,1]$时，$|x^nS(x)|<\varepsilon$；再由$\{x^n\}$在$[0,1-\delta]$的一致收敛性，$\exists N$，当$n>N$时，对一切$x\in[0,1-\delta]$成立$|x^n|<\dfrac{\varepsilon}{M}$.

第 2 节

1.（1）非一致收敛.

（2）一致收敛.

（3）一致收敛.

（4）(i) 非一致收敛. (ii) 一致收敛.
（5）一致收敛.
（6）一致收敛.
（7）一致收敛.
（8）一致收敛.
（9）(i) 非一致收敛.(ii) 一致收敛.
（10）一致收敛.
（11）非一致收敛.
（12）一致收敛.

2. 提示: 证明$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2+1}$与$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\sin nx}{n^2+1}$在$(0,2\pi)$上内闭一致收敛.

3. 提示: 证明$\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$与$(-1)^k\sum_{n=1}^{\infty}n^{k+1}e^{-nx}$ $(k=1,2,\cdots)$在$(0,+\infty)$上内闭一致收敛.

4. 提示: 证明$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-x}$与$(-1)^k\sum_{n=1}^{\infty}n^{-x}\ln^k n$ $(k=1,2,\cdots)$在$(1,+\infty)$上内闭一致收敛;

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{-x}$与$(-1)^k\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{-x}\ln^k n$ $(k=1,2,\cdots)$在$(0,+\infty)$上内闭一致收敛.

5. 提示: 证明$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dx}\arctan\frac{x}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\frac{x^2}{n^2}}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

6. 提示: (1) 利用 Abel 判别法证明$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$在$[0,\delta)$上一致收敛.

(2) 利用 Abel 判别法证明$\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$在$[0,1]$上一致收敛.

7. 提示: 先利用 Dini 定理证明$\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x)$在$(a,b)$内闭一致收敛，再利用 Cauchy 收敛原理证明$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$(a,b)$内闭一致收敛.

8. 提示: 不等式$\left|\sum_{k=n+1}^{m}u_k(x)\right|\le\max\left\{\left|\sum_{k=n+1}^{m}u_k(a)\right|,\left|\sum_{k=n+1}^{m}u_k(b)\right|\right\}$对一切$x\in[a,b]$成立，然后利用 Cauchy 收敛原理.

9. 提示: 反证法. 设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$(a,a+\delta)$上一致收敛，则$\forall\varepsilon>0,\exists N$，对一切

$m>n>N$ 与一切 $x\in(a,a+\delta)$，成立 $\left|\sum_{k=n+1}^{m}u_k(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$，再令 $x\to a+$，得到 $\left|\sum_{k=n+1}^{m}u_k(a)\right|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$，这说明 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $x=a$ 收敛.

10. 提示: $\ln\left(1+\frac{x}{n\ln^2 n}\right)\le\frac{a}{n\ln^2 n}$.

11．(2) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\ln\frac{3}{2}$. 提示：$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\tan\frac{x}{2^n}dx$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{\cos\frac{\pi}{3\cdot 2^{n+1}}}{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}$，再利用 $\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{x}$.

12. (2) 提示: $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^3+n}}\sin\frac{n\pi}{2}$，这是一个 Leibniz 级数，它的前两项为 $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{3\sqrt{30}}$.

13. 提示: (1) $|f(x_1)-f(x_2)|=\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+x_1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+x_2}\right|\le|x_1-x_2|\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}$.

(2) $\lim_{A\to+\infty}\int_0^A f(x)dx=\lim_{A\to+\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^A\frac{dx}{2^n+x}=\lim_{A\to+\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\ln\left(1+\frac{A}{2^n}\right)=+\infty$.

第 3 节

1．（1）$R=\frac{1}{3}$，$D=\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.　（2）$R=1$，$D=(0,2)$.

（3）$R=\sqrt{2}$，$D=\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$.（4）$R=1$，$D=(-2,0]$.

（5）$R=+\infty$，$D=(-\infty,+\infty)$.（6）$R=1$，$D=[-1,1]$.

（7）$R=e$，$D=(-e,e)$. 提示: 应用 Stirling 公式.

（8）$R=4$，$D=(-4,4)$. 提示: 应用 Stirling 公式.

（9）$R=1$，$D=[-1,1)$. 提示：当 $x=1$ 时应用 Raabe 判别法.

2. （1） $D=\left[-\frac{1}{a},\frac{1}{a}\right)$.（2） $D=(-a,a)$.（3） $D=\left(-\frac{1}{\sqrt{a}},\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$.

3. （1） $R=R_1$.（2） $R\geq\min(R_1,R_2)$.（3） $R\geq R_1R_2$.

4. （1） $S(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$， $D=(-1,1)$.

（2） $S(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$， $D=(-1,1)$.

（3） $S(x)=\frac{x(1-x)}{(1+x)^3}$， $D=(-1,1)$.

（4） $S(x)=1-(1-\frac{1}{x})\ln(1-x)$， $D=[-1,1]$.

（5） $S(x)=\frac{2x}{(1-x)^3}$， $D=(-1,1)$.

（6） $S(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$， $D=(-\infty,+\infty)$.

（7） $S(x)=(1+x)e^x-1$， $D=(-\infty,+\infty)$.

5. 提示：当 $x\in[0,r)$， $\int_0^x f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$. 令 $x\to r-$，由 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}$ 收敛，

可知 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ 在 $[0,r]$ 连续，于是 $\int_0^r f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}$.

$\int_0^1\ln\frac{1}{1-x}\cdot\frac{dx}{x}=\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\frac{x^{n-1}}{n}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

7. （1） $\frac{2}{9}$；提示： $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n nx^n=\frac{1}{(1+x)^2}$，取 $x=\frac{1}{2}$.

（2） $\ln 2$；提示： $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n=\ln\frac{1}{1-x}$，取 $x=\frac{1}{2}$.

（3） $\frac{11}{27}$；提示： $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+2)x^{n+1}=\frac{x^2(3-x)}{(1-x)^3}$，取 $x=\frac{1}{4}$.

（4） 12；提示： $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2x^n=\frac{1+x}{(1-x)^3}$，取 $x=\frac{1}{2}$.

（5）$\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$；提示：$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}=\frac{\arctan x}{x}$，取 $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

（6）$\frac{3}{8}-\frac{3}{4}\ln\frac{3}{2}$；提示：$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1}x^n=\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})\ln(1+x)-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$，取 $x=\frac{1}{2}$

（7）$\frac{2}{e^2}$；提示：$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{n+1}=xe^{-x}$，取 $x=2$.

（8）$2e-1$；提示：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

8. 提示：设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R_1，$\sum_{n=1}^{\infty}A_nx^n$ 的收敛半径为 R_2. 由 $0\le a_n\le A_n$，

可知 $R_1\ge R_2$；由 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散,可知 $R_1\le 1$；又由 $\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{A_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{A_{n+1}-a_{n+1}}{A_{n+1}}=1$，

可知 $R_2=1$. 结合上述关系，得到 $R_1=1$.

9. (2) 不存在；提示：令 $t=2x$，当 $t\in(0,1)$，$-\frac{\ln(1-t)}{t}$ 单调增加，于是有

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}-}\frac{f(x)-f(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}}=\lim_{t\to 1-}\frac{2}{t-1}\left[\int_0^t-\frac{\ln(1-u)}{u}du-\int_0^1-\frac{\ln(1-u)}{u}du\right]$$

$$=\lim_{t\to 1-}\frac{2}{1-t}\int_t^1-\frac{\ln(1-u)}{u}du>\lim_{t\to 1-}-\frac{2\ln(1-t)}{t}=+\infty.$$

第 4 节

1.（1）$5+11(x-1)+12(x-1)^2+5(x-1)^3$，$D=(-\infty,+\infty)$.

（2）$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x+1)^n$，$D=(-2,0)$.

（3）$\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right]x^n$，$D=(-1,1)$.

（4）$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$，$D=(-\infty,+\infty)$.

（5）$\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 2^n}(x-2)^n$，$D=(0,4]$.

（6）$\sqrt[3]{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ n\end{pmatrix}x^{2n}$，$D=[-2,2]$.

（7）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}(x-1)^n$，$D=(-1,3)$.

（8）$-x-\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)x^n$，$D=[-1,1)$

（9）$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$，$D=(-1,1)$.

（10）$1+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\right)x^n$，$D=(-1,1)$.

2. (1) $1+\frac{1}{6}x^2+\frac{7}{360}x^4+\cdots$.

(2) $1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+\cdots$.

(3) $-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{7}{240}x^6-\cdots$.

(4) $1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{8}x^4+\cdots$.

4. 提示: $\frac{e^x-1}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}$，逐项求导后，以$x=1$代入.

5. (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{2n}=\frac{2(x^2+4)}{(x+2)^2}\ln\frac{2(x^2+4)}{(x-2)^2}-1$，$D=(-\infty,0]$.

提示: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}\cdot t^n=(1+\frac{1}{t})\ln(1+t)-1$，以$t=\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2$代入.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n=\frac{1}{1-x}\ln\frac{1}{1-x}$，$D=(-1,1)$.

提示: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)$.

6. 提示: 设$a_n=c+(n-1)d$，$n=1,2,\cdots$. 由$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b^n}=\frac{1}{b-1}$与$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{b^n}=\frac{1}{(b-1)^2}$，得

到$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b^n}=c\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b^n}+d\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{b^n}=\frac{bc-c+d}{(b-1)^2}$.

7. 提示: $\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 x^{2n}\ln xdx=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

第 5 节

4. 提示: 利用定理 10.5.1.

5. 提示: 先应用数学归纳法证明 $P_n(x)\le|x|$，再证明 $P_{n+1}(x)\ge P_n(x)$，于是得到函数序列$\{P_n(x)\}$在$[-1,1]$上收敛; 求出极限函数为$|x|$，由 Dini 定理可知$\{P_n(x)\}$在$[-1,1]$上是一致收敛于$|x|$的.

第十五章

第 1 节

1．（1）$\frac{\pi}{4}$；（2）$\ln\frac{2e}{1+e}$。

2．提示：用反证法证明 $\lim\limits_{y\to y_0-} f(x,y)=\phi(x)$ 关于 $x\in[a,b]$ 是一致的，即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall y\in(y_0-\delta,y_0)$，$\forall x\in[a,b]$：$\left|f(x,y)-\phi(x)\right|<\varepsilon$；参考定理 10.2.7（Dini 定理）的证明方法。

3．（1）$\arctan(1+b)-\arctan(1+a)$；（2）$\pi\arcsin a$。

4．（1）$2ye^{-y^5}-e^{-y^3}-\int_y^{y^2}x^2e^{-x^2y}dx$；（2）$\frac{3\cos y^3-2\cos y^2}{y}$

（3）$F(t)=-2t\int_0^{t^2}dx\int_{x-t}^{x+t}\cos(x^2+y^2-t^2)dy+2\int_0^{t^2}\sin 2x^2\cos 2xtdx$

$$+2t\int_{t^2-t}^{t^2+t}\sin(t^4-t^2+y^2)dy。$$

5．$I''(y)=3f(y)+2yf'(y)$。

6．$F''(y)=\begin{cases}2f(y), & x\in(a,b),\\ 0, & x\overline{\in}(a,b).\end{cases}$

8．（1）$\pi\ln\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{2}$；（2）0；（3）$\pi\ln\frac{|a|+|b|}{2}$。

11．显然 $I(y)$ 在 $y\neq 0$ 的点是连续的，因为 $I(0)=0$，而 $\lim\limits_{y\to 0+}I(y)=\frac{\pi}{2}f(0)$，$\lim\limits_{y\to 0-}I(y)=-\frac{\pi}{2}f(0)$，其中 $f(0)\neq 0$，所以 $I(y)$ 在 $y=0$ 点不连续.

提示：$\forall\varepsilon>0$，取 $\eta>0$，使得当 $0<x<\eta$ 时，$\left|f(x)-f(0)\right|<\frac{\varepsilon}{\pi}$，则

$|\int_0^\eta\frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx-\int_0^\eta\frac{yf(0)}{x^2+y^2}dx|<\frac{\varepsilon}{2}$。对固定的 $\eta>0$，取 $\delta>0$，使得当 $0<|y|<\delta$ 时，$|\int_\eta^1\frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx|<\frac{\varepsilon}{2}$，于是 $|\int_0^1\frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx-\int_0^\eta\frac{yf(0)}{x^2+y^2}dx|<\varepsilon$。分别令 $y\to 0+$ 与 $y\to 0-$，由 $\lim\limits_{y\to 0+}\int_0^\eta\frac{yf(0)}{x^2+y^2}dx=\frac{\pi}{2}f(0)$，$\lim\limits_{y\to 0-}\int_0^\eta\frac{yf(0)}{x^2+y^2}dx=-\frac{\pi}{2}f(0)$ 和 ε 的任意

性，即可得到 $\lim\limits_{y\to 0+} I(y)=\frac{\pi}{2}f(0)$ 与 $\lim\limits_{y\to 0-} I(y)=-\frac{\pi}{2}f(0)$。

第 2 节

1．（3）提示：由分部积分法

$$\int_A^{+\infty} x\sin x^4\cos\alpha x dx=-\frac{1}{4}\int_A^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{x^2}d\cos x^4$$

$$=-\frac{\cos\alpha x\cos x^4}{4x^2}\bigg|_A^{+\infty}-\frac{1}{4}\int_A^{+\infty}\frac{\alpha\sin\alpha x\cos x^4}{x^2}dx-\frac{1}{2}\int_A^{+\infty}\frac{\cos\alpha x\cos x^4}{x^3}dx,$$

当 $A\to+\infty$ 时，上述三式关于 α 在 $[a,b]$ 上一致趋于 0。

2．（1）提示：取 $\alpha_n=\frac{1}{n}$，

$$\int_{\frac{n\pi}{4}}^{\frac{3n\pi}{4}}\frac{x\sin\alpha_n x}{\alpha_n(1+x^2)}dx\ge\frac{\sqrt{2}n^2\pi^2}{16\left(1+(\frac{3n\pi}{4})^2\right)}。$$

（2）提示：作变量代换 $x=\frac{1}{t}$，则 $\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}\sin\frac{1}{x}dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{2-\alpha}}\sin tdt$，取 $\alpha_n=2-\frac{1}{n}$，

$$\int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{3\pi}{4}}\frac{1}{t^{2-\alpha_n}}\sin tdt\ge\frac{\sqrt{2}\pi}{4\left(2n\pi+\frac{3\pi}{4}\right)^{\frac{1}{n}}}。$$

3．提示：$\int_0^{+\infty}t^\lambda f(t)dt=\int_0^1 t^{\lambda-a}[t^a f(t)]dt+\int_0^{+\infty}t^{\lambda-b}[t^b f(t)]dt$。

4．　（1）一致收敛；
（2）（i）一致收敛；（ii）非一致收敛；
（3）（i）一致收敛；（ii）非一致收敛；
（4）（i）一致收敛；（ii）非一致收敛。

5．提示：证明积分关于 α 在 $(0,+\infty)$ 内闭一致收敛。

6．$(0,2)$．提示：证明积分关于 y 在 $(0,2)$ 内闭一致收敛。

7．提示：证明积分 $\int_0^{+\infty}e^{-sx}f(x)dx$ 关于 s 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛。

8．提示：证明积分 $\int_0^{+\infty}\left[\frac{\cos x}{1+(x+t)^2}\right]_t' dx$ 关于 t 在 $(-\infty,+\infty)$ 内闭一致收敛。

9．$\ln\frac{b}{a}$。

10．$\arctan\frac{b}{p}-\arctan\frac{a}{p}$。

11. $\dfrac{(2n-1)!!}{2(2n)!!}a^{-\frac{2n+1}{2}}\pi$。

12. $\dfrac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha\cdot\left[|\alpha|+1-\sqrt{1+\alpha^2}\right]$。

13. 提示：

$$\int_{A'}^{A''}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\int_{A'}^{A''}\frac{f(ax)}{x}dx-\int_{A'}^{A''}\frac{f(bx)}{x}dx$$
$$=\int_{aA'}^{bA'}\frac{f(x)}{x}dx-\int_{aA''}^{bA''}\frac{f(x)}{x}dx=[f(\xi_1)-f(\xi_2)]\ln\frac{b}{a},$$

其中ξ_1在aA'与bA'之间，ξ_2在aA''与bA''之间，这是利用了积分中值定理。令$A'\to 0$，$A''\to+\infty$即得结论。

14.（1）提示：令$\dfrac{c}{y}=t$，则$\int_0^{+\infty}e^{-y^2-\frac{c^2}{y^2}}dy=\int_0^{+\infty}e^{-t^2-\frac{c^2}{t^2}}\dfrac{c}{t^2}dt$，于是

$$\int_0^{+\infty}e^{-y^2-\frac{c^2}{y^2}}dy=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-t^2-\frac{c^2}{t^2}}(1+\frac{c}{t^2})dt=\frac{e^{-2c}}{2}\int_0^{+\infty}e^{-(t-\frac{c}{t})^2}d(t-\frac{c}{t}),$$

再令$t-\dfrac{c}{t}=x$，得到

$$\int_0^{+\infty}e^{-y^2-\frac{c^2}{y^2}}dy=\frac{e^{-2c}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx\text{。}$$

（2）$\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}e^{-2\sqrt{ab}}$。

15. $\dfrac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha|\beta|}$。

第3节

1.（1）$\dfrac{\pi}{8}$；（2）$\dfrac{1}{2\sqrt{2}}B\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)$；（3）$\dfrac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}$；（4）$\dfrac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$；

（5）$\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$；（6）$\dfrac{256}{1155}$；（7）$\dfrac{1}{n}\Gamma\left(\dfrac{m+1}{n}\right)$；（8）$\dfrac{1}{n}B\left(\dfrac{p}{n},q\right)$。

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}e^{-x^n}dx=\lim\limits_{n\to\infty}\Gamma\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\Gamma(1)=1$。

4. 提示：易知$\Gamma(1)=\Gamma(2)$，所以存在$x_0\in(1,2)$，使得$\Gamma'(x_0)=0$。由习题3的方

法得到$\Gamma''(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}\ln^2 x dx>0$，于是在$(x_0,+\infty)$上$\Gamma'(s)>0$，因此 $\Gamma(s)$在$(x_0,+\infty)$上单调增加。再由$\Gamma(n+1)=n!\to+\infty$即得结论。

5．$\ln\sqrt{2\pi}$ 。提示：利用$\int_0^1\ln\Gamma(1-x)dx=\int_0^1\ln\Gamma(x)dx$及余元公式。

6．$p<1$时收敛，此时$I=2\pi B\left(\frac{3}{2},1-p\right)$。

7．当$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}<1$时积分收敛，此时$I=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}\Gamma(\frac{1}{\alpha})\Gamma(\frac{1}{\beta})\Gamma(\frac{1}{\gamma})\Gamma(1-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma})$。

提示：令$\begin{cases}x=u^{\frac{2}{\alpha}}\\ y=v^{\frac{2}{\beta}}\\ z=w^{\frac{2}{\gamma}}\end{cases}$ 与$\begin{cases}u=r\sin\varphi\cos\theta\\ v=r\sin\varphi\sin\theta\\ z=r\cos\varphi\end{cases}$，得到

$$I=\frac{8}{\alpha\beta\gamma}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{\beta}-1}\theta\cos^{\frac{2}{\alpha}-1}\theta d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}-1}\varphi\cos^{\frac{2}{\gamma}-1}\varphi d\varphi\int_0^{+\infty}\frac{r^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1}}{1+r^2}dr，$$

对其中积分$\int_0^{+\infty}\frac{r^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1}}{1+r^2}dr$，令$r^2=t$。

8．$I=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)\Gamma(p)}{\Gamma(m+n+p)}$.

提示:将积分化为$I=(p-1)\iiint\limits_{\Omega}x^{m-1}y^{n-1}z^{p-2}dxdydz$,其中$\Omega$是由平面$x=0$，$y=0$，$z=0$与$x+y+z=1$所围的区域。再令$\begin{cases}x=u^2\\ y=v^2\\ z=w^2\end{cases}$ 与$\begin{cases}u=r\sin\varphi\cos\theta\\ v=r\sin\varphi\sin\theta\\ z=r\cos\varphi\end{cases}$，得到

$$I=8(p-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}\theta\cos^{2m-1}\theta d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m+2n-1}\varphi\cos^{2p-3}\varphi d\varphi\int_0^1 r^{2m+2n+2p-3}dr。$$

9．提示：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^{\alpha}xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\alpha}x\cos^{-\alpha}xdx=\frac{1}{2}B\left(\frac{\alpha+1}{2},\frac{-\alpha+1}{2}\right)$

$$=\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)=\frac{\pi}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}。$$

10．提示：作变量代换$t=\tan\dfrac{\varphi}{2}$，则

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}\right)^{\alpha-1}\frac{d\varphi}{1+k\cos\varphi}=2\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}dt}{(1+k)+(1-k)t^2},$$

再作变量代换$\sqrt{\dfrac{1-k}{1+k}}\,t=\tan\theta$，将它变为

$$\frac{2}{1+k}\left(\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\right)^{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^{\alpha-1}\theta d\theta=\frac{2}{1+k}\left(\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\right)^{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\alpha-1}\theta\cos^{1-\alpha}\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{1+k}\left(\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\right)^{\alpha}B\left(\frac{\alpha}{2},1-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{1+k}\left(\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\right)^{\alpha}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right).$$

再利用余元公式即得结论。

11．提示：作变量代换 $t=hu$，得

$$\int_0^{h}(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}dt=h\int_0^{1}(1-h^2u^2)^{\frac{n-3}{2}}dt\geq h\int_0^{1}(1-u^2)^{\frac{n-3}{2}}dt,$$

再作变量代换$u=\sin\theta$，右式变为

$$h\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n\ 2}\theta d\theta=\frac{h}{2}B\left(\frac{1}{2},\frac{n-1}{2}\right)=\frac{h}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}h。$$

第十六章

第 1 节

1．（1） $\dfrac{A}{\pi}+\dfrac{1}{2}\sin x-\dfrac{2A}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2kx}{4k^2-1}$；（2） $\dfrac{2A}{\pi}-\dfrac{4A}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2kx}{4k^2-1}$。

2．（1） $\dfrac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$；（2） $\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{4k^2-1}\cos 2kx$；

（3） $-\dfrac{5}{6}\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2(-1)^n}{n^2}\cos nx$；（4） $-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$；

（5） $-\dfrac{(a-b)\pi}{4}+\dfrac{2(a-b)}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}+(a+b)\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$。

3．（1） $2\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left[1-2(-1)^n\right]}{n}\sin nx$；（2） $\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\left[1-(-1)^n e^{-2\pi}\right]}{n^2+4}\sin nx$；

（3） $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{2}{n}(-1)^{n+1}+\dfrac{4}{\pi n^2}\sin\dfrac{n\pi}{2}\right]\sin nx$；（4） $\dfrac{1}{\pi}\sin\dfrac{\pi}{2}x+\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{n-\sin\dfrac{n\pi}{2}}{n^2-1}\sin\dfrac{n\pi}{2}x$。

4．（1） $\dfrac{\pi^2}{6}-\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2kx}{k^2}$；（2） $\dfrac{1}{\pi}(e^{\pi}-1)+\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left[(-1)^n e^{\pi}-1\right]}{n^2+1}\cos nx$；

（3） $(\dfrac{1}{\pi}+\dfrac{1}{2})+\dfrac{2}{\pi}\cos 2x-\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{4}{n^2-1}+\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{2}\right)\cos 2nx$；

（4） $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left[(-1)^n-\cos\dfrac{n\pi}{2}\right]}{n^2}\cos nx$。

5． $f(x)\sim\dfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，其中

$a_n=\dfrac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi}f(x)\cos nxdx\quad(n=0,1,2,\cdots)$，$b_n=\dfrac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi}f(x)\sin nxdx\quad(n=1,2,\cdots)$。

6．（1） $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\sin nx$；（2） $\dfrac{4}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\cos nx-\dfrac{\pi}{n}\sin nx\right)$；（3） $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\sin 2\pi nx$；

（4） $\dfrac{1}{6}(1-e^{-3})+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{3\left(1-(-1)^n e^{-3}\right)}{n^2\pi^2+9}\cos n\pi x-\dfrac{n\pi\left(1-(-1)^n e^{-3}\right)}{n^2\pi^2+9}\sin n\pi x\right]$；

（5）$\frac{C}{2}-\frac{2C}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{(2n-1)\pi}{T}x$。

7．$-\frac{5}{4\pi}(2-\sqrt{2})-\frac{5}{4\pi}\cos\omega t+\left(\frac{5}{4\pi}+\frac{35}{8}\right)\sin\omega t$

$+\frac{5}{2\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}-\frac{1}{n-1}\cos\frac{(n-1)\pi}{4}+\frac{2}{n^2-1}\right]\cos n\omega t$

$+\frac{5}{2\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{n+1}\sin\frac{(n+1)\pi}{4}-\frac{1}{n-1}\sin\frac{(n-1)\pi}{4}\right]\sin n\omega t$。

9.（1）$\tilde{f}(x)=\begin{cases}-f(\pi+x) & x\in(-\pi,-\frac{\pi}{2})\\ f(-x) & x\in(-\frac{\pi}{2},0)\\ f(x) & x\in(0,\frac{\pi}{2})\\ -f(\pi-x) & x\in(\frac{\pi}{2},\pi)\end{cases}$ （2）$\tilde{f}(x)=\begin{cases}f(\pi+x) & x\in(-\pi,-\frac{\pi}{2})\\ -f(-x) & x\in(-\frac{\pi}{2},0)\\ f(x) & x\in(0,\frac{\pi}{2})\\ -f(\pi-x) & x\in(\frac{\pi}{2},\pi)\end{cases}$

10．（1）$\tilde{a}_n=a_n\quad(n=0,1,2,\cdots)$，$\tilde{b}_n=-b_n\quad(n=1,2,\cdots)$；

（2）$\tilde{a}_n=a_n\cos nC+b_n\sin nC\quad(n=0,1,2,\cdots)$，

$\tilde{b}_n=b_n\cos nC-a_n\sin nC\quad(n=1,2,\cdots)$；

（3）$\tilde{a}_0=a_0^2$，$\tilde{a}_n=a_n^2-b_n^2$，$\tilde{b}_n=2a_nb_n\quad(n=1,2,\cdots)$。

第 2 节

1．提示：因为 $\lim_{x\to+\infty}\psi(x)=0$，所以存在 $N>0$，使得当 $x\geq N$ 时，$|\psi(x)|<1$。利用积分第二中值定理可得 $\left|\int_N^A\psi(x)\sin pxdx\right|<\frac{4}{p}$（$\forall A>N$），因此 $\left|\int_N^{+\infty}\psi(x)\sin pxdx\right|\leq\frac{4}{p}$。而由 Riemann 引理，$\lim_{p\to+\infty}\int_0^N\psi(x)\sin pxdx=0$。因此当 $p\to+\infty$ 时，$\int_0^{+\infty}\psi(x)\sin pxdx=\int_0^N\psi(x)\sin pxdx+\int_N^{+\infty}\psi(x)\sin pxdx\to 0$。

2．提示：易知

$$\int_{-\pi}^{\pi}\psi(u)\frac{\cos\frac{u}{2}-\cos pu}{2\sin\frac{u}{2}}du=\int_{0}^{\pi}[\psi(u)-\psi(-u)]\frac{\cos\frac{u}{2}-\cos pu}{2\sin\frac{u}{2}}du\,,$$

于是

$$\int_{-\pi}^{\pi}\psi(u)\frac{\cos\frac{u}{2}-\cos pu}{2\sin\frac{u}{2}}du-\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}[\psi(u)-\psi(-u)]\cot\frac{u}{2}du=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}[\psi(u)-\psi(-u)]\frac{\cos pu}{\sin\frac{u}{2}}du.$$

而

$$\lim_{u\to 0+}\frac{\psi(u)-\psi(-u)}{2\sin\frac{u}{2}}=\lim_{u\to 0+}\frac{\psi(u)-\psi(0)-[\psi(-u)-\psi(0)]}{u}\frac{\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}=\psi'_{+}(0)+\psi'_{-}(0)\text{。}$$

利用 Riemann 引理可得

$$\lim_{p\to+\infty}\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}[\psi(u)-\psi(-u)]\frac{\cos pu}{\sin\frac{u}{2}}du=0\text{。}$$

3．提示：由于

$$\int_{-\delta}^{\delta}\left\{\psi(u)-\frac{1}{2}[\psi(0+)+\psi(0-)]\right\}\frac{\sin pu}{u}du=\int_{0}^{\delta}\{[\psi(u)-\psi(0+)]+[\psi(-u)-\psi(0-)]\}\frac{\sin pu}{u}du,$$

利用 Dirichlet 引理即得结论。

8．$\frac{1}{3}$。

第 3 节

1．$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$， $x\in(-\pi,\pi)$；

$$x^3=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(6-\pi^2n^2)}{n^3}\sin nx\,,\quad x\in(-\pi,\pi)\text{。}$$

5．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$。

6．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$。

7．提示：利用分部积分法可得 $b_n''=-n^2b_n$。由于

$$\sqrt{|b_n|}=\frac{1}{n}\sqrt{|n^2b_n|}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+|n^2b_n|\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+|b_n''|\right)\ (n=1,2,\cdots),$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{|b_n|}\le\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}|b_n''|\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}|b_n''|\right)<\frac{1}{2}\left(2+\sum_{n=1}^{\infty}|b_n''|\right)。$$

8．提示：利用 Parseval 等式可知$\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=0$，于是$f(x)\equiv 0$。

第 4 节

1．（1）$\frac{A}{i\omega}(1-e^{-i\omega\delta})$；（2）$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$；（3）$\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$；（4）$\frac{1}{2+i\omega}$；

（5）$\frac{A\delta}{2}\left[\frac{\sin(\omega-\omega_0)\frac{\delta}{2}}{(\omega-\omega_0)\frac{\delta}{2}}+\frac{\sin(\omega+\omega_0)\frac{\delta}{2}}{(\omega+\omega_0)\frac{\delta}{2}}\right]$。

2．正弦变换：$\frac{\omega}{a^2+\omega^2}$；余弦变换：$\frac{a}{a^2+\omega^2}$。

3．$f_1*f_2(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \frac{1}{2}(\sin x-\cos x+e^{-x}), & 0<x\le\frac{\pi}{2},\\ \frac{1}{2}e^{-x}(1+e^{\frac{\pi}{2}}), & x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$

第 5 节

1．提示：先将圆频率ω写成频率形式$2\pi s$，再对充分大的N，在区间$[-N,N]$以间隔Δx对被积函数抽样（参见图 16.5.2)，在每个小区间内利用矩形公式近似代替积分，则

$$\hat{f}(\omega)\approx\int_{-N}^{N}f(x)\mathrm{e}^{-2\pi sxi}dx\approx\sum_{n=-M}^{M}f(n\Delta x)\mathrm{e}^{-2\pi s(n\Delta x)i}\Delta x，$$

再适当代换整理，就可以得到离散 Fourier 变换形式。

2．提示：设$\xi\ne 1$是方程$x^N=1$的一个根，则$\sum_{n=0}^{N-1}\xi^n=0$。